



Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

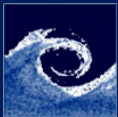
Belépő

Turbulencia és modellezése II.

Balogh Miklós

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Áramlástan Tanszék

2017.



A turbulencia sok léptéke

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

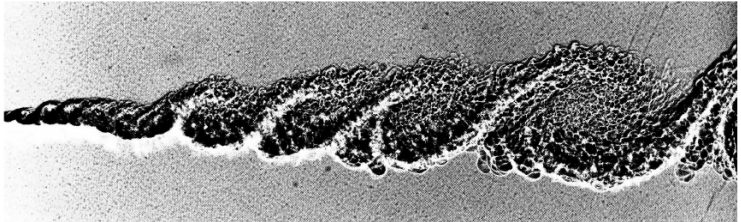
Transzport

Modellezés

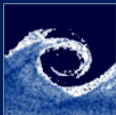
Peremfeltétel

Belépő

A turbulencia különböző skálái egy keveredési rétegben sűrűség változással láthatóvá téve



Cél: Találjunk összefüggést a különböző léptékű turbulencia tulajdonságainak leírására



Mozgási (kinetikus) energia

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

Mozgási energia:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} u_i u_i \quad (1)$$

A Reynolds felbontása:

$$E = \frac{1}{2} u_i u_i = \frac{1}{2} (\overline{u_i u_i} + 2u'_i \overline{u_i} + u'_i u'_i) \quad (2)$$

A Reynolds átlaga:

$$\overline{E} = \underbrace{\frac{1}{2} (\overline{u_i u_i})}_{\hat{E}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\overline{u'_i u'_i})}_k = \hat{E} + k \quad (3)$$

- Az átlagos áramlás mozgási energiája: \hat{E}
- A turbulencia mozgási energiája: k (Turbulens Kinetikus Energia, TKE)



A Richardson-féle energia kaszkád

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

Lewis Fry Richardson verse
(1920):

*„Big whirls have little whirls,
that feed on their velocity;
and little whirls have lesser whirls,
and so on to viscosity.”*

*„Nagy örvény kisebbet plántál,
melyet sebességével táplál;
majd az még kisebbet szülvén,
viszkózitásba tűnik szürkén.”*





Richardson-féle energia kaszkád

Az örvények mérete

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

Magas Re számú áramlást tekintünk

- Az áramlás tipikus sebessége U
- Az áramlás tipikus hosszléptéke \mathcal{L}
- A vonatkozó Reynolds szám ($Re = \frac{U\mathcal{L}}{\nu}$) nagy

A turbulencia különböző méretű örvényekből áll

Az örvények minden osztályának van:

- hosszléptéke: l
- sebesség léptéke: $u(l)$
- idő léptéke: $\tau(l) = l/u(l)$



A Richardson energia kaszkád

A nagy léptékek

Turbulencia II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

Legnagyobb örvények jellemzői

- méret $l_0 \sim \mathcal{L}$
- sebesség $u_0 = u_0(l_0) \sim u' = \sqrt{2/3k} \sim \mathcal{U}$

$\Rightarrow Re = \frac{u_0 l_0}{\nu}$ szintén magas

A nagy örvények darabolódása

- A nagy Re szám kis mértékű viszkózus stabilizációt jelent
- A nagy örvények instabilak
- A nagy örvények kisebbekre esnek szét



A Richardson energia kaszkád

A kis léptékek felé

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

Tehetetlenségi kaszkád

- Amíg $Re(l)$ nagy a tehetetlenségi erők dominálnak és a darabolódás folytatódik
- Kis léptékeken, ahol $Re(l) \sim 1$ a viszkozitás kezd fontossá válni
 - Az örvények mozgási energiája hővé disszipál



A Richardson energia kaszkád

A kis és a nagy méretek közötti kapcsolat

Turbulencia II.

Balogh Miklós

Léptékek

Transzport

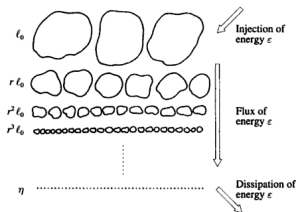
Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

A disszipáció megegyezik a produkcióval

- A disszipációt ε -al jelöljük
- A kaszkád miatt a nagy léptéken lévő mozgásokkal jellemezhető
- Disszipáció: $\varepsilon \sim \frac{\text{mozg. energia}}{\text{időlépték}}$ a nagy léptékeken
 - Képlettel: $\varepsilon = \frac{u_0^2}{l_0/u_0} = \frac{u_0^3}{l_0}$





k transport egyenlete

Definíciók 1.

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

Az NS szimbólum

A levezetések leírásához érdemes bevezetni a következő NS szimbólumot:

$$NS(u_i) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_t u_i + u_j \partial_j u_i = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \partial_i p + \nu \partial_j s_{ij}}_{\partial_j t_{ij}} \quad (4)$$

ahol: $s_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ az (szimmetrikus= s) alakváltozás része a derivált tenzornak $\partial_j u_i$.



k transzport egyenlete

Definíciók 2.

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

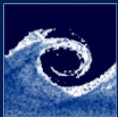
Peremfeltétel

Belépő

Ismételjük meg a Reynolds egyenlet levezetését!

$$\overline{NS(\overline{u}_i + u'_i)} \quad (5)$$

$$\partial_t \overline{u}_i + \overline{u}_j \partial_j \overline{u}_i = \partial_j \underbrace{\left[-\frac{1}{\rho} \overline{p} \delta_{ij} + \nu \overline{s}_{ij} - \overline{u'_i u'_j} \right]}_{\overline{T}_{ij}} \quad (6)$$



A TKE egyenlete

Vegyük $\overline{(NS(u_i) - \overline{NS(u_i)})u'_j(NS(u_j) - \overline{NS(u_j)}) + u'_i}$ nyomát

$$\partial_t k + \overline{u_j} \partial_j k = \underbrace{-a_{ij} \overline{s'_{ij}}}_{\text{Produkción}} + \underbrace{\partial_j \left[\overline{u'_j \left(\frac{p'}{\rho} + k' \right) - \nu u'_i s'_{ij}} \right]}_{\text{Transzport}} - \underbrace{\varepsilon}_{\text{Disszipáció}} \quad (7)$$

- Disszipáció: $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} 2\nu \overline{s'_{ij} s'_{ij}}$
- Anizotrópia tenzor: $a_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{u'_i u'_j} - \frac{1}{3} \underbrace{\overline{u'_l u'_l}}_{2k} \delta_{ij}$

(A Reynolds feszültség tenzor deviátor része)



A TKE egyenlet

A tagok jelentése

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

Produkción

- Kifejezés: $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} -a_{ij} \overline{s_{ij}}$
- A mozgási energia transzferje az átlagos áramlástól a turbulenciába
 - Ugyanez a tag jelenik meg ellentétes előjellel az átlagsebesség mozgási energiájának egyenletében
- Ez a mechanizmus táplálja az energiát a Richardson kaszkádba
- A nagy skálákon történik



A TKE egyenlet

A tagok jelentése (folyt.)

Turbulencia II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

Disszipáció

- Kifejezés: $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} 2\nu \overline{s'_{ij}s'_{ij}}$
- A turbulens kinetikus (mozgási) energia hővé alakulása
 - A viszkózus feszültségek munkája a kis léptékeken (s'_{ij})
- Ez az energia elvonási mechanizmusa a Richardson kaskádból
- A kis léptékeken történik

$\mathcal{P} = \varepsilon$ ha a turbulencia homogén (izotrop), mint a Richardson kaskádban



A TKE egyenlet

A tagok jelentése (folyt.)

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

Transzport

- Kifejezés: $\partial_j \left[\overline{u'_j \left(\frac{p'}{\rho} + k' \right)} - \nu \overline{u'_i s'_{ij}} \right]$
- A turbulens kinetikus energia térbeli transzportja
 - A kifejezés divergenciás alakú ($\partial_j \square_j$)
 - A divergencia felületi integrállá alakítható (G-O tétel)



A RANS modellezés ötlete

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

- A Reynolds átlagolt NS egyenletet oldjuk meg az átlagolt változókra $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p})$
- A Reynolds feszültség tenzor $\overline{u'_i u'_j}$ ismeretlen, így modellezni kell
- A modellezésnek az egyébként is felhasznált mennyiségeket $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p})$ kellene használnia

Hasznosság

- Ha az átlagolt mennyiségek hasznosak a mérnökök számára
- azaz ha az ingadozások nem érdekesek "csak" a hatásuk az átlag áramképre
- A modellezése megfelelően pontos



Örvény viszkozitás modellezés

Turbulencia II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

Az ötlet

- A turbulencia hatása mint a mozgó molekulák hatása a kinetikus gázelméletben
- Az impulzus csere a különbözős sebességgel mozgó rétegek között a merőlegesen mozgó molekulák által jön létre
- A viszkozus feszültséget így számoljuk: $\Phi_{ij} = 2\nu S_{ij}$



Örvény viszkozitás modell (folyt.)

Turbulencia II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

Egyenletekben...

- Csak a deviátor részt modellezzük
- A nyom (k) beolvasztható a nyomásban (modifikált nyomás), és nincs szükség a modellezésére
- A modifikált nyomást használjuk a nyomáskorrekciós módszerben a kontinuitás kielégítése céljából (lásd: nyomásra vonatkozó Poisson egyenlet)

$$\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} = -2\nu_t \overline{S_{ij}} \quad (8)$$



Örvény viszkozitás

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

A viszkozitás a hosszlépték (l') és a sebesség ingadozás lépték (u') szorzatával arányos

- A hosszléptéknek arányosnak kell lennie azzal a hosszal, amit a folyadék impulzusát megtartva megtesz
- A sebesség ingadozási léptéknek a mozgó folyadékreszek által okozott ingadozáshoz kell kötődnie

$$\nu_t \sim l' u' \quad (9)$$

Frissebb eredmények melyek a koncepciót támasztják alá

A turbulencia koherens struktúra szemlélete megmutatta, hogy vannak folyadékreszek (örvények) amelyek mozgásuk során megtartják egy ideig tulajdonságaikat



Két egyenletes modellek

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

- A hossz (l') és a sebességingadozás lépték (u') az áramlás és nem a folyadék tulajdonsága, így helytől és időtől függenek
- PDE-kre van szükség, hogy a skálák fejlődését leírassuk

A léptékekre vonatkozó kritériumok

- Jól definiáltnak kell lennie
- Az alakulásra vonatkozó egyenleteket kell fejleszteni
- Numerikusan kezelhetőnek kell lennie
- Könnyen mérhetőnek kell lennie, hogy kísérleti validációra lehetőség legyen



Sebesség ingadozás lépték

- A TKE jellemzi a sebesség ingadozást
- Izotrop (nincs kitüntetett irány)

$$u' \sim \sqrt{k} \quad (10)$$

Hossz lépték

- Az integrál hosszlépték jól definiált (lásd: korrelációk)
- Nem könnyű közvetlen egyenletet fejleszteni
- A hosszléptéket a disszipáción keresztül számoljuk

Emlékeztető: $\epsilon = \frac{u_0^3}{l_0} \Rightarrow l' \sim \frac{k^{3/2}}{\epsilon}$



Az örvény viszkozitásra vonatkozó egyenlet

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

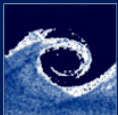
Belépő

$$\nu_t = C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (11)$$

C_ν konstans, melyet elmélet alapján vagy kísérletből kell meghatározni...

A helyzet...?

- Két ismeretlenünk (k, ε) van az egy (ν_t) helyett



k modell egyenlet

k egyenletet levezettük, de vannak benne ismeretlenek:

$$\partial_t k + \overline{u_j} \partial_j k = \underbrace{-a_{ij} \overline{s_{ij}}}_{\text{Produkción}} + \underbrace{\partial_j \left[\overline{u'_j \left(\frac{p'}{\rho} + k' \right) - \nu \overline{u'_i s'_{ij}}} \right]}_{\text{Transzport}} - \underbrace{\varepsilon}_{\text{Disszipáció}} \quad (12)$$

Produkción

A produkcion közvetlenül számítható, ha felhasználjuk az örvényviszkozitás hipotézist

$$\mathcal{P} = -a_{ij} \overline{s_{ij}} = 2\nu_t \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}} \quad (13)$$



k modell egyenlet

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel
Belépő

Disszipáció

Különálló egyenletet vezetünk le

Transzport $\partial_j T_j$

- Közelíthető a gradiens hipotézis segítségével

$$T_j = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \partial_j k \quad (14)$$

- σ_k egy Schmidt szám típusú mennyiség mely átskálázza ν_t -t, hogy megkapjuk a szükséges diffúziós tényezőt
 - Kísérletileg meghatározandó



A k modell egyenlet összefoglalva

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

$$\partial_t k + \overline{u_j} \partial_j k = 2\nu_t \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}} - \varepsilon - \partial_j \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \partial_j k \right) \quad (15)$$

- Minden közvetlenül számítható, kivéve ε
- A bal oldal k lokális és konvektív változása
 - A konvekció egy fontos tulajdonsága a turbulenciának (így megfelelően kezeljük)



ε modell egyenlete

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

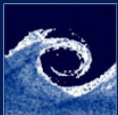
Peremfeltétel

Belépő

- Feltesszük, hogy transzport egyenlet írja le
- Levezetés helyett, a k egyenleten alapul

$$\partial_t \varepsilon + \overline{u_j} \partial_j \varepsilon = C_{1\varepsilon} \mathcal{P} \frac{\varepsilon}{k} - C_{2\varepsilon} \varepsilon \frac{\varepsilon}{k} - \partial_j \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \partial_j \varepsilon \right) \quad (16)$$

- A produkció és disszipációkat átskálázzuk $\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)$ és „feljavítjuk” állandó együtthatókkal $(C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon})$
- Gradiens diffúzióval modellezzük a transzportot Schmidt számot használva σ_ε
- **Az ε nem túlságosan pontos! :)**



A standard k- ε modell állandói

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

$$C_\nu = 0,09 \quad (17)$$

$$C_{1\varepsilon} = 1,44 \quad (18)$$

$$C_{2\varepsilon} = 1,92 \quad (19)$$

$$\sigma_k = 1 \quad (20)$$

$$\sigma_\varepsilon = 1,3 \quad (21)$$



Példák az állandókra

Homogén turbulencia

Turbulencia II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

$$d_t k = \mathcal{P} - \varepsilon \quad (22)$$

$$d_t \varepsilon = C_{1\varepsilon} \mathcal{P} \frac{\varepsilon}{k} - C_{2\varepsilon} \varepsilon \frac{\varepsilon}{k} \quad (23)$$



Példák az állandókra

Csillapodó turbulencia

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

Mivel $\mathcal{P} = 0$, az egyenlet rendszert könnyen meg lehet oldani:

- $k(t) = k_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-n}$
- $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-n-1}$
- $n = \frac{1}{C_{2\varepsilon} - 1}$
- n „könnyen” mérhető



k - ω modell

Turbulencia II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

- k egyenlet ugyanaz
- $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{C_\nu} \frac{\varepsilon}{k}$ Specifikus disszipáció, turbulens frekvencia (ω)
- az ω egyenlet hasonló a ε egyenlethez
 - transzport egyenlet produkcióval, disszipációval és transzporttal a jobb oldalon
- az ω egyenlet jobb a falak közelében
- az ε egyenlet jobb a távol-térben

⇒ az SST modell keveri a két fajta hosszlépték egyenletet a faltól való távolság függvényében



A szükséges peremfeltételek

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

A turbulencia modell PDE-ei transzport egyenletek hasonlóan az energia egyenlethez

- Lokális változás
- Konvekció
- Forrás tagok
- Transzport tagok



Belépő perem feltételek

Turbulencia II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

- Neumann, Dirichlet vagy kevert típusú peremfeltételeket lehet általában használni
- A belépés általában Dirichlet típusú (adott érték)

Végső cél

- Hogyan adjuk meg k és ε vagy ω értékét a belépő peremeken?



A belépő peremfeltételek közelítése

Turbulencia fok

Turbulencia II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

Olyan mennyiségeket használjunk, amit könnyű becsülni

Fejlesztünk egyenletet, amellyel k -t és ε -t vagy ω -t lehet számolni olyan mennyiségekből, amelyek mérnökök által becsülhetők

Turbulencia intenzitás

$$Tu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u'}{\bar{u}} = \frac{\sqrt{2/3k}}{\bar{u}}$$



Belépő peremfeltételek közelítése

Hossz lépték

Turbulencia
II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

Hossz lépték

$$l' \sim \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon$$

- Mérésből (Taylor hipotézist felhasználva)
- Faltörvény alapján
- Becsülhető hidraulikus átmérőből $l \approx 0.07d_H$



A belépő peremfeltételek fontossága

Turbulencia II.

Balogh
Miklós

Léptékek

Transzport

Modellezés

Peremfeltétel

Belépő

Ha a turbulencia kormányozza az áramlást

- Példa: Atmoszferikus áramlás, ahol a geometria nagyon egyszerű (sík táj, domb), a turbulencia bonyolult
 - az áramlás térbeli történelmén keresztül
 - érdes felület felett
 - felhajtó erő is szerepet játszik
- A belépő turbulenciára való érzékenységet ellenőrizni kell
 - a szimuláció bizonytalanságát fel kell ismerni
 - mérést is használni kell
 - a szimulációs tartományt fel-vízi oldalon ki kell egészíteni



Köszönöm a figyelmet!