

I. előadás

Dr. Balogh Miklós

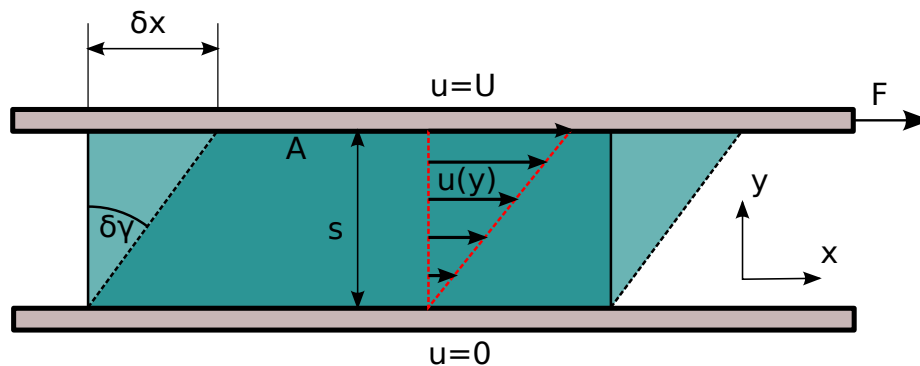
2015. szeptember 23.

Mi az áramlástan?

Áramló közegek mechanikájával (dinamikájával) foglalkozó tudományterület. A gépészetben áramlástanak, a járműiparban aerodinamikának, a fizikában hidrodinamikának, a meteorológiában dinamikus meteorológiának nevezik. Az angol terminológiában „Fluid mechanics” vagy „Fluid dynamics” néven találkozhatunk vele. Áramló közegek:

- Folyadékok: Kis mértékben összenyomható (nagy sűrűségű), nem alaktartó, de térfogattartó közegek, melyekben a molekulák közti összetartó (kohéziós) erő dominál. Felveszik az edény alakját. Tetszőleges mértékben deformálhatók az anyagszerkezet sérülése nélkül. Az amorf anyagokat (pl. üveg, teflon) is a folyadékok közé szokták sorolni.
- Gázok: Nagyobb mértékben összenyomható (kis sűrűségű) közegek, amelyek kitöltik a rendelkezésre álló teret. A részecskék egymástól távol vannak, ideális esetben a köztük lévő vonzó és taszító erők elhanyagolhatók. Nem állnak ellent a deformációnak, habár van viszkozitásuk.

Folyadékok és gázok viszkozitása, Newton viszkozitási törvénye



1. ábra. Newton viszkozitási törvényének szemléltetése

A fenti ábrán két egymástól s kicsiny távolságra lévő, a kék színnel jelölt folyadékkal elválasztott síkklapot látunk. Az alsó síkklap áll, a felsőt F erővel mozgatjuk a pozitív x irányban, aminek hatására U sebességre tesz szert. A tapadás törvényének értelmében a folyadék a nedvesített felületekkel együtt mozog, azaz sebessége megegyezik a határfelületek sebességével. Koordináta rendszerünket az alsó síkklaphoz rögzítve a sebesség $u = 0$, ha $y = 0$, és $u = U$, ha $y = s$. A folyadék belsejében egyenletes (lineáris) sebességmegoszlást feltételezünk. Látható, hogy a folyadék δt idő elteltével $\delta \gamma$ szögdeformációt szenved, amely arányos a felső síkklap felületén ható erővel, illetve annak egyensúlyi sebességével. A deformáció sebesség arányos tehát a

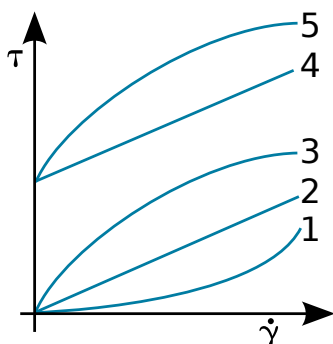
felületen ható erő, illetve a sebesség y -irányú megváltozásával:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial u(y)}{\partial y} \sim \frac{F}{A}.$$

Definiáljuk a csúsztatófeszültséget (nyírófeszültséget) $\tau = F/A$, és vezessük be a folyadék anyagi minőségét (belső súrlódását) jellemző μ $[N \cdot s \cdot m^{-2} = Pa \cdot s]$ arányossági tényezőt, azaz a dinamikai viszkozitást:

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \mu \frac{\partial u(y)}{\partial y}$$

A fenti összefüggést nevezzük Newton viszkozitási törvényének. Azokat a folyadékokat, amelyekre ez igaz (a legtöbb általunk tárgyalt folyadékra igaz lesz) newtoni folyadékoknak nevezzük, nem-newtoni folyadékoknak azokat, amelyekre ez a törvény nem érvényes (pl. olajfesték, diszperzit, kukoricakeményítő-víz keverék). Az alábbi ábrán a csúsztatófeszültség alakulását láthatjuk a deformációsebesség ($\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t}$) függvényében, különböző folyadékokra.



2. ábra. Különböző típusú folyadékokban a nyírófeszültség függése a sebességgradienstől. 1 – dilatáló folyadék, 2 – Newtoni folyadék, 3 – Pszeudoplasztikus folyadék, 4 – Bingham folyadék, 5 – plasztikus folyadék (forrás: Wikipédia).

A következő táblázat a folyadékok és gázok viszkozitásának és hőmérsékletének kapcsolatát szemlélteti, illetve rámutat a viszkozitás változását okozó fizikai jelenségekre.

T	μ folyadék	μ gáz	Fizikai jelenség
nő	csökken	nő	Hőmozgás intenzitása nő. Folyadékokban a molekulák közti átlagos távolság nő és így a kohéziós erő csökken. Gázokban a molekulák sebessége és így az ütközések gyakorisága is nő.
csökken	nő	csökken	Hőmozgás intenzitása csökken. Folyadékokban a molekulák közti átlagos távolság csökken és így a kohéziós erő nő. Gázokban a molekulák sebessége és így az ütközések gyakorisága is csökken.

1. táblázat. A viszkozitás függése a hőmérséklettől

Az áramlásban gyakran használjuk a dinamikus viszkozitás és a sűrűség hányadosaként definiált kinematikai viszkozitást ($\nu = \mu/\rho$ $[m^2 \cdot s^{-1}]$).

Áramlások leírása

Az áramlástanban vizsgált közegek tulajdonságait skalár és vektormennyiségekkel jellemezzük. A alap skálarmennyiségek rendre a sűrűség ρ [kg m^{-3}], a nyomás p [$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$], és a hőmérséklet T [K], míg az alap vektormennyiségek rendre a térkoordináták \mathbf{x} [m] vagy azok helyvektora \mathbf{r} [m], illetve a sebesség \mathbf{v} [m s^{-1}]. A felsorolt változókat függvény alakban is írhatjuk, amely függ a leírás módjától. Euler- illetve Lagrange-féle leírasmódot alkalmazhatunk, amelyek között a lényeges különbség a vonatkoztatási rendszer megválasztása. Az Euler-féle leírasmód esetén a vonatkoztatási rendszer térben rögzített, míg a Lagrange féle leírasmód esetén a vonatkoztatási rendszer az áramló közeg egy kiválasztott eleméhez kötött. Ez Lagrange-féle leírasmódnál a folyadék rész helyzetét, sebességét illetve gyorsulását a következőképp adhatjuk meg a kiválasztott folyadék rész kiindulási helyzete ($\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t=0)$) alapján:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t} \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Az Euler-féle leírasmód esetén tetszőleges skalár ($\phi = \rho$, vagy $\phi = p$, vagy $\phi = T$) leírása térben és időben a következőképp adható meg:

$$\phi = \phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) = \phi(x, y, z, t).$$

A vektormennyiségek három skalárkomponenssel írhatók le, azaz:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} v_x(x, y, z, t) \\ v_y(x, y, z, t) \\ v_z(x, y, z, t) \end{bmatrix}.$$

Ha az áramlási tér időben nem változik, akkor azt stacionáriusnak nevezzük. Ebben az esetben a mennyiségeket tisztán a térkoordináták függvényében fejezzük ki:

$$\phi = \phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{x}) = \phi(x, y, z)$$

és

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(x, y, z) = \begin{bmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{bmatrix}.$$

A koordináta rendszer helyes megválasztásával elérhető, hogy az áramlási tér stacionárius jelleget öltön. Vegyünk például egy egyenes sebességgel, egyenes vonalban szálló repülőgépet. A külső szemlélő úgy látja, hogy a repülőgép áthalad a vizsgált térrészen, ahol az áramlás időben változó lesz a gép által keltett zavarás hatására. A pilóta szemszögéből viszont a repülőgép körüli áramlás nem változik, azaz stacionáriusnak tekinthető. Az áramlások leírása tovább egyszerűsíthető, ha az áramló közeg sűrűségének időbeli és térbeli változását elhanyagoljuk, azaz:

$$\rho \neq f(x, y, z, t) \implies \rho = \text{konstans}$$

Ez folyadékok esetén csaknem mindig megtehető, és gázok esetén sem követünk el nagy hibát, ha ezt a közelítést alkalmazzuk kis áramlási sebességek mellett.

Az áramlások leírásánál a következő fontos definíciókat fogalmazhatjuk meg:

- pálya (track) – adott folyadék rész egymást követő pillanatokban elfoglalt helyeit összekötő görbe.
- áramvonal (streamline) – olyan görbe, amelyet egy adott pillanatban a \mathbf{v} sebességvektor minden pontjában érint: $\mathbf{v} \times d\mathbf{s} = 0$.
- nyomvonal (pathline) – a tér egy adott \mathbf{x} pontján egymás után áthaladó folyadék részeket egy adott időpillanatban összekötő görbe.

Fontos megjegyezni, hogy stacionárius áramlás esetén az áramvonal, a pálya, és a nyomvonal egybeesik!

Ideális és valódi közegek

Az alábbi táblázatban foglaljuk össze az áramlások leírását megkönnyítő egyszerűsítéseket, illetve az ideális és valódi közegek jellemzőit. Az áramlások leírása során gyakran tekintjük ideálisnak az áramló közeget.

Tulajdonság	Valódi közeg	Ideális közeg
Anyagszerkezet	molekuláris	kontínuum
Összenyomhatóság	összenyomható	összenyomhatatlan
Súrlódás	van	nincs (elhanyagolható)

2. táblázat. Az ideális és valódi közegek tulajdonságai

Gázok esetén kapcsolatot teremthetünk a skalármennyiségek között, csökkentve az ismeretlenek számát, ha alkalmazzuk az ideális gáztörvény áramlástanban használt, egységnyi térfogatra vonatkoztatott alakját (legtöbbször pusztán csak gáztörvényként fogunk hivatkozni rá), amelyben R a specifikus gázállandót jelöli:

$$p = \rho RT.$$

A gáztörvény általános alakja az univerzális gázállandóval (R^*) és a mólszámmal (n) kifejezve, korábbi tanulmányainknak megfelelően:

$$pV = nR^*T.$$

A gáztörvény Könnyen levezethető az általános alakból, mivel a specifikus gázállandó és a sűrűség könnyen kifejezhető a mólszámmal, a móltömeggel és az univerzális gázállandóval:

$$R = \frac{R^*}{M}, \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{nM}{V} \implies p = \frac{n}{V}R^*T = \frac{nM}{V}RT = \rho RT.$$

Matematikai alapok - műveletek

Az alábbi matematikai jelölések és műveletek nagyon fontosak az áramlások leírásánál és modellezésénél.

Parciális deriváltak

Mivel ez egyes mennyiségek mind a térkoordináták, mind pedig az idő függvényében változhatnak, fontos bevezetni a parciális (részleges) deriváltat. Ez nem más, mint egy többváltozós függvény adott függő változó szerinti deriváltja, azaz a mi esetünkben a részleges megváltozás hely és idő szerint.

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \rightarrow \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t}, \frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\}$$

Az időbeli változást lokális megváltozásnak, míg a térbeli változást konvektív megváltozásnak is nevezzük.

A gradiens operátor

A gradiens operátor bevezetéséhez tekintsük az alábbi ábrán szereplő hőmérséklet megoszlást, amely egy tanterem hőmérsékleti térképét mutatja adott z magasságban (pl. a padló felett 2 méterrel). A hőmérséklet állandó értékeit összekötő szintvonalakat (izotermákat) folytonos vonallal jelöltük. Az állandó x és y értékű metszési vonalakat szaggatott vonallal jelöltük, és ezek metszéspontjában vettük fel az A pontot. A metszetek hőmérséklet megoszlását piros folytonos görbékkel ábráztuk, jelölve a függvény A pontban felvett érintőit, amelyek rendre α_x és α_y szöveget zárnak be a vízszintessel. A parciális deriváltakat a következőképp írhatjuk:

$$\frac{\partial T(x_A, y_A)}{\partial x} = \tan \alpha_x, \quad \text{és} \quad \frac{\partial T(x_A, y_A)}{\partial y} = \tan \alpha_y$$

A gradiens ebben az esetben a következőképp írható, ahol ∇ a gradiens differenciáloperátort jelöli:

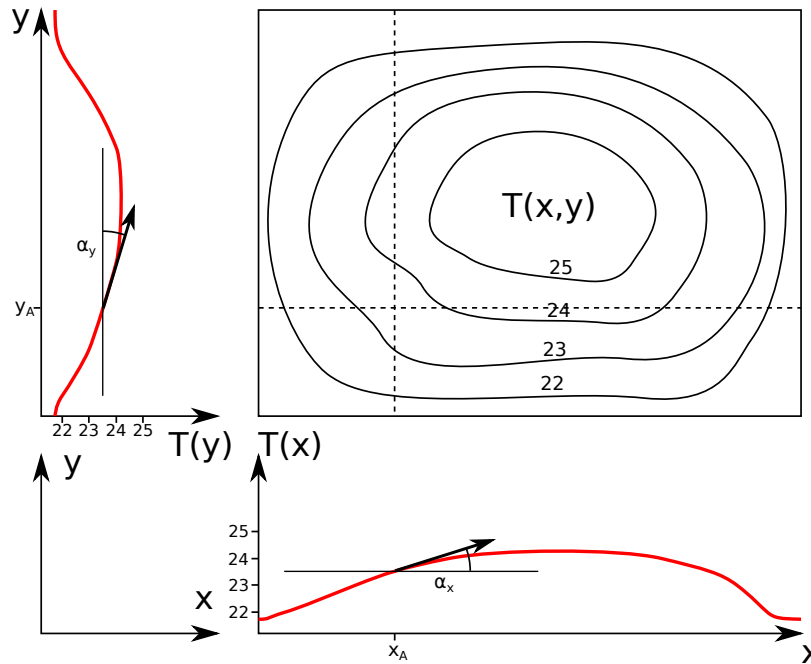
$$\text{grad}T(x, y) = \nabla T(x, y) = i \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + j \frac{\partial T(x, y)}{\partial y}$$

Ha kiterjesztjük a vizsgálatot 3-dimenzióra ($T(x, y, z)$) akkor a gradiens:

$$\text{grad}T(x, y, z) = \nabla T(x, y, z) = i \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x} + j \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial y} + k \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z}$$

Vektor formában írva:

$$\nabla T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix}.$$



3. ábra. Tanterem hőmérséklet megoszlása a $z = 2\text{m}$ -es vízszintes metszetben. A szaggatott vonalak az A ponton átmenő állandó x és y értékű metszeteket jelölik.

Látjuk, hogy a gradiens operátor egy skalár térből vektortérbe képező differenciáloperátor. Ugyanígy könnyen belátható, hogy ha vektorra alkalmazzuk, akkor a művelet tenzort eredményez:

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

A gradiens segítségével meghatározható két egymáshoz közel eső pont közötti hőmérséklet különbség (ΔT), ha a gradiens állandó a két pont között, mert a távolság, vagyis Δs vektor végtelenül, azaz infinitezimálisan kicsi. A különbség a gradiens és az útelem vektor skaláris szorzataként fejezhető ki:

$$\Delta T = \nabla T \cdot ds = |\nabla T| |\Delta s| \cos \beta.$$

Ebből a gradiens 4 fontos tulajdonsága vezethető le:

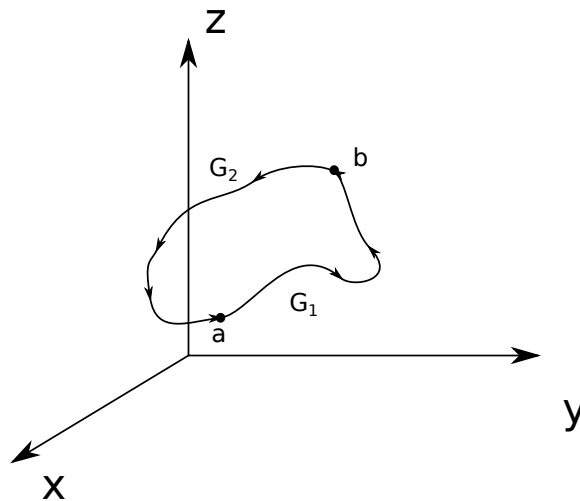
- $\Delta T = 0 \rightarrow \cos \beta = 90^\circ$, azaz $\text{grad}T$ merőleges a szintvonalakra.
- $\Delta T = \text{max.} \rightarrow \cos \beta = 0^\circ$, azaz $\text{grad}T$ párhuzamos a legrohamosabb változással.
- $\text{grad}T$ a növekedés irányába mutat.
- $\text{grad}T$ nagysága arányos a növekedés mértékével.

Amennyiben a gradiens változik, a meghatározás a gradiens vonal menti integrálásával történik (pl. Gellért hegy szintvonalas térképe). Ebből következik az 5. fontos tulajdonság, miszerint a függvény gradiensének vonal menti integrálja a és b között, a függvény behelyettesítési értékeinek a különbsége b és a pontban:

$$\Delta \phi = \int_a^b \nabla T ds = \phi_b - \phi_a.$$

Potenciális sebességtér

Potenciális áramlás esetén létezik egy $\phi = \phi(x, y, z)$ skalártér (sebességpotenciál), amelyre igaz, hogy $v = \nabla \phi$. Az alábbi ábrán látható a és b pontok között számoljuk ki a sebesség vonal menti integrálját G_1 és G_2 görbéken, potenciális sebességtér esetén!



4. ábra. Potenciális sebességtér vonal menti integrálása.

Végezzük el az integrálás szakaszonként:

$$\int_{G_1} v ds = \int_a^b v ds = \int_a^b \nabla \phi ds = \phi_b - \phi_a,$$

$$\int_{G_2} v ds = \int_b^a v ds = \int_a^b \nabla \phi ds = \phi_a - \phi_b,$$

majd az egész görbére:

$$\int_{G_1+G_2} \mathbf{v} ds = \int_{G_1} \mathbf{v} ds + \int_{G_2} \mathbf{v} ds = \phi_b - \phi_a + \phi_a - \phi_b = 0!$$

Definiáljuk a cirkulációt, mint a sebesség zárt görbe mentén vett integrálját:

$$\Gamma = \oint_G \mathbf{v} ds$$

A fentiekből következik, hogy potenciális áramlás esetén a cirkuláció zérus, azaz a potenciális áramlások cirkulációmentesek.