Hibaszámítási segédlet és mintafeladatok

1. A mérési hiba

A mérnöki gyakorlatban a mért mennyiségek minden esetben mérési hibával terheltek. A mérés pontosságának, a mért adatok megbízhatóságának számszerű jellemzésére hibaszámítást kell végeznünk. Jelölje X a mért mennyiséget, valamint δX a mért mennyiséghez tartozó mérési hibát (pontatlanságot). A mért eredmények helyes megadási formája a következő:

$$X \pm \delta X$$

Itt δX az X mennyiség *abszolút hibája*. (Az abszolút hiba fizikai dimenziója megegyezik az alapmennyiségével, ezért ennek megadásakor a mértékegységet is fel kell tüntetni!) A $\delta X / |X|$ hányados pedig *a relatív hiba*, amely dimenziótlan, és többnyire %-os formában szokásos megadni.

Megjegyzés:

Az X mennyiség bizonytalanságának jelölésére szokásos még az $u_c(X)$, illetve a ΔX jelölés is. Az előbbi (az uncertainty angol szó kezdőbetűjeként) az újabb keletű nemzetközi szakirodalomban használatos az ISO (Nemzetközi Szabványügyi Szervezet) és a BIPM (Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatal) ajánlásai alapján. Az utóbbi a hagyományos hazai és nemzetközi mérnöki gyakorlatban is elterjedt, hátránya azonban, hogy a nagy Δ sokszor (így a mi méréseinknél is) a mennyiségek különbségének jelölésére is szolgál ($\Delta p = p_2 - p_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$ stb.), a két konvenció együttes használata keveredést, félreértést okozatna. Kérjük, hogy az egyértelműség végett a hallgatók a mérési jelentésekben és a ZH feladatokban a kis δ jelölést használják.

A mérési hibát részben a mérőeszközök pontatlan *leolvasása* okozza. Analóg műszerek esetén a leolvasási hiba jó közelítéssel az adott műszer skálaosztásának felel meg, pl. manométernél a mérőfolyadék kitérését a mérőműszer [mm] skáláján olvassuk le, itt a folyadékoszlop-kitérés leolvasási hibája 1 mm. Digitális műszereknél hasonló szerepet játszik a kijelző számábrázolási pontossága.

1. példa:

$\Delta \ell$ =125 mm kitérést olvasunk le egy alkohollal töltött ferdecsöves mikromanométeren, melyet mm-osztású skálával láttak el, így leolvasási pontossága (abszolút hibája) $\delta\Delta \ell$ =1mm.

Megoldás:

Ekkor a mérési eredményként így írhatjuk: $\Delta \ell$ =(125 ± 1) mm. A relatív hiba: $\delta\Delta\ell / |\Delta\ell| = 1/125 = 0{,}8\%$.

Fontos azonban tudni, hogy a mérőeszközök mérési pontossága sokszor kisebb a leolvasási pontosságnál. Az adott műszer mérési pontosságáról mindig győződjünk meg a használati utasításában vagy specifikációjában. A számításokban mindig ebből az értékből induljunk ki.

A mérési hibák másik oka a műszer *kalibrációjából* ered: a műszer gyári beállításai helytelen tárolás, szállítás vagy kezelés miatt elállítódhatnak, de a hőmérséklet változása, az elemek kimerülése stb. is befolyásolja a mért értékeket. Mérés előtt lehetőség szerint győződjünk meg arról, hogy a műszer helyesen van kalibrálva, és minden esetben gondoskodjunk a pontos beállításról!

A leolvasási hibák megismételt mérések eredményeiben általában *véletlenszerű* szórást okoznak, így nagy számú kísérlet esetén a véletlen hiba nagyságrendjének becslésére az adatok statisztikai szórását használhatjuk. A kalibrációs hibák viszont *szisztematikus* eltérést okoznak, amely az átlagértékek eltolódásában jelentkezik. A szisztematikus hiba nagyságára a szórásból nem tudunk következtetni, ezt csak több, egymástól független — lehetőleg eltérő fizikai elven alapuló — mérőeszköz segítségével kapott mérési adatok összevetésével tehetjük meg. A hallgatói mérések során a kalibrációs hiba ellenőrzésére nincs lehetőség, de annak minimalizálásra (pl. a műszerek gondos beállításával) a pontos mérés érdekében mindenképpen törekedni kell.

2. A mérési hiba terjedése

Ha egy mennyiséget nem közvetlenül mérünk, hanem egy mérési eredményből számítással határozunk meg, akkor a mérés hibája számítás eredményében is hibát okoz. Ha a mért mennyiség X, a számított R, és a számítási eljárás (képlet)

$$R = f(X)$$

alakú, akkor a számítási eredmény δR és a mérés δX bizonytalanságai között a következő kapcsolat van:

$$\delta R = \frac{\partial f(X)}{\partial X} \cdot \delta X \equiv \frac{\partial R}{\partial X} \cdot \delta X$$

A fenti képletben a parciális derivált a számított R mennyiségnek a mért X mennyiségre vonatkozó *érzékenységi együtthatója*. A számított mennyiség relatív bizonytalanságát a mérés relatív hibájából így kapjuk:

$$\frac{\delta R}{|R|}=\frac{|X|}{|R|}\cdot\frac{\partial X}{\partial X}\cdot\delta X=k\cdot\delta X$$

Ezek a hibaterjedési képletek a véletlen és a szisztematikus hibák terjedésére egyaránt vonatkoznak.

2. példa:

Az 1. példában leírt mérés esetében határozzuk meg a Δp nyomáskülönbséget és annak bizonytalanságát az egyetlen mért adat ($\Delta\ell$ kitérés) leolvasási hibával terhelt értéke alapján!

Megoldás:

$$R=\Delta p=f(\Delta\ell)=\rho_{\text{alk}}\cdot g\cdot\Delta\ell\cdot\sin\alpha\,,$$

ahol ρ_{alk} = 850 kg/m^3, g = 9,81N/kg, sin α = 0,5. Az érzékenység:

$$\frac{\partial(\Delta p)}{\partial(\Delta\ell)}=\rho_{\text{alk}}\cdot g\cdot\sin\alpha=4169{,}25\ \text{ N/m}^3\approx 4200\ \text{ Pa/m}=4{,}2\ \text{ Pa/mm}$$

Ezekből a számolt mennyiség értéke és a pontatlan leolvasás miatti hibája pedig egyszerűen számolható:

$$\Delta p = (521{,}2 \pm 4{,}2)\ \text{Pa} = (521 \pm 4)\ \text{Pa},$$

a relatív hiba pedig:

$$\delta\Delta p\,/\,\Delta p=4{,}2\,/\,521{,}2=0{,}8\%$$

3. Hány tizedesjegyet használjunk?

A fenti 2. példában a számológéppel végzett számítás eredményeképpen mechanikusan a következő eredmény adódna:

$$\Delta p = (521{,}15625 \pm 4{,}16925)\ \text{Pa}$$

Ennyi tizedesjegy feltüntetése azonban helytelen, mert félrevezető! A hibaszámítás lényege éppen azt, hogy a mennyiségek pontosságát, ill. bizonytalanságát meghatározzuk. Esetünkben az jött ki, hogy a nyomáskülönbség értékét 4 Pa-nál jobban nem tudjuk az adott eljárással meghatározni, ezért ennél pontosabb számábrázolásnak nincs értelme.

Általában azt mondhatjuk, hogy két bizonytalan jegynél többet sohase tüntessünk fel! Az érzékenységeket és a hibákat két értékes jegyre számítsuk ki, a mennyiségekben a közbenső számításoknál is csak két bizonytalan jegyet használjunk, a végeredmény közlésekor legföljebb kettő bizonytalan jegyre szorítkozzunk, de az esetek többségében egy is elegendő.

4. A hibaterjedés több, függetlenül mért adat esetén

Ha olyan mennyiségről van szó, amelyet nem egy, hanem több mért adat alapján számolunk, akkor az egyes mennyiségek mérésekor elkövetett hibák *halmozódnak*. A hibaszámítást ilyenkor az alábbi számítási mód szerint kell elvégezni.

Jelöljük általánosan R-rel a mérési adatokból számolt mennyiséget, amely n db, X_i–vel jelölt, egymástól függetlenül mért mennyiség függvénye:

$$R = f(X_i),$$

ahol i = 1,…n. Az X_i mért mennyiségek mérésénél elkövetett δX_i abszolút hibákon túl meg kell határoznunk az R kifejezésének minden egyes X_i mért adatra vonatkozó érzékenységi együtthatóját, azaz a $\partial R/\partial X_i$ parciális deriváltját is.

Ezekkel az R számított mennyiség halmozott, vagy eredő abszolút hibáját az alábbi összefüggésbe behelyettesítve számítjuk ki:

$$\delta R=\sqrt{\left(\delta X_1\cdot\frac{\partial R}{\partial X_1}\right)^2+\left(\delta X_2\cdot\frac{\partial R}{\partial X_2}\right)^2+\ldots+\left(\delta X_n\cdot\frac{\partial R}{\partial X_n}\right)^2}\ .$$

A fenti összefüggés az egy mérési adatos számításokra vonatkozó átalakítással analóg módon az alábbi alakra hozható:

$$\delta R=\sqrt{R^2\cdot\left[\left(k_1\cdot\frac{\delta X_1}{X_1}\right)^2+\left(k_2\cdot\frac{\delta X_2}{X_2}\right)^2+\ldots+\left(k_n\cdot\frac{\delta X_n}{X_n}\right)^2\right]}\,,$$

ahol k_i (i = 1…n) az adott esetre meghatározandó együtthatók. A fenti kifejezést R-el osztva megkapjuk R relatív hibáját:

$$\frac{\delta R}{|R|}=\sqrt{\left(k_1\cdot\frac{\delta X_1}{X_1}\right)^2+\left(k_2\cdot\frac{\delta X_2}{X_2}\right)^2+\ldots+\left(k_n\cdot\frac{\delta X_n}{X_n}\right)^2}\ .$$

A relatív hibának ez utóbbi kiszámítási módja sok esetben célravezetőbb, mintha az abszolút hibából származtatnánk. Különösen igaz ez akkor, ha az R a mért mennyiségek egyszerű hatványaival arányos (ld. az alábbi példát).

3. példa:

Határozzuk meg a levegő ρ sűrűségét a teremben uralkodó p_0 légnyomás és T_0 hőmérséklet mérésével! Melyik mennyiség hibája okoz nagyobb bizonytalanságot az eredményben? A mért adatok: $X_1 = p_0 = (980 \pm 1)$ mbar, $X_2 = T_0 = (295 \pm 1)$ K. (A számítás során ügyeljünk a Pa és mbar egységek közti helyes átváltásra!)

Megoldás:

A gáztörvény alapján

$$\rho = \frac{p_0}{R \cdot T_0},$$

ahol $R = 287$ J/(kg·K), a levegő gázállandója. A két mért mennyiség abszolút és relatív mérési hibája:

$$\delta p_0 = 100 \text{ Pa}, \qquad \frac{\delta p_0}{|p_0|} = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$$

$$\delta T_0 = 1 \text{ K}, \qquad \frac{\delta T_0}{|T_0|} = 3{,}4 \cdot 10^{-3}$$

Az érzékenységi együtthatók (2 tizedesjegyre!):

$$\frac{\partial \rho}{\partial p_0} = \frac{1}{R \cdot T_0} = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ kg/J}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial T_0} = \frac{-p_0}{R \cdot (T_0)^2} = 3{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}^3 \cdot \text{K)}.$$

Ha csak a légnyomás lenne mérési hibával terhelt, akkor a 2. pont alapján a sűrűség hibája így alakulna:

$$\delta\rho = \frac{\partial \rho}{\partial p_0} \cdot \delta p_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-5} (\text{kg/J}) \cdot 100 \text{ Pa} = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^3.$$

Ha viszont csak a hőmérsékletet mérnénk, és a légnyomás pontosan ismert lenne:

$$\delta\rho = \frac{\partial \rho}{\partial T_0} \cdot \delta T_0 = 3{,}9 \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 1 \text{ K} = 3{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^3.$$

Mivel azonban esetünkben mindkét mennyiség hibával terhelt, ezért a sűrűség halmozott abszolút hibáját kell kiszámítanunk:

$$\delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial p_0} \cdot \delta p_0\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T_0} \cdot \delta T_0\right)^2} = 4{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^3.$$

Látjuk, hogy a hőmérsékletmérés hibájából adódó bizonytalanság sokkal jelentősebb, mintegy háromszorosa a légnyomásmérés hibájából eredőnek. A négyzetes összegzés miatt az előbbi csaknem teljes mértékben kiteszi a halmozott hiba értékét, a sűrűség pontosságát tehát a hőmérsékletmérés pontossága korlátozza.

A sűrűség értékére a pontosság figyelembe vételével a következőt kaptuk:

$$\rho = 1{,}1575 \text{ kg/m}^3 \pm 4{,}1 \text{ g/m}^3,$$

a relatív hibára pedig:

$$\delta\rho / \rho = 3{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}35\%.$$

Tanulságos a relatív hibát a k_i együtthatók segítségével közvetlenül is meghatározni.

$$k_1 = \frac{p_0}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial p_0} = +1, \qquad k_2 = \frac{T_0}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial T_0} = -1.$$

Látjuk, hogy egyenes és fordított arányosság esetén a k_i együtthatók abszolút értéke 1, így a relatív hibákkal való számítás különösen egyszerű, négyzetes összegzés:

$$\frac{\delta\rho}{|\rho|} = \sqrt{\left(k_1 \cdot \frac{\delta X_1}{X_1}\right)^2 + \left(k_2 \cdot \frac{\delta X_2}{X_2}\right)^2} = \sqrt{1 + 3{,}4^2} \cdot 10^{-3} = 3{,}5 \cdot 10^{-3}.$$

4. példa:

Egy sík felületre ható nyomóerőt akarjuk meghatározni. A felület három felületemre bontható, amelyeknek megmértük a területét, illetve méréssel meghatároztuk az ezekre ható nyomást. A mért területeket és nyomásokat, valamint ezeknek a mérési hibából eredő bizonytalanságát a mellékelt táblázat tartalmazza. Határozzuk meg a teljes felületre ható nyomóerőt és ennek bizonytalanságát!

	terület	**nyomás**
i	A_i	p_i
	[cm²]	[Pa]
1	50,0±0,3	152,25±1,5
2	24,0±0,2	137,61±1,4
3	36,0±0,25	118,98±1,2

Megoldás:

A teljes nyomóerő meghatározása:

$$F = \sum_{i=1}^{3} p_i \cdot A_i = p_1 \cdot A_1 + p_2 \cdot A_2 + p_3 \cdot A_3 = 15198{,}42 \ \text{Pa} \cdot \text{cm}^2 = 1{,}519842 \ \text{N}$$

Természetesen ennyi tizedesjegy kiírásának nincs értelme, az eredmény pontosságát a most következő hibaszámítás adja majd meg. (A hibaszámítás során, mint az előző példában, kettőnél több tizedesjegyet nem érdemes használni.) A fenti eredmény hat, egymástól függetlenül mért, bemenő adattól függ:

$$F = F(A_1, A_2, A_3, p_1, p_2, p_3)\ .$$

A végeredmény érzékenységét az A_1 bemenő paraméter változására vonatkozóan a

$$\frac{\partial F}{\partial A_1} = p_1 \approx 150 \ \text{N/m}^2$$

érzékenységi együttható jellemzi, ennek segítségével ki lehet számítani, hogy az A_1 bemenő paraméter értékében a mérési hiba miatt meglévő δA_1 bizonytalanság az eredményben

$$\frac{\partial F}{\partial A_1} \cdot \delta A_1 \approx \left(150 \ \text{N/m}^2\right) \cdot \left(0{,}3 \ \text{cm}^2\right) = 4{,}5 \cdot 10^{-3} \ \text{N}$$

bizonytalanságot okoz. A többi bemenő paraméterhez tartozó érzékenységi együtthatót és a végeredmény bizonytalanságához adott járulékát hasonlóképpen számíthatjuk ki, ezeket az alábbi táblázatban foglaltuk össze.

bemenő változó	érzékenységi együttható	bizonytalansági összetevő
A_1	$\frac{\partial F}{\partial A_1} = p_1$	$\frac{\partial F}{\partial A_1} \cdot \delta A_1 \approx 4{,}5 \, \text{mN}$
A_2	$\frac{\partial F}{\partial A_2} = p_2$	$\frac{\partial F}{\partial A_2} \cdot \delta A_2 \approx 2{,}8 \, \text{mN}$
A_3	$\frac{\partial F}{\partial A_3} = p_3$	$\frac{\partial F}{\partial A_3} \cdot \delta A_3 \approx 3{,}0 \, \text{mN}$
p_1	$\frac{\partial F}{\partial p_1} = A_1$	$\frac{\partial F}{\partial p_1} \cdot \delta p_1 \approx 7{,}5 \, \text{mN}$
p_2	$\frac{\partial F}{\partial p_2} = A_2$	$\frac{\partial F}{\partial p_2} \cdot \delta p_2 \approx 3{,}4 \, \text{mN}$
p_3	$\frac{\partial F}{\partial p_3} = A_3$	$\frac{\partial F}{\partial p_3} \cdot \delta p_3 \approx 4{,}3 \, \text{mN}$

A táblázatból láthatjuk, hogy a legnagyobb járulék a p_1 mérési hibájából származik. A végeredmény eredő bizonytalanságát a hibaterjedés törvénye alapján az egyes független összetevők bizonytalanságának négyzetösszegéből kapjuk:

$$(\delta F)^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial F}{\partial A_i} \cdot \delta A_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \cdot \delta p_i \right)^2 = (p_1 \cdot \delta A_1)^2 + (p_2 \cdot \delta A_2)^2 + (p_3 \cdot \delta A_3)^2 + (A_1 \cdot \delta p_1)^2 + (A_2 \cdot \delta p_2)^2 + (A_3 \cdot \delta p_3)^2$$

$$\delta F \approx 11 \, \text{mN}$$

A nyomóerőre fent kapott 1,519842 N-os értéknek tehát, a mérés pontosságát is figyelembe véve, csak az első három jegye értékes, az ezt követő jegyeknek nincs valóságos jelentése. A számítás eredményét tehát három értékes jegyre kerekítve és a hiba feltüntetésével az

$$F = (1{,}52 \pm 0{,}01) \, \text{N}$$

alakban adjuk meg.

5. A hibaterjedés több számítási lépés vagy egymástól függő mérési adat esetén

A hibaterjedés törvénye ebben az esetben módosul, komplikáltabb lesz. Több számítási lépés esetén a 4. pontban ismertetett eljárást nem alkalmazhatjuk gépiesen külön-külön minden számítási lépésre, de a számítási folyamat egészére alkalmazva helyes eredményt kapunk, ha a mérési adatok egyébként egymástól függetlenek.

6. A mért és számított hibák ábrázolása

Egy méréssorozatban felvett több mérési pont (pl. egy sebességprofil pontjai) esetén minden mérési pontra külön el kell végeznünk a fenti hibaszámítást. A mérési eredményeket ábrázoló grafikonon az abszolút hibákat hibasávval tüntetjük fel. Az is lehetséges, hogy ugyanabban a diagramban az egyes mérési pontokhoz tartozó relatív hiba értékeiből álló hibagörbét is ábrázoljuk. A számított eredmények hibáinak ábrázolásánál hasonlóképpen járunk el.