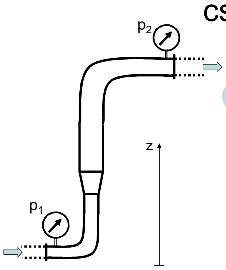
# Hidraulika

Kristóf Gergely
BME Áramlástan Tanszék
2016 november

## Összenyomhatatlan áramlás csövekben




Bernoulli:

$$\underbrace{p_1+\rho g z_1}_{P_1}+\frac{\rho}{2}v_1^2=\underbrace{p_2+\rho g z_2}_{P_2}+\frac{\rho}{2}v_2^2+\Delta p'$$

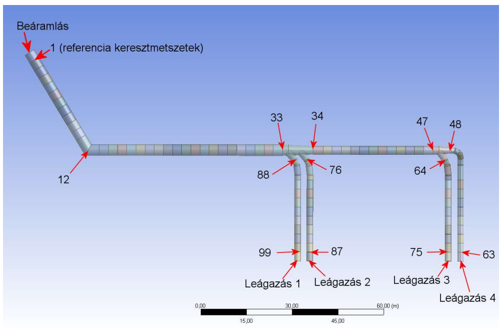
hidraosztatikus nyomás leválasztása

Össznyomás változás:

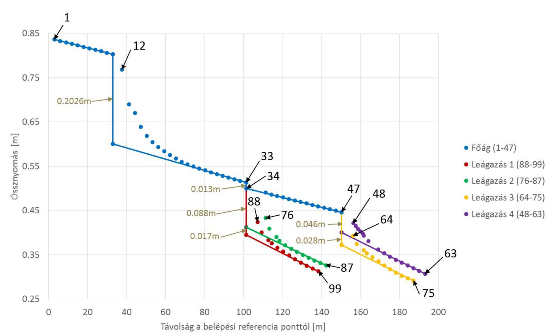
$$\Delta p'=\underbrace{\sum_i \zeta_i \frac{\rho}{2}v_i^2}_{\text{helyi veszt.}}+\underbrace{\sum_j \frac{\rho}{2}v_j^2\frac{L_j}{d_j}\lambda_j}_{\text{csősúrlódás}}$$

Átlagsebesség bármely metszetben: $v_i=\frac{q_v}{A_i}$ ahol $A_i$ a cső keresztmetszeti területe

## Kiegészítő elemzések – DN3600 vezeték



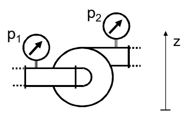
## Kiegészítő elemzések – DN3600 vezeték




## Passzív elemek és szivattyú

Számolhatunk méter dimenzióban:

$$\underbrace{\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g}}_{h_{t,1}} = \underbrace{\frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}}_{h_{t,2}} + \underbrace{\Delta h'}_{\Delta h' = \frac{\Delta p'}{\rho g}}$$

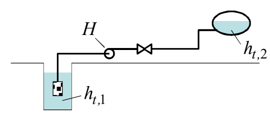



Szivattyúra:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} - H$$

$H$ szállítómagasság: az egységnyi súlyú folyadékon végzet munka. $P_{hid} = \rho\, g\, H\, q_v$ , ahol $P_{hid}$ a hidraulikai teljesítmény és $H = f(q_v)$.

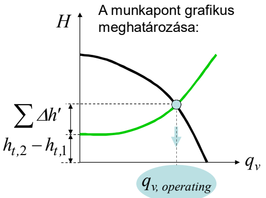
## Hidraulikai energiamérleg




A passzív elemek veszteségét is a szivattyú pótolja:

$$h_{t,2} - h_{t,1} = H - \sum_i \Delta h'_i$$

A munkapont grafikus meghatározása:




Ebből kifejezhető a szivattyú szállítómagassága:

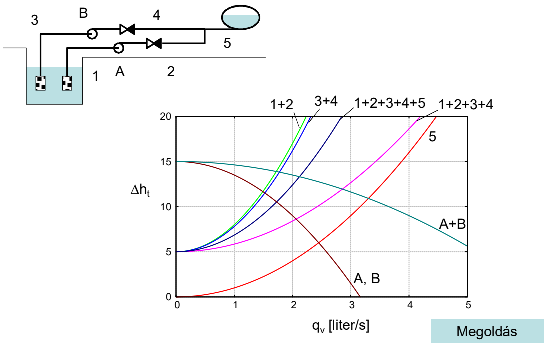
$$H = h_{t,2} - h_{t,1} + \sum_i \Delta h'_i$$

Adott: $H = f(q_v)$.

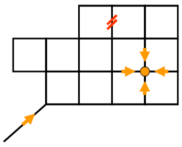
Adott, állandó.

Kifejezhető mint: $q_v^2 \cdot \mathrm{const.}$

## Grafikus megoldás



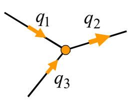

## Hurkolt hálózatok



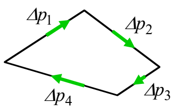
Előnyös nagy elosztó hálózatok esetében (pl. városi ivóvíz hálózat), mert:

- A víz mindig áramlik a rendszerben.
- A nagy helyi fogyasztást jobban tolerálja.
- A hálózat minimális része esik ki egy cső lezárása esetén.

## Kirchoff törvények




I.) Kontinuitás csomópontonként.

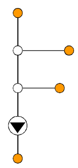


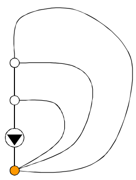

II.) A nyomásesések előjeles összege hurkokra.

# Hurkolt hálózat fából

A fa topológia mindig átalakítható hurkolt hálózattá:
A külső környezetnek megfelelő pontok együttesen kielégítik a kontinuitást, és azonos nyomásúak, ezért összevonhatók.

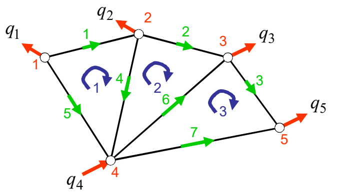
Pl. egy elszívó hálózat szerkezete:





A hurkolt hálózat általánosabb, mint a fa struktúrájú hálózat.

# A hálózat elemei




csomópontok: i: 1..N
ágak: j: 1..E
hurkok: k:1..L

$q_i$ betáplálás, ha $q_i$>0,és fogyasztás, ha $q_i$<0.
$q_i$ csak csomópontokban lehet.
$q_i$ -nak ki kell elégíteni:

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = 0$$

# Csomóponti mátrix

Ismeretleneink: $x_j$ ágáramok. Előjelük:
+: ha az áramlás iránya egyezik az ág irányával;
- : ha ellentétesek.

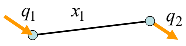
Csomóponti egyenletek:

$$q_i = \sum_{j=1}^{E} a_{ij} x_j \qquad \text{(i: 1..N)}$$

$a_{ij}$ a topológiai mátrix elemei:
- $a_{ij}$ = 1: ha j ág kifelé vezet i pontból;
- $a_{ij}$ = -1: ha j ág befelé vezet i pontba;
- $a_{ij}$= 0: ha j ág elkerüli i csomópontot.

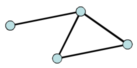
## Az egyenletek száma

Csak N-1 független csomóponti egyenlet van, mivel $q_i$ betáplálások előjeles összege 0. Pl:




$$x_1 = q_1$$
$$x_1 = q_2$$

Hány csomópontunk van?



$$N + L = 1 + E$$

Összesen E ismeretlenünk van: $E = \underbrace{N-1}_{\text{Független csomóponti egyenletek száma}} + L$

Hurokegyenletek száma.

A hurokegyenletek felírásával az egyenletrendszer lezárható.

## Hurokegyenletek

Össznyomásveszteség j ágon: $$\Delta p'_j = \frac{\rho}{2}\frac{x_j|x_j|}{A_j^2}\left(\frac{\ell_j}{d_j}\lambda_j + \zeta_j\right)$$

$$\Delta p'_j = k_j\, x_j |x_j|$$

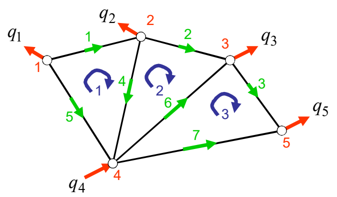
A k-adik hurok hurokegyenlete: $$\sum_{j=1}^{E} b_{kj}\Delta p'_j = 0 \qquad \text{(k: 1..L)}$$

$b_{kj}$ a hurokmátrix elemei:

- $b_{kj}$ = 1: ha j ág irányítása egyezik k hurokéval;
- $b_{kj}$ = -1: ha j ág és k hurok irányítása ellentétes;
- $b_{kj}$= 0: ha j ág nincs benn k hurokban.

## Gyakorló feladat

a) Írja fel a hurokmátrixot az alábbi hálózatra:




b) Konstans indexekkel írja fel az 1-es hurok hurokegyenletét!

Megoldás

## Cross-módszer

Tisztán hurkolt hálózatra szorítkozunk, nincsenek csomóponti betáplálások és fogyasztások (ezeket további hurkokkal írhatjuk le).

Egyszerűen implementálható iteratív megoldás:

1. Vegyük fel az ágáramokat úgy, hogy kielégüljenek a csomóponti egyenletek.
   Pl. ha nincsenek betáplálások, akkor lehet kezdőérték $x_i=0$.
2. A k hurokban minden j ág $x_j$ áramának korrekciója egy $q_k$ korrekciós hurokárammal úgy, hogy a hurokegyenlet is kielégüljön.
   A csomóponti egyenletek továbbra is kielégülnek.
3. Az összes hurkot egymás után korrigáljuk.
   (Közben mindig kissé elrontjuk a szomszédos hurkot.)
4. Sokszor ismételjük az egész hurok sorozatra, amíg a korrekciók elenyészően kicsik lesznek.

## Hurokkorrekció (1)

Hurokegyenletek: $$\sum_{j=1}^{E} b_{kj} \Delta p'_j = 0$$

A korrigált ágáramok kielégítik a hurokegyenletet. k hurokra:

$$\sum_{j=1}^{E} b_{kj} k_j \left(x_j + b_{kj} q_k\right) \left|x_j + b_{kj} q_k\right| = 0$$

**$q_k$ számításakor közelítésekkel élünk:**

1. $x_j$ előjele nem változik meg a korrekció hatására:

$$\sum_{j=1}^{E} b_{kj} k_j \, sg(x_j) \left(x_j + b_{kj} q_k\right)^2 = 0$$

2. Ha $q_k$ már kicsi, a másodrendű tag elhanyagolható:

$$\sum_{j=1}^{E} b_{kj} k_j \, sg(x_j) \left(x_j^2 + 2 x_j b_{kj} q_k\right) = 0$$

## Hurokkorrekció (2)

$$\sum_{j=1}^{E} b_{kj} k_j \, sg(x_j) \left(x_j^2 + 2 x_j b_{kj} q_k\right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{E} \left(b_{kj} k_j x_j |x_j| + 2 b_{kj}^2 k_j |x_j| q_k\right) = 0$$

$q_k$ értéke állandó a k hurokban, ezért:

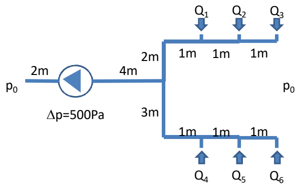
$$\sum_{j=1}^{loop\,k} b_{kj} k_j x_j |x_j| + q_k \sum_{j=1}^{loop\,k} 2 b_{kj}^2 k_j |x_j| = 0$$

$$q_k = -\frac{\sum_{j=1}^{loop\,k} b_{kj} k_j x_j |x_j|}{\sum_{j=1}^{loop\,k} 2 b_{kj}^2 k_j |x_j|}$$

Aztán korrigáljuk az ágáramokat:

$$x_j^{n+1} = x_j^n + b_{kj} q_k$$

## Szorgalmi feladat (max.10 p)

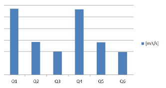



A fenti ábrán egy 400 mm belső átmérőjű, kör keresztmetszetű csövekből álló elszívó rendszer látható. Az elszívó ventilátor 500 Pa össznyomás-növekedést állít elő és szabad légtérbe fúj ki.

**Készítse el a hálózat modelljét** a CrossMethod.xls programmal, az alábbi közelítések felhasználásával:

- egyenes csőszakaszokon Blasius-formula alkalmazható a csősúrlódási tényező számítására;
- 90°-os iránytörések esetében a veszteségtényező értéke: 1;
- áramlást egyesítő idomok esetében mindkét belépő ágon a veszteségtényező értéke 1;
- a sűrűség meghatározásához 20°C hőmérsékletű 100 kPa nyomású száraz levegőt feltételezhetünk.

**Ábrázolja $Q_1$..$Q_6$ térfogatáramokat az alábbihoz hasonló formájú oszlop diagramon** (skála feltűntetésével):




## Newton-Raphson módszer direkt megoldással

Sajnos az iteratív megoldás nem mindig konvergál. Ilyen esetekben célszerű direkt megoldást alkalmazni a hurokkorrekciók számítására.

Ilyenkor a j-edik ágáramot az összes hurok figyelembevételével korrigáljuk:

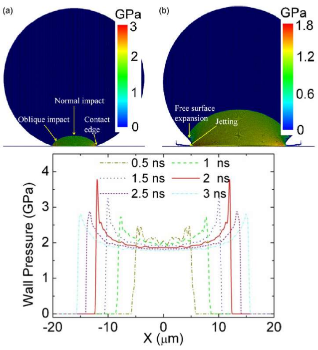
$$x_j^{n+1} = x_j^n + \sum_{m=1}^{L} b_{mj} q_m$$

Ennek figyelembevételével a k-adik hurokkorrekciós egyenlet:

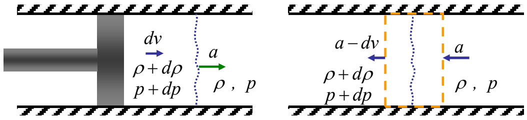
$$\sum_{j=1}^{E} \left( b_{kj} k_j x_j^n \left| x_j^n \right| + 2 b_{kj} k_j \left| x_j^n \right| \underline{\sum_{m=1}^{L} b_{mj} q_m} \right) = 0$$

Ez egy L (k:1..L) lineáris egyenletből álló rendszer az ismeretlen $q_m$ (m:1..L) hurokkorrekció értékekre, melyeket direkt megoldási módszerrel (pl. Gauss-Jordan módszerrel megoldhatunk).

## 1. példa: ütközéskor kialakuló nyomáshullám egy folyadékcseppben



## Hullámsebesség merev falú csőben




Kontinuitás:

$$A(a - dv)(\rho + d\rho) = a\,\rho\,A$$

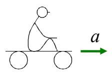
$$a\,d\rho = \rho\,dv$$

Impulzus tétel: $\sum \vec{I} = \sum \vec{P}$

$$\underbrace{A\,\rho\,a}_{q_m}\underbrace{(a-(a-dv))}_{dv} = A\,dp$$

$$dp = \rho\,a\,dv$$

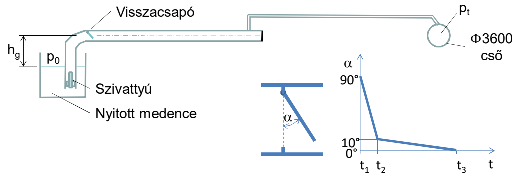
Allievi egyenlet

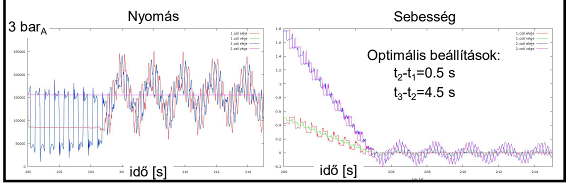



$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

| | |
|---|---|
| Acélban | ~5000 m/s |
| Vízben | ~1500 m/s |
| Levegőben | ~340 m/s |

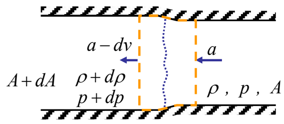
## 2. példa: csappantyú zárás okozta vízütés




## Hullámterjedés folyadék vezetékekben (1)

A $dp$, nyomásugrás hatására a cső keresztmetszete $dA$–val nő.




Kontinuitás:

$$(a - dv)(\rho + d\rho)(A + dA) = a\,\rho\,A \qquad a\,\rho\,dA + a\,d\rho\,A - dv\,\rho\,A = 0$$

Impulzustétel:

$$A\,\rho\,a(a-(a-dv)) = (A + dA)(p + dp) - Ap - \underbrace{p_{wall}\,dA}_{R}$$

ahol R a falra ható axiális erő.

$p_{wall} \approx p$ amit az Alievi-féle lökés alapján: $\rho\,a\,dv = dp$

## Hullámterjedés folyadék vezetékekben (2)

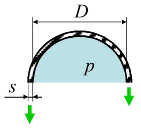
$$a\,\rho\,dA + a\,d\rho\,A - dv\,\rho\,A = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{a} = \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\rho\,a\,dv = dp \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{a} = \frac{dp}{\rho\,a^2}$$

$$\frac{dp}{\rho\,a^2} = \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho}$$

$$a^2 = \frac{1}{\frac{\rho}{A}\frac{dA}{dp} + \frac{d\rho}{dp}}$$

## Hullámterjedés folyadék vezetékekben (3)




Hook-törvény: $\sigma = E_w \varepsilon$ | $\sigma = E_\ell \varepsilon$

$$\frac{dp\,D}{2s} = E_w \frac{dD}{D} = \frac{E_w}{2}\frac{dA}{A} \qquad -dp = -E_\ell \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{\rho}{A}\frac{dA}{dp} = \frac{\rho}{E_w}\frac{D}{s} \qquad \frac{d\rho}{dp} = \frac{\rho}{E_\ell}$$

$$a^2 = \frac{1}{\frac{\rho}{A}\frac{dA}{dp} + \frac{d\rho}{dp}} = \frac{1}{\frac{\rho}{E_w}\frac{D}{s} + \frac{\rho}{E_\ell}} = \frac{E_r}{\rho}$$

ahol $E_r$ a redukált modulus:

$$\frac{1}{E_r} = \frac{1}{E_\ell} + \frac{1}{E_w}\frac{D}{s}$$

Itt vigyázni kell: a buborékos gáztartalom igen jelentősen csökkentheti $E_\ell$ értékét.

## 3. feladat

A) Hasonlítsa össze a végtelen víztérre és az alábbi paraméterekkel adott vízzel telt acélcsőre jellemző hullámsebességet:

Átmérő: 500 mm,
Falvastagság: 10 mm,
$E_{víz}$: 2.0 x $10^9$ Pa,
$E_{acél}$: 2.1 x $10^{11}$ Pa.

B) Milyen s/D arány esetében lesz a hangsebesség csökkenése 5% a vízre jellemző hangsebességhez képest?

Megoldás

## Instacionárius áramlás folyadék vezetékekben

A kontinuitási egyenlet állandó keresztmetszetű csőre:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)=0$$

Mozgásegyenlet 1D, kompreszibilis áramlásra:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+f$$

f a falsúrlódásból eredő erőt jelöli, mely a hidraulikai veszteség alapján:

$$f=\frac{1}{\rho}\frac{\Delta p'}{\Delta x}$$

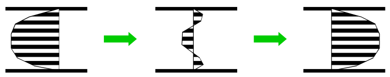
a csősúrlódás okozta veszteség Darcy-Weisbach formula alapján:

$$\Delta p'=-\frac{\rho}{2}v|v|\frac{\Delta x}{D}\lambda \quad \text{, melyből:} \quad f=-\frac{\lambda}{2D}v|v|$$

## Csősúrlódási tényező instacionárius áramlásra

Szinuszosan ingadozó sebesség esetén $\lambda$ kifejezhető Re és St = f D / v alapján.

Amikor a nyomásgradiens előjelet vált, akkor a sebességprofil:

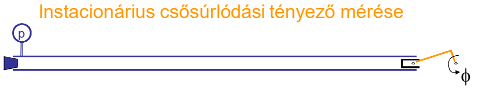


Az instacionárius áramlásra vonatkozó $\lambda$ értékek általában nagyobban a stacionárius értékeknél a határréteg periodikus frissülése miatt.
Lamináris áramlás esetére analitikus megoldás is van.

Turbulens áramlás esetén $\lambda$ értékét zárt csőben végzett rezonancia kísérletekkel határozhatjuk meg. Saját méréseink szerint, $\lambda$ értéke **0.02-0.04** intervallumba esett (Re:$10^4$-$10^5$ és St:0.005-0.02 tartományban).

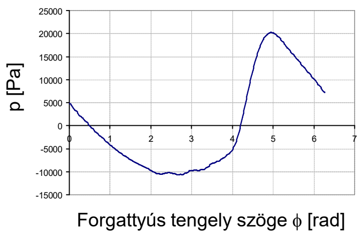
## Mérési módszer

Instacionárius csősúrlódási tényező mérése




Csőhossz:
6.05 m
Átmérő:
36 mm
Dugattyú löket:
50 cm$^3$.

29 Hz gerjesztésnél ezt mérhetjük:



## Alapegyenletek p(t,x) és v(t,x) meghatározására

$$a^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{s=\text{const.}}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\cancel{\partial \rho}}}_{1}\frac{\cancel{\partial \rho}}{\partial t} + \frac{v}{a^2}\frac{\partial p}{\cancel{\partial \rho}}\frac{\cancel{\partial \rho}}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Kontinuitás: $\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

Mozgásegyenlet: $\rho a\frac{\partial v}{\partial t} + \rho a v\frac{\partial v}{\partial x} = -a\frac{\partial p}{\partial x} + \rho a f$

[Pa/s]

## Akusztikai közelítés

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\rho a\frac{\partial v}{\partial t} + \rho a v\frac{\partial v}{\partial x} = -a\frac{\partial p}{\partial x} + \rho a f$$

1) Feltesszük: $\rho \cong \rho_0$ és $a \cong a_0$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \cancel{v\frac{\partial p}{\partial x}} + a_0\frac{\partial \rho_0 a_0 v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho_0 a_0 v}{\partial t} + \cancel{v\frac{\partial \rho_0 a_0 v}{\partial x}} = -a_0\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 a_0 f$$

2) továbbá: $v << a_0$

Mivel $\rho_0 a_0 v$ azonos amplitúdójú mint $p$ .

## Riemann-invariánsok

Vízkalapács egyenletek

$$\frac{\partial p}{\partial t} + a_0\frac{\partial \rho_0 a_0 v}{\partial x} = 0 \qquad \text{(C)}$$

$$\frac{\partial \rho_0 a_0 v}{\partial t} + a_0\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 a_0 f = -\underbrace{\frac{\lambda}{2D}\rho_0 a_0}_{\zeta} v|v| \qquad \text{(M)}$$

(C+M) $\frac{\partial}{\partial t}(p+\rho_0 a_0 v) + a_0\frac{\partial}{\partial x}(p+\rho_0 a_0 v) = -\zeta v|v|$

$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + a_0\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\zeta v|v|$ ahol $\alpha = p + \rho_0 a_0 v$

(C-M) $\frac{\partial}{\partial t}(p-\rho_0 a_0 v) - a_0\frac{\partial}{\partial x}(p-\rho_0 a_0 v) = \zeta v|v|$

$\frac{\partial \beta}{\partial t} - a_0\frac{\partial \beta}{\partial x} = \zeta v|v|$ ahol $\beta = p - \rho_0 a_0 v$

# A karakterisztikák iránya

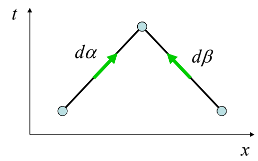
irány mentén deriválva

α és β

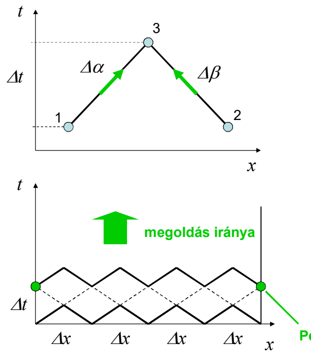
$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+a_0\frac{\partial\alpha}{\partial x}=-\zeta\, v|v| \qquad \frac{\partial\beta}{\partial t}-a_0\frac{\partial\beta}{\partial x}=\zeta\, v|v|$$

Egyik irányban: $\frac{dx}{dt}=a_0$ , Másik irányban: $\frac{dx}{dt}=-a_0$ ,

$$d\alpha=-\zeta\, v|v|\,dt \qquad d\beta=\zeta\, v|v|\,dt$$




# A karakterisztikák módszere




Peremfeltételek szükségesek.

Számoljuk ki $p_3$ és $v_3$, értékét $p_1,v_1$ és $p_2,v_2$ alapján!

$$\alpha_1=p_1+\rho_0 a_0 v_1$$

$$\beta_2=p_2-\rho_0 a_0 v_2$$

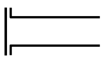
$$\alpha_3=\alpha_1-\zeta\, v_1|v_1|\Delta t$$

$$\beta_3=\beta_2+\zeta\, v_2|v_2|\Delta t$$

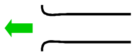
$$p_3=\frac{\alpha_3+\beta_3}{2}$$

$$v_3=\frac{\alpha_3-\beta_3}{2\,\rho_0 a_0}$$

# Peremfeltételek

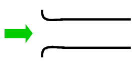


Zárt vég: $v=\frac{\alpha-\beta}{2\,\rho_0 a_0}=0 \;\rightarrow\; \alpha=\beta$



Kiáramlás: $p_0=\frac{\alpha+\beta}{2} \;\rightarrow\; \alpha=2\,p_0-\beta$

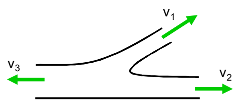
$p_0$



Beáramlás: $p+\frac{\rho_0}{2}v^2=p_0 \;\searrow$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\rho_0}{2}\left(\frac{\alpha-\beta}{2\,\rho_0 a_0}\right)^2=p_0$$

## Elágazás




Az össznyomás veszteségek elhanyagolása esetén:

$$v_1 A_1 + v_2 A_2 + v_3 A_3 = 0$$

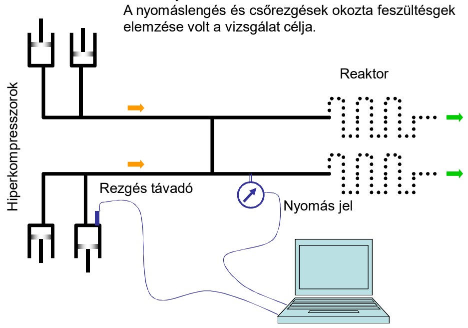
$$p_1 = p_2$$

$$p_2 = p_3$$

6 db. ismeretlenünk van, ezért a fenti 3 algebrai egyenlet a csatlakozó csövekből ismert 3 Riemann-invariáns összefüggésével együtt lezárja az egyenletrendszert. p és v értékei alapján kiszámíthatók a kifelé haladó karakterisztikák Riemann-invariánssai.

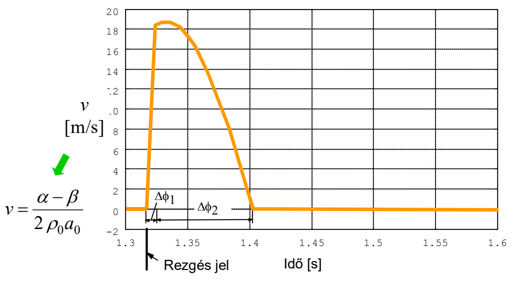
## 3. példa etilén hiperkompresszor

Üzemi nyomás ~ 2700 bar.
A nyomáslengés és csőrezgések okozta feszültségek elemzése volt a vizsgálat célja.



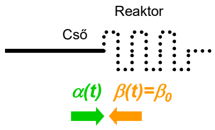

## Peremfeltételek: a kompresszor

Compressor discharge (Velocity at the pipe inlet)




A lineáris ($\Delta\phi_1$) és a színuszos ($\Delta\phi_2$) szakaszok fázisszöge geometriai megfontolások alapján becsülhető. A kezdő fázist a rezgés jel alapján határoztuk meg.

## Peremfeltételek: a reaktor




A polimerizáció miatt intenzív disszipáció lép fel. Visszaverődés nincs ezért állandó $\beta$ érték feltételezhető.

## Szimulációs eredmények a mért nyomással összevetve

Nyomásingadozás [Pa] kvázistacionárius állapotban