

Inkompresszibilis áramlások számítása

Kristóf Gergely
2014. szeptember 15.

A nyomás-sebesség kapcsolat problémája

A diskretizációval kapott algebrai egyenletrendszer megoldására iterációs módszert fogunk alkalmazni.
Szegregált iteráció: minden mezőváltozóra különálló egyenletrendszert oldunk meg, amelyben a többi mezőváltozót állandónak tekintjük.

Kontinuitás: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

Navier-Stokes egyenlet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} / \rho_0 + \nabla \cdot (\nu \nabla u) + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (v \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial y} / \rho_0 + \nabla \cdot (\nu \nabla v) + g_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (w \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial z} / \rho_0 + \nabla \cdot (\nu \nabla w) + g_z$$

Ez az egyenletrendszer nem alkalmas szegregált iterációra. Pl. u-ra:

$$u^{n+1} \leftarrow \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (u^n \vec{v}^n) = \frac{1}{\rho_0} \left[p^n + \nabla \cdot (\nu \nabla u^n) + g_x \right] ??$$

Miből számoljuk ki p^{n+1} -et és hogyan fog teljesülni a kontinuitás?

Szokásos megközelítések

- Ψ - ω módszer**
Az mozgásyenletről **kiküszöböljük a nyomásmezőt**. A kontinuitást egy potenciál függvény bevezetésével oldjuk meg.
- Nyomáskorrekciós módszerek**
A kontinuitási egyenlet helyett **új alapegyenletet vezetünk be a nyomásra**.
- Mesterséges kompresszibilitás módszerek**
Gyengén összenyomható áramlások esetén az áramlási jellemzők nem függenek jelentősen a kompresszibilitás értékétől, ezért egy mesterségesen csökkentett rugalmassági modulus bevezetésével alkalmazhatók a **kompresszibilis megoldók**.

Az áramfüggvény (Ψ)

Jelentése 2D-ben: térfogatáram 1 m széles tartományban.
Egy Ψ -állandó vonalon átáramlás nincs, tehát a Ψ **szintvonalai áramvonalak**.
Két, egymáshoz közeli áramvonala az alábbi összefüggés érvényes:

$$d\psi = u dy - v dx$$

Ugyanakkor Ψ teljes differenciálja:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

Ebből megkapjuk Ψ definícióját 2D áramlás esetére:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad \text{és} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

Pusztán létevel kielégíti a kontinuitási egyenletet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

3D áramlások esetében

3D-ben Ψ -t vektorként definiáljuk: $\underline{v} = \nabla \times \underline{\Psi}$
Vektorpotenciál.

Sikáramlás esetén visszkapjuk az eredeti definíciót:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \end{pmatrix} \rightarrow \text{azaz sikáramlás esetén: } u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{és} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

A kontinuitás 3D-ben is automatikusan kielégül: $\nabla \cdot \underline{v} = \nabla \cdot \nabla \times \underline{\Psi} = 0$

2D-ben további előny, hogy a mezőváltozók száma csökken ($u, v \rightarrow \Psi$). Sajnos ez az előny 3D-ben elvész.

Az örvényesség (ω)

Az örvényesség 3D-ben: $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{v}$

2D-ben ω -nak csak z komponense van:

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

tehát:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}$$

Az áramfüggvénnyel kifejezve:

$$\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Delta \psi \quad \text{ez egy Poisson-egyenlet az áramfüggvényre.}$$

Egy érdekes speciális eset: potenciális áramlásokra $\underline{\omega} = 0$
Csak egy Laplace-egyenletet kell megoldani 2D esetben. $\Delta \psi = 0$
Analitikus megoldások, analógiák...

Az örvénytranszportegyenlet (ÖTE)

Képezzük a Navier-Stokes egyenlet rotációját! 2D-ben csak z komponens van:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \dots = -\frac{\partial^2 p / \rho_0}{\partial x \partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \dots = -\frac{\partial^2 p / \rho_0}{\partial x \partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \dots = 0 + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (\nabla \cdot \mathbf{v}) \omega = 0$$

Az örvénytranszport egyenlet 2D alakja. $\frac{d\omega}{dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla \omega$

A kinematikai viszkozitás az örvényesség vezetési tényezője... ν : határrétegben.

Megoldási módszer stacionárius áramlásra

Poisson-egyenlet Ψ -re:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega$$

ÖTE-ba beírjuk a Ψ -vel kifejezett u-t és v-t:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

Szegregált megoldási módszer:

$$\psi^0, \omega^0 \xrightarrow{\text{Poisson}} \psi^1, \omega^0 \xrightarrow{\text{ÖTE}} \psi^1, \omega^1 \xrightarrow{\text{Poisson}} \psi^2, \omega^1 \dots$$

Peremfeltételek Ψ -re:

- Belépésnél és falon: elsőfajú.
- Kilépésnél másodfajú (Neuman pf.).

ω -ra:

- Belépésnél és falon: elsőfajú.
- Kilépésnél másodfajú (Neuman pf.).

Probléma: nyomás peremfeltélt nem tudunk előírni, mert p nem szerepel az egyenletekben. A nyomásmezőt utólag kell meghatározni.

Nyomás alapú megoldók A nyomásegyenlet

Kontinuitás: $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

Mozgásegyenlet ha \mathbf{g} -nek nincs szerepe: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla(p / \rho_0) + \nu \Delta \mathbf{u}$

Új jelölések: $P = p / \rho_0$ és $\tilde{\mathbf{f}}$ (értelmezésűen).

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \tilde{\mathbf{f}} - \nabla P$$

Képezzük a mozgásegyenlet divergenciáját felhasználva, hogy: $\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

$$\Delta P = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{f}}$$

Ez egy Poisson-egyenlet P-re. **Nyomásegyenlet**

Ez alkalmas pl. a nyomásmező meghatározására Ψ - ω módszer esetén.

Alkalmas-e a nyomásegyenlet a kontinuitás kiváltására?

Diszkrétizáljuk a mozgásegyenlet egyszerűség kedvéért időben elsőrendű pontosságú integrálási sémával (Euler-módszerrel):

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t (f_i^n - \tilde{\nabla}_i P^n) \quad \text{2. lépés}$$

ahol i a Descartes komponensek indexe. A nyomásegyenlet diszkrét alakja:

$$\tilde{\Delta} P^n = \tilde{\nabla} \cdot f_i^n \quad \text{1. lépés}$$

Először oldjuk meg a nyomásegyenletet P^n -re, majd frissítsük a sebességet!

Divergenciamentes lesz az új sebességmező?

$$\tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = \tilde{\nabla} \cdot u_i^n + \Delta t \underbrace{(\tilde{\nabla} \cdot f_i^n - \tilde{\Delta} P^n)}_{\approx 0 \text{ csak közelítőleg tudjuk megoldani!}}$$

A nyomásegyenlet megoldásának hibája felhalmozódva jelentkezik a kontinuitásban.

A hiba felhalmozódása elkerülhető...

Nekünk nem a nyomásegyenlet fontos, hanem a kontinuitás teljesítése. Az eredeti nyomásegyenlet helyett az alábbi korrigált egyenletet kell megoldani:

$$\tilde{\Delta} P^n = \tilde{\nabla} \cdot f_i^n + \frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u_i^n$$

majd a mozgásegyenletből számoljuk az új sebességeket:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t (f_i^n - \tilde{\nabla}_i P^n)$$

Ellenőrizzük az új sebesség divergenciamentesességét:

$$\tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = \Delta t \left[\frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u_i^n + \tilde{\nabla} \cdot f_i^n - \tilde{\Delta} P^n \right]$$

≈ 0 **nyomásegyenlet**

Csak akkor a kontinuitás hibája, amit a korrigált nyomásegyenlet megoldásakor elkövetünk az n-edik lépésben.

Projekciós módszer

Ugyanez a módszer a szokásosabb jelölésekkel:

1. lépés kiszámítjuk: $u^* = u_i^n + \Delta t f_i^n$ u^* pszeudosebesség

2. lépés **megoldjuk**: $\tilde{\Delta} P^n = \frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u^*$ $\rightarrow P^n$

3. lépés kiszámítjuk: $u_i^{n+1} = u_i^* - \Delta t \tilde{\nabla}_i P^n$

Ellenőrizzük! $\tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = \Delta t \left[\frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u^* - \tilde{\Delta} P^n \right]$

Tényleg ezt oldjuk meg a 2. lépésben.

Időben másodrendű pontosság is elérhető pl. Adams-Basforth sémával.

Stacionárius áramlás

Az időben explicit módon diszkretizált megoldás általában nem felel meg a gyakorlati igényeknek:

Az előző módszer csak kis időlépekkel tud működni. (Feltételesen stabil séma.)

Ha az áramlás stacionárius, vagy lassan változik, akkor nagyon sok időlépést kell tenni, amíg elérjük a stacionárius állapotot.

P-u iteráció stacionárius áramlásra

Szeretnénk, ha az $n+1$ -edik iterációs lépésben minél pontosabban közelíteni ezt:

$$a_p u_{i,p}^{n+1} + \sum a_l u_{i,l}^{n+1} = Q_i - \nabla_l P^{n+1} \quad \text{és} \quad \nabla \cdot \tilde{u}_i^{n+1} = 0$$

Csak az előző (n-edik) nyomást tudjuk használni. Megoldjuk u^* -ra kezdőértékeként u^n -et felhasználva.

$$a_p u_{i,p}^* + \sum a_l u_{i,l}^* = Q_i - \nabla_l P^n \quad \text{1.lépés}$$

$$u_{i,p}^* = \frac{Q_i - \sum a_l u_{i,l}^*}{a_p} - \frac{1}{a_p} \nabla_l P^n$$

$$u_{i,p}^* = \bar{u}_{i,p} - \frac{1}{a_p} \nabla_l P^n$$

u^{n+1} hasonló képlettel közelíthető

az új nyomásgradiens alapján:

$$u_{i,p}^{n+1} \approx \bar{u}_{i,p} - \frac{1}{a_p} \nabla_l P^{n+1} \quad \text{3.lépés}$$

u^{n+1} elégítse ki a kontinuitást!

Képezzük a numerikus divergenciáját:

$$\Delta P^{n+1} = a_p \nabla \cdot \tilde{u}_i \quad \text{2.lépés}$$

A 3. lépésben elhanyagolt szomszédok miatt most a mozgásegyenlet nem pontos, ezért 1,2,3 lépéseket ismételni kell.

Szokásos módszerek

- **Belső iteráció:**
Közelítő megoldást kell alkalmazni az 1. és 2. lépés egyenletrendszerének megoldására, azonban a belső iteráció csak 1 lépést szokott tenni.
- **Nyomáskorrekciós egyenlet:**
Nyomás helyett nyomáskorrekcióra szokásos megoldani a Poisson-egyenletet. (Numerikus előnyök.)
- **SIMPLE, SIMPLEC, SIMPLER, PISO**
- **Időfüggő modellek:**
Időben változó folyamatok esetén a lokális gyorsulást figyelembe vehetjük a_p -ben és Q -ban. Időben implicit sémát alkalmazva nagy időlépeket lehet tenni.