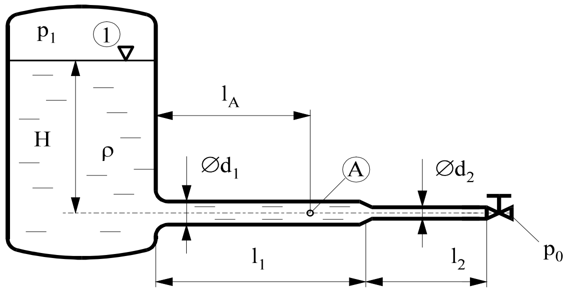
4.GYAKORLAT (8. oktatási hét) ÁRAMLÁSTAN BSc

Lehetséges témakörök a 8. heti 4. gyakorlatra:

- Bernoulli-egyenlet alkalmazása / stacioner és instacioner áramlásokra /
- Sebességmérés Pitot- ill. Prandtl-csővel, térfogatáram számítás pontonkénti sebességméréssel

PÉLDA (Bernoulli-egyenlet alkalmazása instacioner áramlásra)



Egy p_1=2,5bar nyomású, H=15m vízzel töltött zárt fedelű tartályhoz csatlakozó vízszintes tengelyű csővezeték végén egy alapállapotban teljesen zárt szelep található. **FELTÉTELEK**: μ=0; ρ=áll.; $A_{tartály} >> A_{cső}$; *a* tartályt a csővel és a csőszakaszokat egymással elhanyagolható hosszú csőidomok kötik össze, a szelep hossza is elhanyagolható. A csővégi szelep be- és kilépő keresztmetszetei a d_2 átmérőjű csőével azonosak.

ADATOK: $p_0 = 10^5\,Pa$ $\quad \rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ $\quad$ g=*10* N/kg $\quad$ H=15m

$d_1 = 50mm \quad d_2 = 25mm \quad \ell_1 = 10m \quad \ell_2 = 5m \quad \ell_A = 7m$

KÉRDÉSEK: A)Mekkora a víz „A” pontbeli kezdeti gyorsulása a nyitás t_0=0s időpillanatában? a_A=?

B)Mekkora a víz „A” pontbeli gyorsulása abban az időpillanatban, amikor a kiáramlási sebesség a stacioner kiáramlási sebességnek épp a háromnegyede?

MEGOLDÁS *(a lap túloldalán is folytathatja)*

A) Az instacioner esetre felírt Bernoulli-egyenlet az „1” és „2” pont közötti áramvonalon:

$$p_1 + \frac{\rho}{2}\cdot \mathrm{v}_1^2 + \rho\cdot g\cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}\cdot \mathrm{v}_2^2 + \rho\cdot g\cdot z_2 + \rho\cdot\int_1^2 \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}d\underline{s}$$

A z=0m referencia szintet bárhova felvehetjük, de célszerű a csőtengely magasságában.

	„1”=tartály vízfelszín	„2”=csővég
p [Pa]	250 000Pa	p_0=100 000Pa
v [m/s]	v_1=0 (tartály)	v_2=0 (nyitás pillanata!)
z [m]	15m	0m

Az „1” és „2” pontok közötti folyadék gyorsításához szükséges többletnyomás, azaz $\rho\cdot\int_1^2 \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}d\underline{s}$ értékének („instacioner tag”) kiszámítása: Mivel $A_{tartály} >> A_{cső}$, a tartályban a gyorsulás elhanygaolhatóan kicsi. Az átmeneti idomok hossza is elhanyagolható. A csőkeresztmetszet változik, de szakaszonként állandó, a gyorsulásokra alkalmazható a folytonossághoz hasonló ($a_1A_1=a_2A_2$) összefüggés. Ezzel

$$\rho\cdot\int_1^2 \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}d\underline{s} = \rho\cdot a_1\cdot l_1 + \rho\cdot a_2\cdot l_2$$

A jobboldalon az alsó indexek az „1”-es ill. „2”csőszakaszokra utalnak! A Bernoulli-egyenlet a nyitás időpillanatában érvényes (azaz a maximális értékű) $a_A=a_1$ gyorsulásra rendezhető: a_A=✓.

$$a_1 = \frac{p_1 - p_2 + \rho\cdot g\cdot(z_1 - z_2)}{\rho\cdot\left(l_1 + l_2\cdot\frac{A_1}{A_2}\right)} = \frac{250000 - 100000 + 1000\cdot 10\cdot 15}{1000\cdot\left(10 + 5\cdot\left(\frac{50}{25}\right)^2\right)} = \frac{300}{30} = 10\ \frac{m}{s^2}$$

B) A t=∞ stacioner állapotban a kiáramlási sebesség a Bernoulli-egyenlet rendezésével adódik:

$$\mathrm{v}_{2,stac} = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} + 2g(z_1 - z_2)} = \sqrt{300 + 300} = \sqrt{600}\frac{m}{s}\ \left(= 24{,}495\ \frac{m}{s}\right)$$

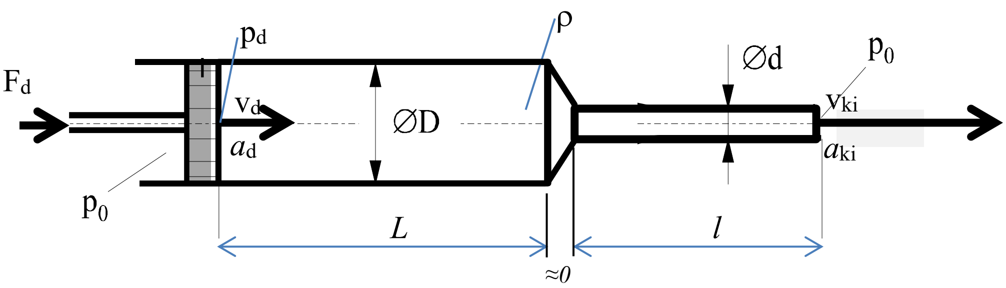
A Bernoulli-egyenlet instacioner alakja abban a $t_0<t<\infty$ időpillanatban felírva, amelyben v_2 a $v_{2,stac}$ háromnegyede (azaz $0{,}75\sqrt{600}m/s$), ismét csak az *a* gyorsulás ismeretlen:

	„1”=tartály vízfelszín	„2”=csővég
p [Pa]	250 000Pa	p_0=100 000Pa
v [m/s]	v_1=0 (tartály)	$v_2=0{,}75\sqrt{600}m/s$
z [m]	15m	0m

Az instacioner Bernoulli-egyenlet fenti adatokkal rendezhető: a_1=✓

$$a_1 = \frac{p_1 - p_2 - \frac{\rho}{2}\mathrm{v}_2^2 + \rho\cdot g\cdot z_1 - \rho\cdot g\cdot z_2}{\rho\cdot\left(l_1 + l_2\cdot\frac{A_1}{A_2}\right)} = \frac{150 - 168{,}75 + 150}{30} = 4{,}375\frac{m}{s^2}$$

PÉLDA (Bernoulli-egyenlet alkalmazása instacioner áramlásra)



A vízszintes tengelyű óriásfecskendőben víz van. A megfigyelt **t** időpillanatban (t_0<**t**<∞) a dugattyú sebessége v_d=2m/s, és gyorsulása, a_d=2m/s^2. A külső tér nyomása a dugattyú külső (bal) oldalán és a fecskendő kiáramlási keresztmetszetében is p_0=10^{5}Pa értékű.

Feltételek: Ideális közeg. A øD ill. ød átmérőjű, és *L* ill. *l* hosszúságú csőszakaszok közötti átmeneti idom (konfúzor) hossza elhanyagolható.

ADATOK: *L*=500mm; *l*=500mm; øD=50mm; ød=25mm, $\rho_{víz}$=10^{3}kg/m^3; p_0=10^{5}Pa

KÉRDÉSEK:

A) Mekkora a szabadba kiáramló vízsugár sebessége és gyorsulása? v_{ki}=? a_{ki}=?

B) Mekkora a dugattyú belső felületén a nyomás? p_d =?

C) Mekkora F_d erővel kell hatni a dugattyúra ebben a pillanatban? F_d =?

MEGOLDÁS *(a lap túloldalán is folytathatja)*

A) A csőkeresztmetszet változik, de szakaszonként állandó. Az összenyomhatatlan közegben a $v_1A_1=v_2A_2$ (folytonosság-tétel) alapján a sebesség $v_1=v_d$=2m/s értéke és a keresztmetszetek ismeretében kapjuk $v_{ki}=v_2=4\cdot v_1$=8m/s értékét. A gyorsulásokra is alkalmazható a folytonosság-tételhez hasonló összefüggés ($a_1A_1=a_2A_2$), ezzel $a_1=a_{dug}$=2m/s^2 ismeretében kapjuk meg $a_{ki}=a_2=4\cdot a_1$=8m/s^2 értéket.

B) A *t* időpillanatban az instacioner áramlási állapotra felírt Bernoulli-egyenlet az „1" (dugattyú belső felszíne) és „2" (csővég) pont közötti áramvonalon az alábbi:

$$p_1+\frac{\rho}{2}\cdot v_1^2+\rho\cdot g\cdot z_1=p_2+\frac{\rho}{2}\cdot v_2^2+\rho\cdot g\cdot z_2+\rho\cdot\int_1^2\frac{\partial v}{\partial t}d\underline{s}$$

A z=0m referencia szintet bárhova felvehetjük, de a példabeli vízszintes csőtengely esetén z=0m mindenhol, így nem befolyásolja eredményünket.

	„1"	„2"
p [Pa]	p_d=? (p_1=?)	p_0=100 000Pa
v [m/s]	$v_1=v_d$=2m/s	$v_2=4\cdot v_1$=8m/s
z [m]	0m	0m

Az „1" és „2" pontok közötti folyadék gyorsításához szükséges többletnyomás, azaz a ($\rho\cdot\int_1^2\frac{\partial v}{\partial t}d\underline{s}$) tag kiszámításához a következő megfontolások szükségesek. Mivel az átmeneti idom hossza elhanyagolható és a csőkeresztmetszet változik, de szakaszonként állandó, a csőhosszak pedig L_1=0,5m és L_2=0,5m, így:

$$\rho\cdot\int_1^2\frac{\partial v}{\partial t}d\underline{s}=\rho\cdot a_1\cdot L+\rho\cdot a_2\cdot l$$

Ezzel a keresett nyomás:

$$p_1=p_0+\frac{\rho}{2}\cdot v_2^2-\frac{\rho}{2}\cdot v_1^2+\rho\cdot a_1\cdot L+\rho\cdot a_2\cdot l$$

$$p_1=100000+32000-2000+1000+4000=135000Pa$$

C) A dugattyú külső (p_0) és belső (p_1) oldalán a nyomáskülönség ismert:

$\Delta p=p_1-p_0$=135000Pa–10^{5}Pa=35000Pa

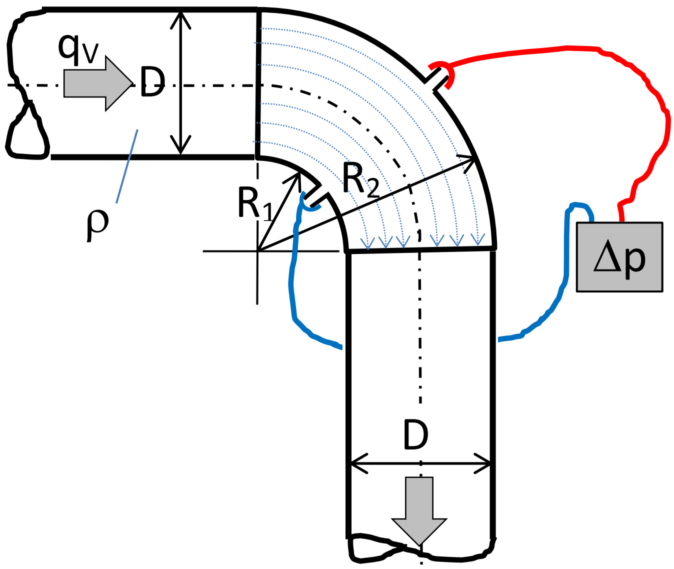
Ezzel az erő:

$F_d=\Delta p\cdot A_{dug}=(p_1-p_0)\cdot A_{dug}$ ahol $A_{dug}=D^2\pi/4$

F_d = 35000 · (0,05· 0,05· π/4) = 68,72 N

PÉLDA (Euler-egyenlet természetes koordinátarendszerben)

Egy ØD átmérőjű csővezetékben víz áramlik. A víz térfogatáramának közelítő mérésére a csővel azonos, állandó keresztmetszetű, 90° könyökidom nyomásmegcsapolásait használjuk. Az áramló közeg könyökidombeli áramvonalai az ábrán láthatók. A könyökidom oldalfali külső-belső nyomásmegcsapolásai között mért nyomáskülönbség $\Delta p_{1,2}$=16000Pa. A csőtengelyek a vízszintes síkban fekszenek.



Feltételek: stacioner állapot, ρ=áll., μ=0

ADATOK:

D=200mm; ρ=1000kg/m^3

R_1=100mm; R_2=300mm

KÉRDÉS: Az Euler-egyenlet természetes koordináta-rendszerben felírt normális irányú komponens-egyenlete segítségével

a) Indokolja, hogy melyik állítás helyes! $\Delta p_{1,2}=p_1-p_2$ vagy $\Delta p_{1,2}=p_2-p_1$?

b) Határozza meg a csőben áramló közeg átlagsebességét és térfogatáramát!

MEGOLDÁS

Euler-egyenlet természetes koordináta-rendszerben felírt n irányú komponens egyenlete:

$$-\frac{\mathrm{v}^2}{R}=g_n-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

A súlyerőt (erőtér hatását) elhanyagolva kapjuk $$\frac{\mathrm{v}^2}{R}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

A sugárirányú nyomásváltozás $$\frac{\partial p}{\partial n}=\frac{\rho \mathrm{v}^2}{R}$$

A sugárirányú nyomásváltozás az átlagos sugáron érvényes átlagsebességgel: $$\frac{p_2-p_1}{R_2-R_1}=\frac{\rho\bar{\mathrm{v}}^2}{\bar{R}}$$

Az átlagos sugár: $\bar{R}$=(R_1+R_2)/2=0,2m

A csőátmérő a sugárirányú távolság: R_2-R_1=D=0,2m

A mért nyomáskülönbségre rendezve: $$\Delta p=p_2-p_1=\rho\frac{\bar{\mathrm{v}}^2}{\bar{R}}(R_2-R_1)$$

Az átlagsebességre rendezve: $$\bar{\mathrm{v}}=\sqrt{\frac{\Delta p\cdot\bar{R}}{D\cdot\rho}}=\sqrt{\frac{16000\cdot 0{,}2}{0{,}2\cdot 1000}}=\sqrt{16}=4\,\mathrm{m/s}$$

A térfogatáram az átlagsebesség és a csőkeresztmetszet szorzata: $$q_V=\bar{\mathrm{v}}A$$

Ezzel: q_V=0,125663706 m^3/s

(≈ 7,54 m^3/perc ≈ 39452 m^3/h stb.)

(Természetesen kerekíteni szükséges az eredményt! pl. q_V=0,126 m^3/s)

PÉLDA (térfogatáram számítása sebességmérés alapján)

Meleg levegő áramlik egy 300*mm*×450*mm* téglalap keresztmetszetű légvezetékben, ahol PRANDTL-csővel mérést végzünk. Az n=6db, egyenlő nagyságú A_i részkeresztmetszetek súlypontjaiba egymás után behelyezett PRANDTL-csővel mért nyomások rendre:

Δp_i= 285, 295, 280, 285, 290, 270 [*Pa*]

Adatok: t_{lev}=37°C; R=287 J/(kgK), p=99500Pa

Kérdések: Mekkora a vezetékben áramló közeg átlagsebessége, térfogatárama és tömegárama?

MEGOLDÁS *(a lap túloldalán is folytathatja)*

Vezetékben áramló közeg azonos részterületekben mért sebességmérése alapján:

A mért $\Delta p_i = p_{din,i}$ alapján először külön minden pontban külön a v_i sebességet kiszámoljuk:

$$v_i = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p_i}{\rho_{lev}}}$$

majd azokból átlagsebesség számítható (hiszen azonosak a részterületek):

$$\bar{v} = \frac{\sum v_i}{N}$$

(Helytelen eredményt kapunk (elvi hiba!), ha először az átlagnyomást számolnánk ki és abból az áramlási sebességet, mivel a gyökök átlaga nem egyenlő az átlag gyökével!)

Az átlagsebesség ismeretében a q_V [m³/s] térfogatáram:

$$q_V = \bar{v} \cdot A$$

majd gáztörvénnyel a levegő sűrűsége: (t→T átváltásra ügyelni! T_{lev}=273+37=310˚C

$$\rho_{lev} = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{99500}{287 \cdot 310}$$

Végül a q_m [kg/s] tömegáram is számítható.

$$q_m = \rho_{lev} \cdot q_V$$