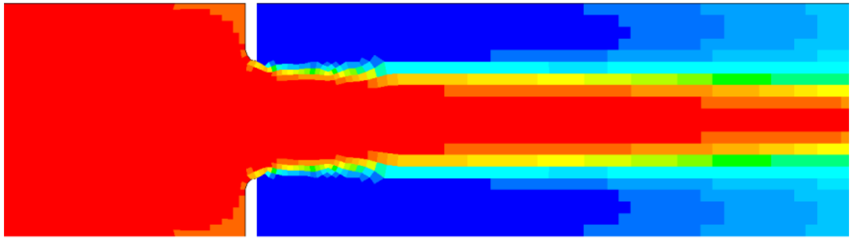
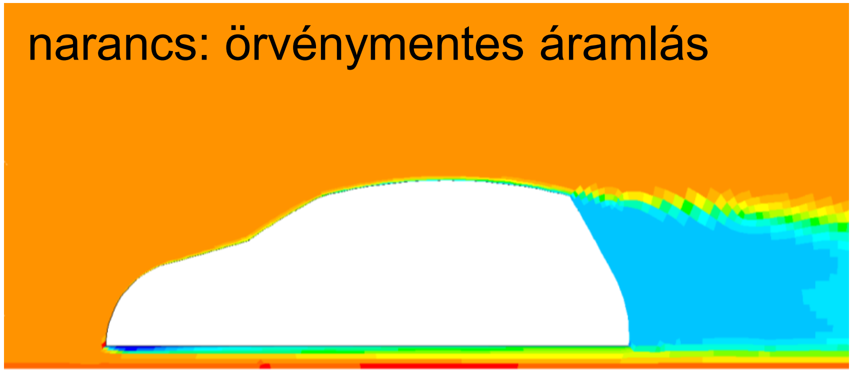
# Potenciálos áramlás viszkózus folyadékban

Össznyomás megoszlása 2D CFD modellek alapján:


szárny körül



szűk nyílás esetében




egy autó körül

# Komplex potenciál (w)

$\psi$ is és $\phi$ is harmonikus függvények: $\Delta\psi = 0$ és $\Delta\phi = 0$

továbbá kielégítik a Cauchy-Riemann összefüggéseket:

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Tehát képezhetik egy komplex függvény valós és képzetes részét:

$$w(z) = \phi(x, y) + i\,\psi(x, y)$$

z a komplex helyvektor: $z = x + iy$

**Bármely analitikus komplex függvény valós és képzetes részei állandó sűrűségű, stacionárius, potenciálos síkáramlást írnak le.**

Már csak a peremfeltételeket kell kielégítenünk.
Megvizsgálunk néhány alapmegoldást (pl. ln(z), $z^2$ stb.), majd ezeket összegezve, transzformálva próbálunk bonyolultabb peremfeltételeket kielégíteni.

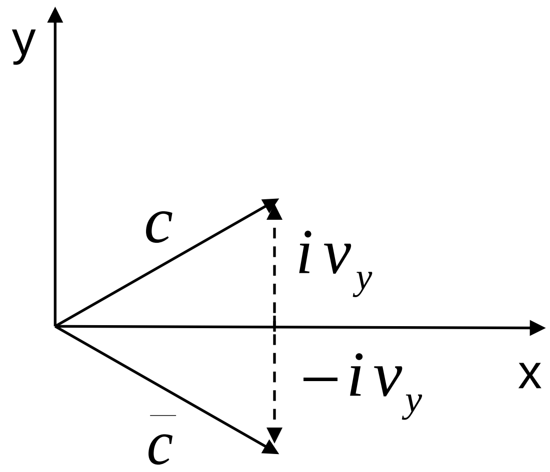
# A komplex sebesség (c)

A sebesség egy komplex számmal adható meg:

$$c = v_x + i\,v_y$$

A sebesség komplex konjugáltját w differenciálásával nyerhetjük.
A differenciálás bármely irányban végezhető:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial iy} = v_x - i\,v_y = \bar{c}$$



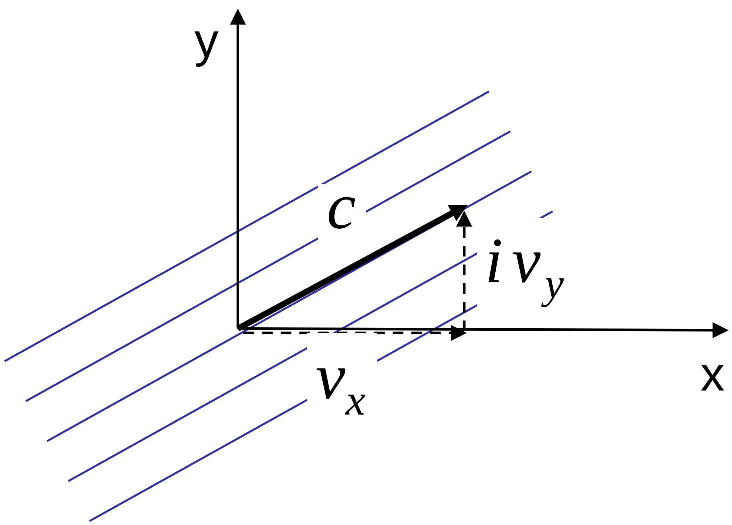
# Párhuzamos áramlás

$$w = \bar{c}\, z$$

$$\bar{c} = \frac{dw}{dz} = v_x - i\, v_y$$

$$w = \left(v_x - i\, v_y\right)\left(x + i\, y\right) = \underbrace{v_x x + v_y y}_{\phi} + i\,(\underbrace{-v_y x + v_x y}_{\psi})$$

Pl: a $\psi$=0 áramvonal egy origón áthaladó egyenes:




$$y = \frac{v_y}{v_x}\, x$$

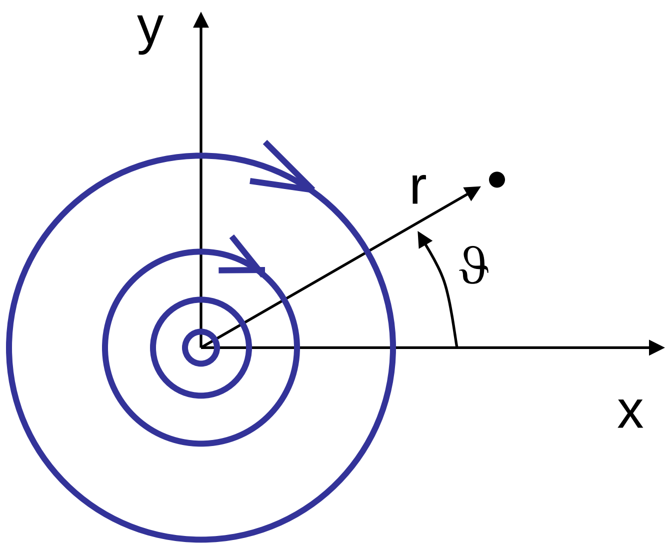
# Potenciálos örvény

$$w = i\,k\ln z$$

k: tetszőleges valós szám.

$$w = i\,k\ln\left(r\,e^{i\vartheta}\right) = \underbrace{-k\vartheta}_{\phi} + i\,\underbrace{k\ln r}_{\psi}$$

Az áramvonalak koncentrikus körök: $\psi = k\ln r = \text{áll.}$



# Potenciálos örvény

A sebességmező:

$$\bar{c} = \frac{dw}{dz} = i\,\frac{k}{z} = i\,\frac{k}{r\,e^{i\vartheta}} = i\,\frac{k}{r}\,e^{-i\vartheta}$$

$$\bar{c} = \frac{k}{r}\,i\left(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)\right)$$

$$c = \frac{k}{r}\left(\sin\vartheta - i\cos\vartheta\right)$$

Tangenciális irányú egységvektor.

A sebesség nagysága: $|c| = \frac{k}{r}$

Cirkuláció az origót egyszer megkerülő görbére:

$$\Gamma\;\left[\frac{m^2}{s}\right] = 2\,r\,\pi\,|c| = 2\,r\,\pi\,\frac{k}{r} = 2\,\pi\,k$$

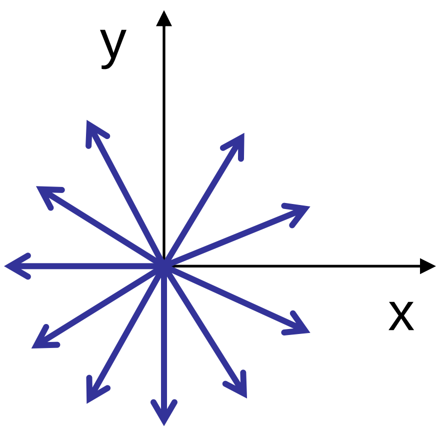
ezért: $k = \frac{\Gamma}{2\pi}$

# Forrás

Ez 3D-ben szemlélve vonalforrás.

$$\boxed{w = k\ln z}$$

k: tetszőleges valós szám.




$$w = k\ln\left(r\,e^{i\vartheta}\right) = \underbrace{k\ln r}_{\phi} + i\,\underbrace{k\vartheta}_{\psi}$$

$$z = x + iy \longrightarrow \psi = k\,atg\,\frac{y}{x}$$

$$\bar{c} = \frac{dw}{dz} = \frac{k}{z} = \frac{k}{r}\left(\cos\vartheta - i\sin\vartheta\right)$$

$$c = \frac{k}{r}\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)$$

Radiális egységvektor.

$$Q\left[\frac{m^2}{s}\right] = \psi_{\vartheta=2\pi} - \psi_{\vartheta=0} = k\,2\pi$$

ezért: $\boxed{k = \dfrac{Q}{2\pi}}$

# Sarok körüli áramlás

$$w = \frac{k}{n} z^n$$

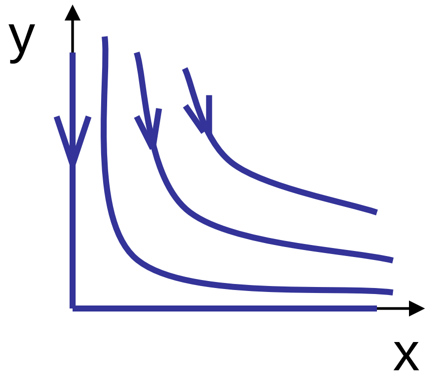
k, n: valós számok, és n>0.

$$w = \frac{k}{n} r^n e^{in\vartheta} = \frac{k}{n} r^n \left(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta\right)$$

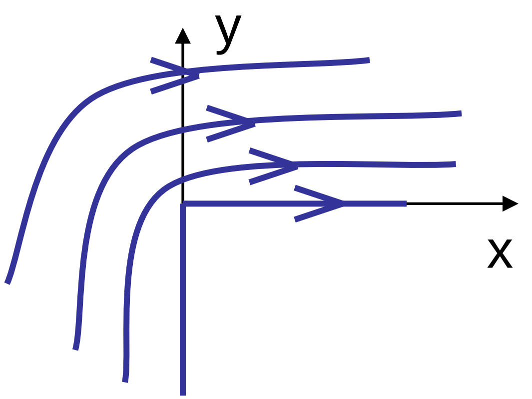
$$\psi = \frac{k}{n} r^n \sin n\vartheta$$

$$\psi = 0, \ \text{ahol} \quad \vartheta = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots$$

n=2 :
Ψ=0, ha
0, π/2

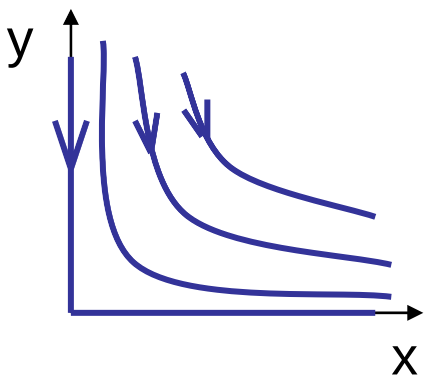



n=2/3 :
Ψ=0, ha
0, 3π/2



# Sarok körüli áramlás

a. Milyen alakúak az áramvonalak? y=f(x) ?
b. Hogyan változik a torlóponti áramvonalon (y tengely mentén) mozgó folyadékrész sebessége? v=g(y) ?




$$\psi = \frac{k}{2} r^2 \sin 2\vartheta$$ áramvonalon: Ψ=áll.

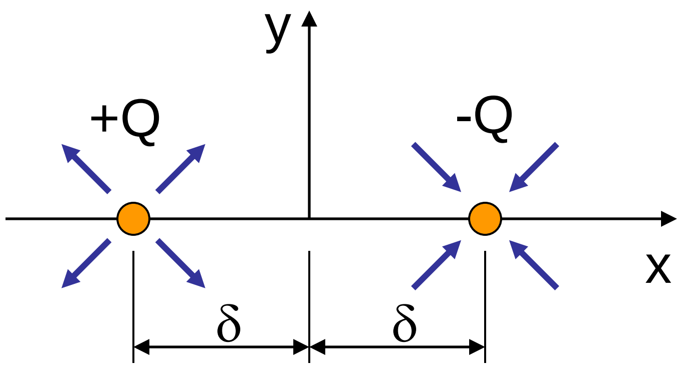
$$\psi = k r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$$

$$\psi = k\, x\, y$$

$$y = \frac{\psi}{k} x^{-1}$$ Tehát az áramvonalak hiperbolák.

$$\bar{c} = kz \longrightarrow v_y = -k\, y$$

# Dipólus




$$\delta \to 0, \quad Q \to \infty, \quad Q \cdot \delta = \text{áll.}$$

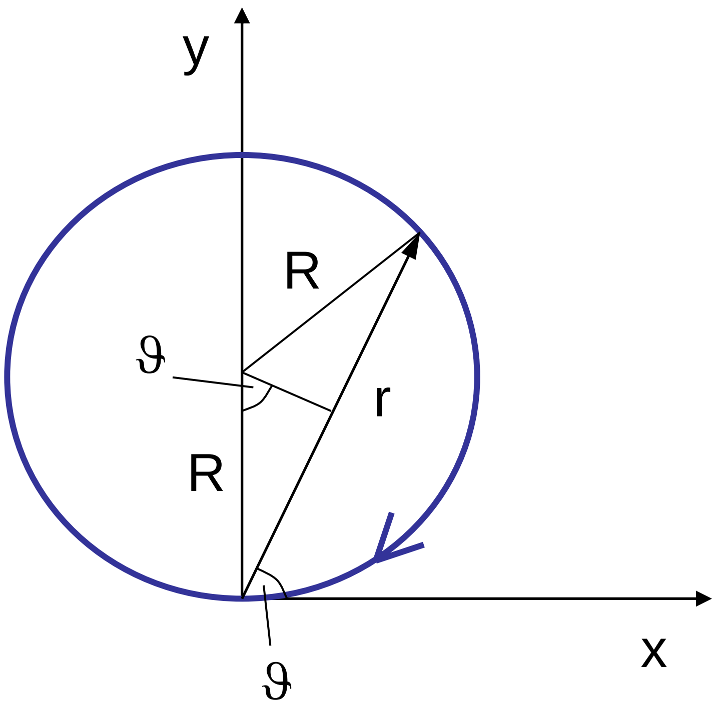
$$w = \frac{Q}{2\pi}\left[ln(z+\delta) - ln(z-\delta)\right]$$

$$\bar{c} = \frac{Q}{2\pi}\left[\frac{1}{z+\delta} - \frac{1}{z-\delta}\right]$$

$$\bar{c} = \frac{Q}{2\pi}\frac{z-\delta-(z+\delta)}{z^2-\delta^2}$$

$$\boxed{w = \frac{M}{z}} \qquad \bar{c} = -\frac{M}{z^2} \quad \xleftarrow{\delta \to 0, \quad Q \to \infty} \quad \bar{c} = -\frac{Q\delta}{\pi}\frac{1}{z^2-\delta^2}$$

# Dipólus




$$w = \frac{M}{z} = \frac{M}{r\,e^{i\vartheta}} = \frac{M}{r}\left(\cos\vartheta - i\sin\vartheta\right)$$

$$\psi = -\frac{M}{r}\sin\vartheta = \text{const.}$$

$$r = -\frac{M}{\psi}\sin\vartheta$$

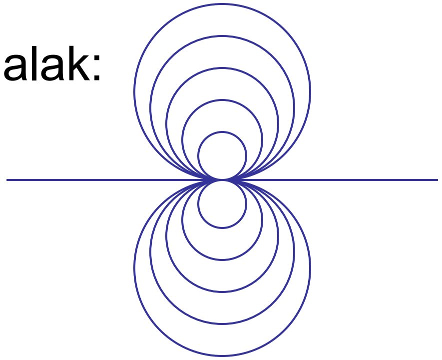
Egy x tengelyt érintő kör egyenlete:

$$r = 2R\sin\vartheta$$

tehát az áramvonalak R sugarú körök:

$$2R = -\frac{M}{\psi} \longrightarrow R = -\frac{M}{2\psi}$$

Az áramvonalak:



# Henger körüli áramlás

$$\boxed{w = c_\infty z + \frac{M}{z}}$$

$c_\infty$ valós szám

$$w = c_\infty r\, e^{i\vartheta} + \frac{M}{r} e^{-i\vartheta} = c_\infty r\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right) + \frac{M}{r}\left(\cos\vartheta - i\sin\vartheta\right)$$

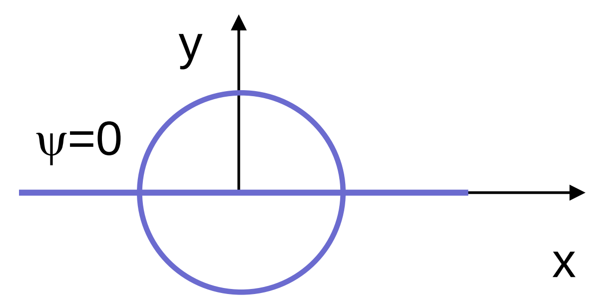
$$\psi = \left(c_\infty r - \frac{M}{r}\right)\sin\vartheta$$

Milyen alakú a $\psi$=0 áramvonal?

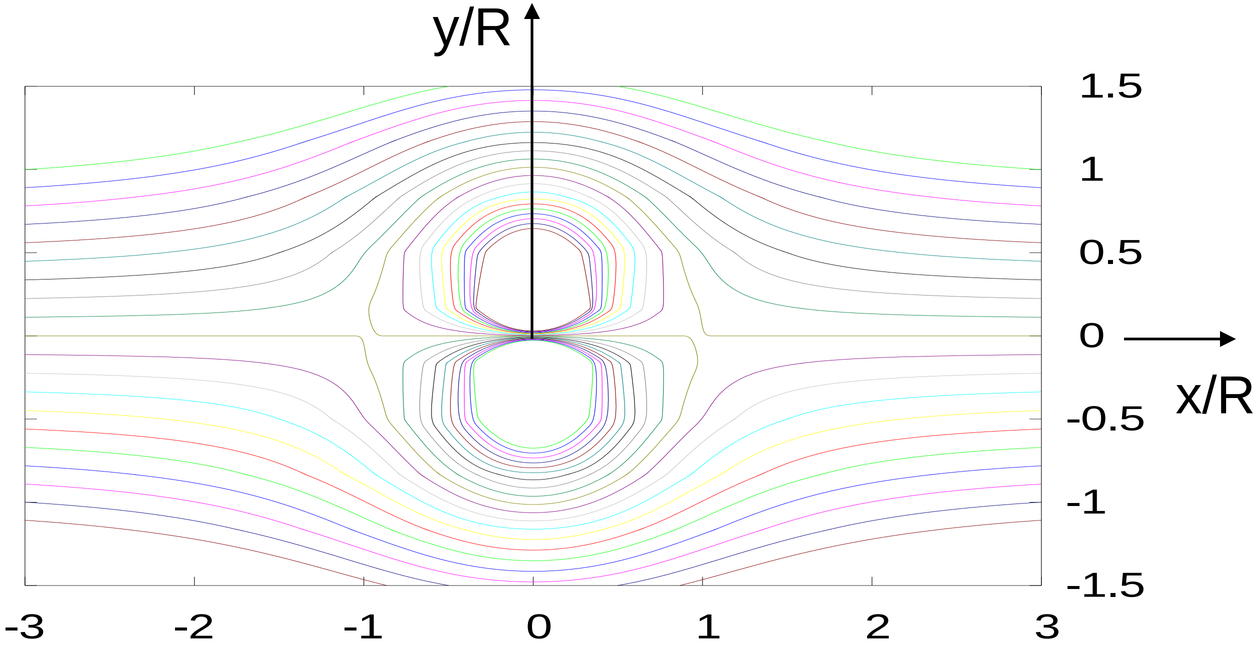
ha a zárójeles tényező 0: $c_\infty R - \dfrac{M}{R} = 0$

ha sin$\vartheta$=0, akkor $\vartheta$ = 0, $\pi$...

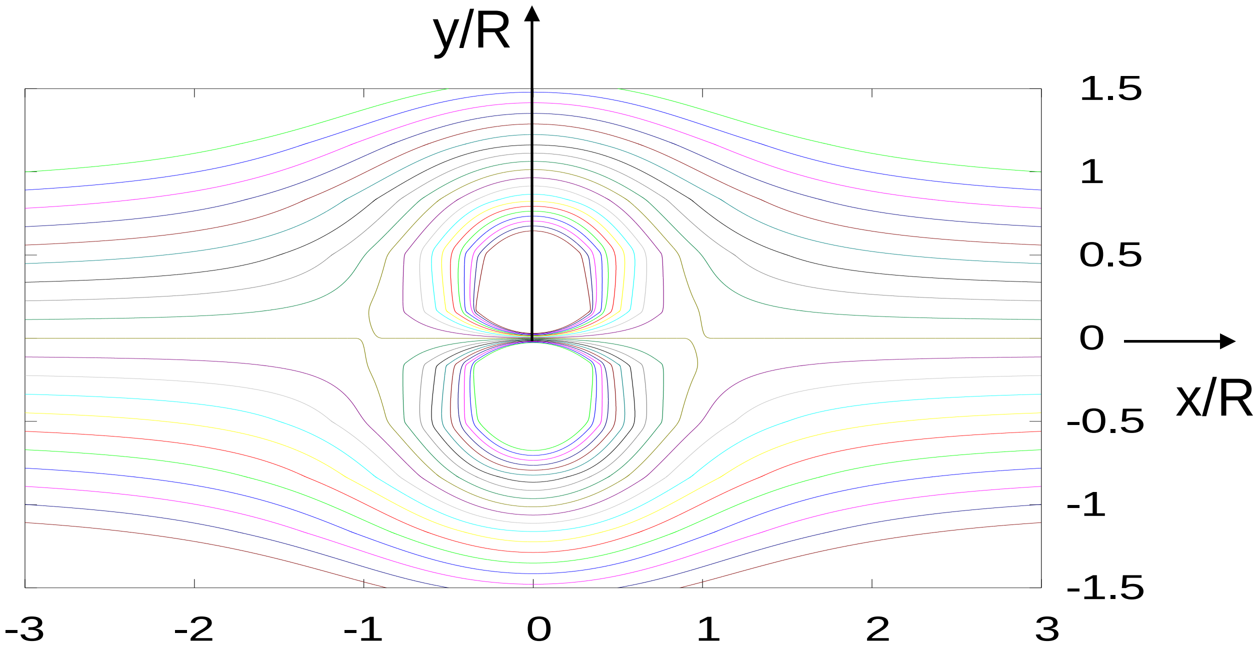
$$\boxed{w = c_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right)} \longleftarrow \frac{M}{c_\infty} = R^2$$



# Henger körüli áramlás



# Henger körüli áramlás




$$w = c_\infty \left( z + \frac{R^2}{z} \right) \longrightarrow \bar{c} = c_\infty \left( 1 - \frac{R^2}{z^2} \right)$$

$$\bar{c}\Big|_{r=R} = c_\infty \left( 1 - \frac{R^2}{R^2} e^{-2i\vartheta} \right) = c_\infty \left( 1 - \cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta \right)$$

# Henger körüli áramlás

$$\bar{c}\Big|_{r=R} = c_\infty \left(1 - \cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta\right)$$

$$|c|^2_{r=R} = \left(c\,\bar{c}\right)_{r=R} = c_\infty^2 \left[\left(1 - \cos 2\vartheta\right)^2 + \sin^2 2\vartheta\right]$$

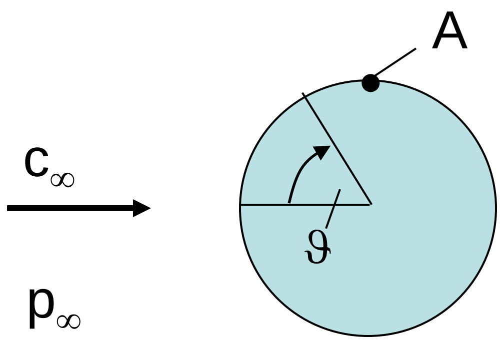
$$|c|^2_{r=R} = c_\infty^2 \left[1 - 2\cos 2\vartheta + \underbrace{\cos^2 2\vartheta + \sin^2 2\vartheta}_{1}\right]$$

$$|c|^2_{r=R} = 2c_\infty^2 \left[1 - \cos 2\vartheta\right]$$

$$|c|^2_{r=R} = 2c_\infty^2 \left[\underbrace{\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta}_{1} - \left(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta\right)\right]$$

$$|c|^2_{r=R} = 4c_\infty^2 \sin^2 \vartheta \longrightarrow |c|_{r=R} = 2c_\infty \left|\sin \vartheta\right|$$

# Henger körüli áramlás



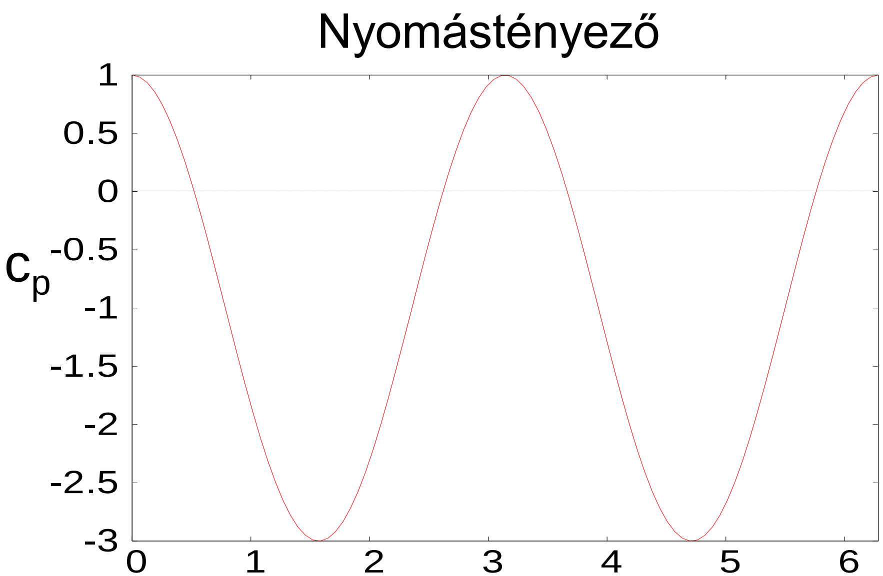

Maximális sebesség:

$$c_A = 2c_\infty$$

Nyomásmegoszlás:

$$p_\infty + \frac{\rho}{2}c_\infty^2 = p + \frac{\rho}{2}\left|c\right|^2$$

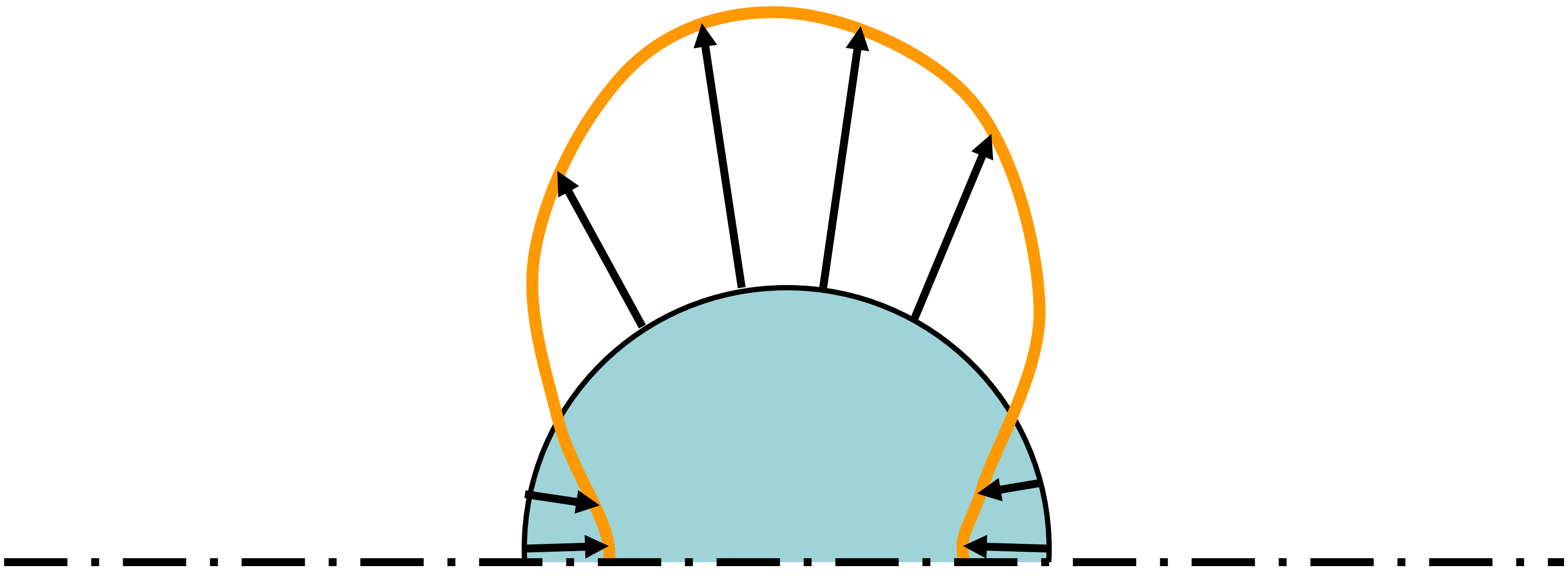
$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2}c_\infty^2} = \frac{\frac{\rho}{2}c_\infty^2 - \frac{\rho}{2}\left|c\right|^2}{\frac{\rho}{2}c_\infty^2}$$




$$c_p = 1 - 4\sin^2\vartheta$$

$$c_p = 1 - \left(\frac{\left|c\right|}{c_\infty}\right)^2$$

# Henger körüli áramlás

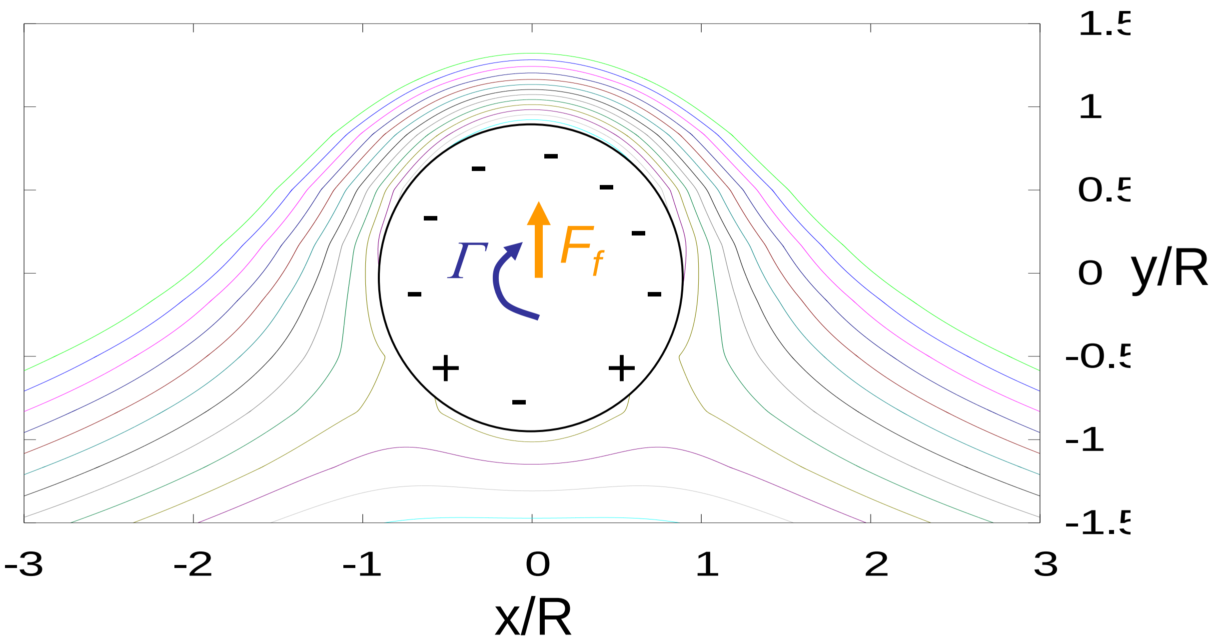


A legtöbb mozgó járműre felhajtóerő hat.

# Flettner rotor

$$w = c_\infty \left( z + \frac{R^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

$$\frac{\Gamma}{c_\infty 2R\pi} = 1.6$$

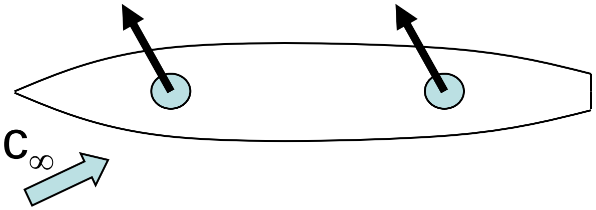


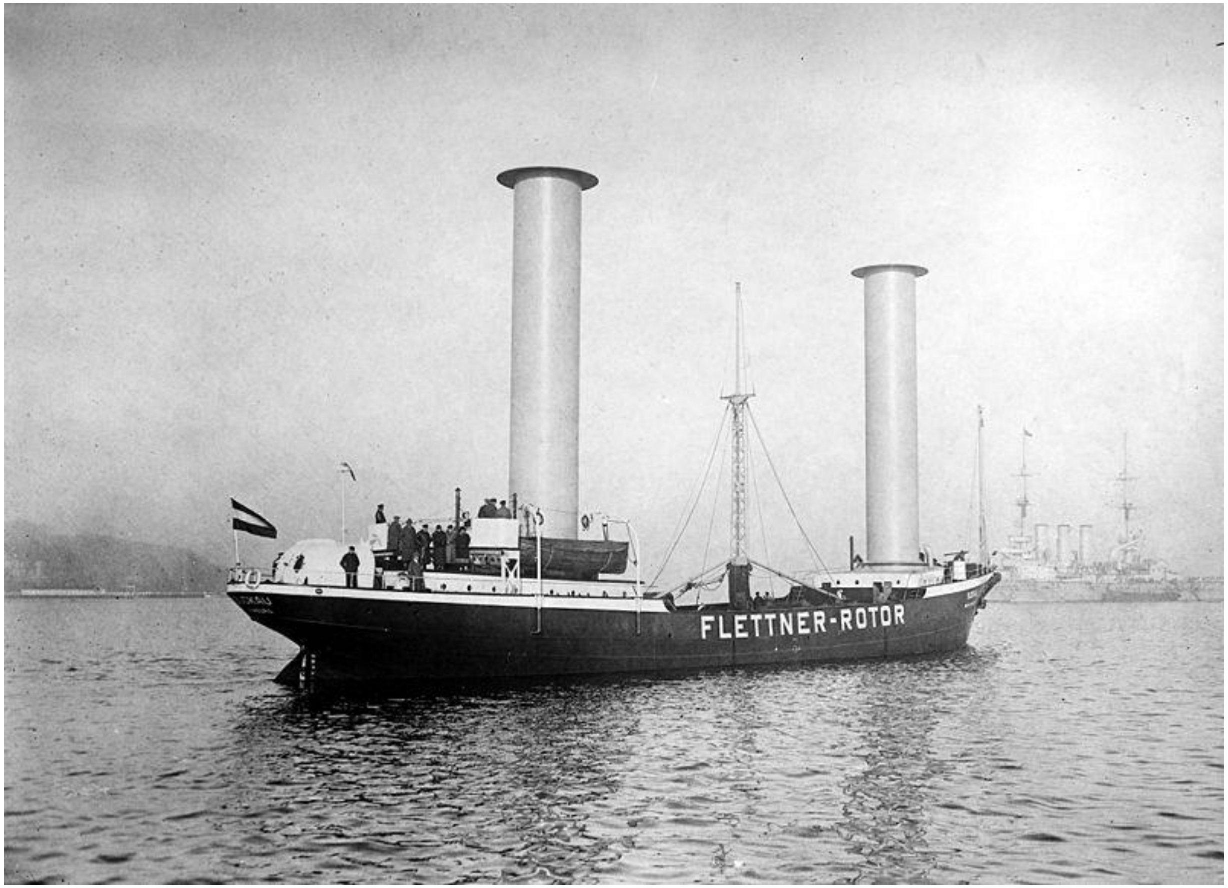

Mindkét torlópont eltolódik lefelé.
A cirkulációval arányos felhajtóerő keletkezik.

# Magnus-hatás

Kutta-Zsukovszkij tétel:

$$F_f\left[\frac{N}{m}\right]=\rho\, c_\infty \Gamma$$




[http://hu.wikipedia.org/wiki/Magnus-effektus]