Kompresszibilis áramlások számítása

Dr. Kristóf Gergely

2012.11.11.

Egyszerű példa

1D izentrópikis áramlás állandó keresztmetszetű csőben.
Pl: kompresszorok, kipufogók áramlása.

Kontinuitás: $$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0$$

Euler-egyenlet: $$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Izentrópikus egyenlet: $$\frac{p}{\rho^{\gamma}}=\frac{p_0}{{\rho_0}^{\gamma}}$$

p_0 és ρ_0 a referencia állapotra adott állandók.
Ismeretlenek p, ρ, u mint x és t függvényei.

Új mezőváltozót vezetünk be: „a” hangsebesség

Csak egy állapotjelzőt lehet megválasztani. Használjuk állapotjelzőként az „a” hangsebességet és ezzel küszöböljük ki ρ-t és p-t.
Új mezőváltozóink: u és a; mindkettő m/s dimenziójú.

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}}=\frac{p_0}{{\rho_0}^{\gamma}} \qquad a^2=\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{s=áll.}=\gamma\frac{p}{\rho}=\gamma\,\rho^{\gamma-1}\frac{p}{\rho^{\gamma}}=\gamma\frac{p_0}{{\rho_0}^{\gamma}}\rho^{\gamma-1}$$

$$\ln(p)-\gamma\ln(\rho)=\ln\left(\frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}}\right) \qquad 2\,ln(a)=(\gamma-1)ln(\rho)+ln\left(\gamma\frac{p_0}{{\rho_0}^{\gamma}}\right)$$

$$\frac{dp}{p}=\gamma\frac{d\rho}{\rho} \qquad 2\frac{da}{a}=(\gamma-1)\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{da}{dp}=\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{a}{p} \qquad \frac{da}{d\rho}=\frac{\gamma-1}{2}\frac{a}{\rho}$$

Átalakítjuk az alapegyenleteket

Kontinuitás: $$\frac{\partial \rho}{\partial t}\frac{da}{d\rho}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{da}{d\rho}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\gamma-1}{2}\frac{a}{\rho}=0$$

$$\frac{\partial a}{\partial t}+u\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\gamma-1}{2}a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

Euler-egyenlet: $$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\underbrace{\frac{da}{dp}\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{a}}_{1}=0$$

a2

$$\frac{\gamma-1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\gamma-1}{2}u\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial a}{\partial x}=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t}+u\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\gamma-1}{2}a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\gamma-1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\gamma-1}{2}u\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial a}{\partial x}=0 \qquad (2)$$

(1) + (2) $$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(a+\frac{\gamma-1}{2}u\right)}_{\alpha}+(u+a)\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(a+\frac{\gamma-1}{2}u\right)}_{\alpha}=0$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}+(u+a)\frac{\partial \alpha}{\partial x}=0$$ C_+=dx/dt=u+a irány mentén: α=állandó.

(1) - (2) $$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(a-\frac{\gamma-1}{2}u\right)}_{\beta}+(u-a)\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(a-\frac{\gamma-1}{2}u\right)}_{\beta}=0$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t}+(u-a)\frac{\partial \beta}{\partial x}=0$$ C_-=dx/dt=u-a irány mentén: β=állandó.

Karakterisztikák

C_+ és C_- karakterisztikus irányok, α és β Rieman-féle invariánsok.

Ha α és β adottak ... abból a és u meghatározható:

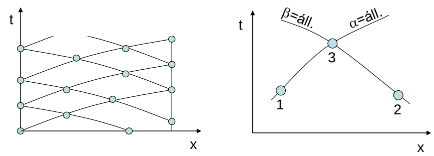
$$\alpha=a+\frac{\gamma-1}{2}u \qquad a=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\beta=a-\frac{\gamma-1}{2}u \qquad u=\frac{\alpha-\beta}{\gamma-1}$$

a-ból pedig meghatározható a többi állapotjelző:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^2=\frac{T}{T_0}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}$$

Numerikus megoldás



$$\alpha_3 = \alpha_1 \qquad \beta_3 = \beta_2 \quad \longrightarrow \quad a_3 = \frac{\alpha_3 + \beta_3}{2} \qquad u_3 = \frac{\alpha_3 - \beta_3}{\gamma - 1}$$

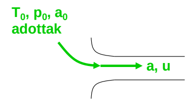
$$x_3 - x_1 = 0.5\left[(u_3 + a_3) + (u_1 + a_1)\right](t_3 - t_1) + o(\Delta t^2)$$

$$x_3 - x_2 = 0.5\left[(u_3 - a_3) + (u_2 - a_2)\right](t_3 - t_2) + o(\Delta t^2)$$

t_3, x_3 számítható.

Peremfeltételek

Beáramlás nyitott csővégen: energiaegyenlet



$$T_0 = T + \frac{u^2}{2c_p} = \frac{a^2}{\gamma R} + \frac{u^2}{2c_p}$$

$$T_0 = \frac{1}{\gamma R}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{2c_p}\left(\frac{\alpha-\beta}{\gamma-1}\right)^2$$

Vagy α, vagy β már adott a belülről kifelé tartó karakterisztika alapján.
A másik Rieman-féle invariáns a fenti egyenletből meghatározható

Kiáramlás:

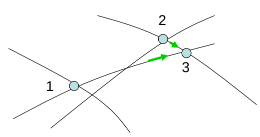
$$a_0 = a = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Zárt csővég:

$$u = 0 \longrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\gamma-1} = 0 \longrightarrow \alpha = \beta$$

Problémák

- A fizikai folyamattól függően a numerikus háló eldurvulhat.
- Azonos irányba tartó karakterisztikák metszhetik egymást.



Véges térfogatok módszerével

Ugyancsak az előbbi csőáramlás példájára alkalmazzuk.

Kontinuitás:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

Mozgásegyenlet:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho u^2 + p\right)}{\partial x} = 0$$

Állapotegyenlet:

$$p = \rho R T$$

Energiaegyenlet:

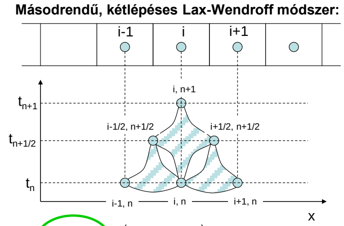
$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho u e + p u\right)}{\partial x} = 0 \qquad e = c_v T + \frac{u^2}{2}$$

Formális vektorokba rendezhetjük:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial x} = \underline{Q}$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{bmatrix} \qquad \underline{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u e + p u \end{bmatrix} \qquad \underline{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Másodrendű, kétlépéses Lax-Wendroff módszer:



1. lépés

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - \left(U_i^n + U_{i+1}^n\right)/2}{\Delta t/2} + \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{\Delta x} = \frac{Q_i^n + Q_{i+1}^n}{2}$$

U ismeretében számítható ρ, u, e. Pl: $\rho=(\rho u)/u$
Az állapotegyenletből számítható p.
Meghatározzuk F és Q értékeit az n+1/2 időszinten.

2. lépés

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = \frac{Q_{i-1/2}^{n+1/2} + Q_{i+1/2}^{n+1/2}}{2}$$

Időben előrehaladó explicit séma. Feltételesen stabilis:

$$\Delta t = \sigma \frac{\Delta x}{a + |u|} \qquad \sigma \le 1$$

A lökéshullámok környezetében erősen oszcillál az eredmény.
Korrigálni kell a fluxusokat, vagy mesterséges viszkozitást kell alkalmazni.

Egy hasonló módszer FLUENT-ben: density based solver + explicit time integration. Itt csak a σ értéke állítható be, az időlépést ebből számolja.

Peremfeltételek: A peremeken alkalmazhatunk például karakterisztikákat.