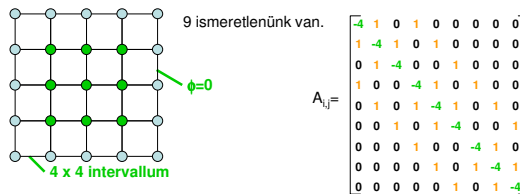


Az áramlási problémák diszkrétizálásával kapott algebrai egyenletrendszer megoldása

Dr. Kristóf Gergely
2008.11.21.

Mátrixos alakban

$$\phi_S + \phi_W - 4\phi_P + \phi_E + \phi_N = h^2 Q_P$$



Az egyenletrendszer mátrixos alakban:

$$A_{i,j} \phi_j = Q_i$$

Pl. 101 x 101 es háló esetén az ismeretlenek száma $N=10^4$, **A** elemeinek száma pedig 10^8 .

A Poisson-egyenletet minden időlépésnél meg kell oldani...

Ezt a feladatot nem tudjuk elkerülni inkompresszibilis áramlások esetén.

Ψ - ω módszer esetében: $\Delta \psi = -\omega \longrightarrow \psi$

Nyomásalapú megoldók esetében: $\Delta P = \nabla \cdot \underline{f} \longrightarrow P$

Gauss-elimináció

Általános mátrix esetében épp olyan jó, mint bármilyen más módszer, viszont a mátrix kedvező tulajdonságait nem használja ki.

1. lépés Elimináció:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{Az első sor } A_{2,1}/A_{1,1}\text{-szeresét} \\ \text{kivonjuk a második sorból, így ott} \\ \text{az első elem 0 lesz.} \\ \text{Ugyanez minden további sorra.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Minden további} \\ \text{oszlopra az} \\ \text{N-1-edik} \\ \text{oszlopig.} \end{array}$$

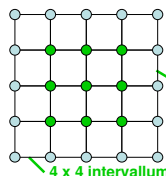
2. lépés Visszahelyettesítés:

$$\begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} \\ 0 & 0 & U_{3,3} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \phi_n = \frac{Q_n}{U_{nn}} \\ Q_i - \sum_{k=i+1}^N U_{k,i} \phi_k \\ \phi_i = \frac{Q_i - \sum_{k=i+1}^N U_{k,i} \phi_k}{U_{i,i}} \end{array}$$

A műveletigény $N^3/3$, de ebből a visszahelyettesítés csak $N^2/2$.
Hiába ritka A mátrix, az U mátrix már nem ritka. Memóriaigény 101 x 101 es hálón kb. 400 Mb. Továbbá: **Nem is szükséges nagyon pontos megoldás, mert a diszkrétizációs hiba jelentős.**

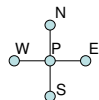
Egyszerű 2D példa

A számítási tartomány:



$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = Q$$

Diszkrétizáljuk véges differenciák módszerével:



$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} \right) + \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y} - \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y} \right) = Q_P$$

Pl: $\Delta x = \Delta y = h$ esetén: $\phi_S + \phi_W - 4\phi_P + \phi_E + \phi_N = h^2 Q_P$

Iteratív módszerek

A megoldást lépésenként finomítjuk. ϕ közelítése az n-edik lépésben ϕ^n .

Elhagyva a vektorindexeket: $A \phi^n = Q - \rho^n$ **ρ^n : reziduum**

A hiba: $\varepsilon^n = \phi - \phi^n$

$A \varepsilon^n = A(\phi - \phi^n) = Q - (Q - \rho^n) = \rho^n$ Tehát a hibára az eredetivel azonos mátrixú egyenletrendszer kell megoldani.

Iteratív módszerek: $M \phi^{n+1} = N \phi^n + Q$

Bekonvergált megoldásra: $\phi^{n+1} = \phi^n = \phi$, ezért: $A = M - N$

Mindkét oldalból vonjunk le $M\phi^n$ -et:

$$M(\phi^{n+1} - \phi^n) = N\phi^n + Q - M\phi^n = Q - A\phi^n = \rho^n$$

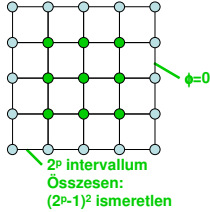
korrekció: δ^n $M \delta^n = \rho^n$ Korrekciós egyenlet.

Minél jobban közelíti M az A mátrixot, annál gyorsabban konvergál.
M lehet pl. diagonál, triagonál, vagy Δ mátrix. **δ -nak sem kell pontosnak lenni...**

Jacobi-iteráció

$$\phi_S^n + \phi_W^n - 4\phi_P^{n+1} + \phi_E^n + \phi_N^n = h^2 Q_P \quad \text{M diagonál mátrix lesz.}$$

$$\phi_P^{n+1} = \frac{1}{4} (\phi_S^n + \phi_W^n + \phi_E^n + \phi_N^n - h^2 Q_P)$$



Példaprogram:

- A program...
- Az eredmény jellege...
- Szükséges iterációs szám...

Multigrid módszer

Vegyük például egy egyszerű egydimenziós feladatot:

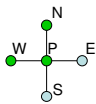
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = Q$$

$$\frac{1}{\Delta x^2} (\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}) = Q_i$$

$$\frac{1}{\Delta x^2} (\phi_{i-1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i+1}^n) = Q_i - \rho_i^n$$

$$\frac{1}{\Delta x^2} (\varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i+1}^n) = \rho_i^n$$

Gauss-Seidel iteráció



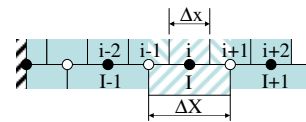
$$\phi_S^n + \phi_W^{n+1} - 4\phi_P^{n+1} + \phi_E^n + \phi_N^{n+1} = h^2 Q_P \quad \text{M } \Delta \text{ mátrix lesz.}$$

ezeket már ismerjük a számítási sorrend miatt (lexikografikus séma)

$$\phi_P^{n+1} = \frac{1}{4} (\phi_S^n + \phi_W^{n+1} + \phi_E^n + \phi_N^{n+1} - h^2 Q_P)$$

- Fele annyi iterációt igényel
- Nem kell új tömb a változóknak
- A hiba aszimmetrikus.

Elhagyjuk az iterációs indexet: $\frac{1}{\Delta x^2} (\varepsilon_{i-1} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}) = \rho_i$



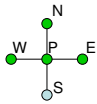
$$\frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{i-2} - \varepsilon_{i-1} + \frac{1}{2} \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} + \frac{1}{2} \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} + \frac{1}{2} \varepsilon_{i+2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \rho_{i-1} + \rho_i + \frac{1}{2} \rho_{i+1}$$

$$\frac{1}{4\Delta x^2} (\varepsilon_{i-2} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i+2}) = \frac{1}{4} (\rho_{i-1} + 2\rho_i + \rho_{i+1})$$

$$\frac{1}{\Delta x^2} (\delta_{i-2} - 2\delta_i + \delta_{i+2}) = \rho_i \quad \text{restrikciós séma (2D és 3D esetekben közelítő jellegű, ezért jelöljük } \delta\text{-val.)}$$

Vonalrelaxáció



$$\phi_S^n + \phi_W^{n+1} - 4\phi_P^{n+1} + \phi_E^n + \phi_N^{n+1} = h^2 Q_P$$

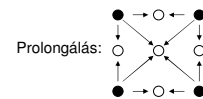
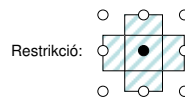
ezt már ismerjük ezeket egyszerre határozzuk meg Thomas algoritmus segítségével.

Ugyancsak triadiagonál megoldóra épül az ADI (más néven operator splitting) módszer, ami ennél sokkal hatékonyabb megoldást tesz lehetővé.

Probléma:

Az eddigi módszerek csak simitának, ezért a peremek hatása nagyon lassan terjed be a finom hálókön. → Durvább rácsokat is használni kell. A korrekciós egyenletet kell durvább rácsra levinni, mert ezt pontatlanul (nagyobb relatív hibával) is megoldhatjuk.

Általánosítás 2D esetre:



1. ρ_i restrikciója $\rightarrow \rho_i$
2. δ_i számítása $\frac{1}{4}$ annyi ismeretlen meghatározása (és $\frac{1}{4}$ annyi iteráció). Az időigény szinte elhanyagolható.
3. δ_i prolongálása a finom rácsra (δ_i), majd egy simítás a finom rácscon.

Miért ne mennénk le még durvább rácsokra?

1. Reziduumok kiszámítása a legfinomabb rácscon
2. Reziduumok restrikciója minden durvább rácsra
3. Egyenletrendszer megoldása a legdurvább rácscon
4. Minden finomabb rácsra:
 - Korrekció prolongálása
 - Utósimítás

A megoldás műveletigénye

Szükséges iterációk száma 2D-ben:

p	Nsor	N	Jacobi	G-S	Vonalrelax	Multigrid
3	7	49	40	20	10	13
4	15	225	160	80	40	33
5	31	961	640	320	160	59
6	63	3969	2560	1280	640	75
7	127	16129	10240	5120	2560	79

Műveletigény / N:

p	Nsor	N	Jacobi	G-S	Vonalrelax	Multigrid
3	7	49	200	100	50	260
4	15	225	800	400	200	660
5	31	961	3200	1600	800	1180
6	63	3969	12800	6400	3200	1500
7	127	16129	51200	25600	12800	1580

↓
finom háló