# 1.fak.ZH

# A/B

Név:.................... MEGOLDÁS ................... NEPTUN kód:.............................

Alapszak:...............................................................................................

Aláírás:............................................ÜLŐHELY sorszám: K155/...............

PONTSZÁM:

***Toll és számológép kivételével semmilyen segédeszköz nem használható!***

## 1.FELADAT (ELMÉLET, max.5pont = 5×1pont. Csak a tökéletesen jó válasz ér 1 pontot)

**1.1) <u>Jelölje egyértelműen (pl. karikázza be) az összes helyes válasz betűjelét!</u>**

Newtoni folyadékokban a deformációsebesség és csúsztatófeszültség közötti arányossági tényező az alábbi:

**H)** $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ **A)** $\dot{\gamma}$ **J)** $\mu$ **L)** $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$ **Ó)** $(\nu \cdot \rho)$

**1.2) <u>Jelölje egyértelműen (pl. karikázza be) az összes helyes válasz betűjelét!</u>**

A hidrosztatika alapegyenletének helyes alakja az alábbi:

**E)** $\underline{g} = -\mathrm{grad}U$ **S)** $\underline{g} = \mathrm{grad}p$ **Z)** $\rho\underline{g} = \mathrm{grad}p$ **E)** $U = \acute{a}lland\acute{o}$ **S)** $\frac{p}{\rho} + U = \text{állandó}$

**1.3) <u>Jelölje egyértelműen (pl. karikázza be) az összes helyes válasz betűjelét!</u>**

*„Görbült áramvonal adott pontjában a nyomás a görbületi középpontból normális irányban kifelé haladva nő."*

Ezen állítás magyarázata a(z)

**T)** folytonosság tételéből vezethető le.
**E)** Newton-féle viszkozitási törvényből vezethető le.
**R)** hidrosztatika alapegyenletéből vezethető le.
**E)** Euler-egyenletből vezethető le.
**M)** Bernoulli-egyenletből vezethető le.

**1.4) <u>Jelölje egyértelműen (pl. karikázza be) az összes helyes válasz betűjelét!</u>**

A $p_ö$ össznyomás, $p_{stat}$ statikus nyomás és $p_{din}$ dinamikus nyomás között az alábbi összefüggés(ek) helyes(ek):

**U)** $p_ö=p_{stat}-p_{din}$ **F)** $p_ö=p_{stat}+p_{din}$ **L)** $p_ö=p_{din}-p_{stat}$ **A)** $p_{stat}=p_ö-p_{din}$ **T)** $p_{din}=p_ö-p_{stat}$

**1.5) <u>Jelölje egyértelműen (pl. karikázza be) az összes helyes válasz betűjelét!</u>**

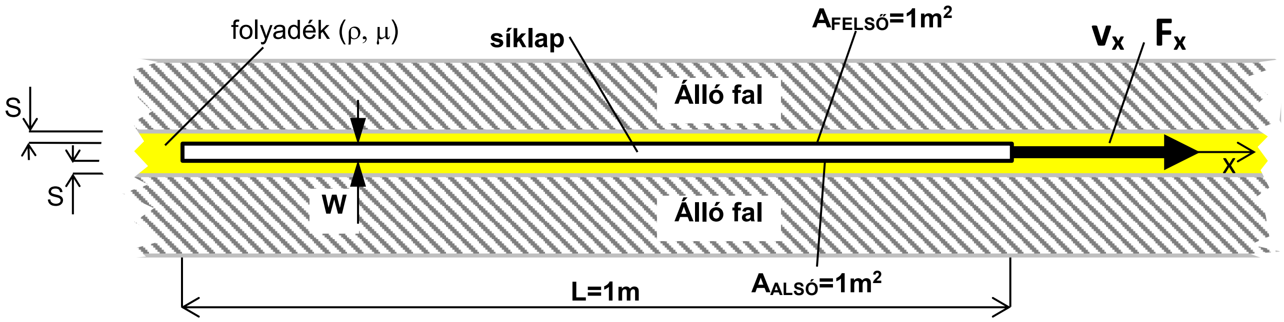
**T)** A folytonosság tétel általános alakjában a $\rho$ sűrűség lokális megváltozásának térfogati integrálja szerepel.
**I)** A kontinuitás tétel általános alakjában nem szerepel a p nyomás.
**K)** A folytonosság tétel általános alakjában a $\underline{v}$ sebesség lokális megváltozásának térfogati integrálja szerepel.
**L)** A kontinuitás tételének $\rho$=állandó esetre vonatkozó egyszerűsített alakja: $\mathrm{div}\underline{v} = 0$.
**A)** A folytonosság tételének stacioner állapotra vonatkozó egyszerűsített alakja: $\mathrm{div}(\rho\underline{v}) = 0$.

**1.6) <u>+1 plusz pontért: A fenti jó megoldások betűit egymás után írva egy mai születésnapost kapunk:</u>**

**J Ó Z S E F   A T T I L A (1905.04.11.-1937.12.03.)**

## 2.FELADAT (10pont)

Az alábbi ábrán oldalnézeti metszetben látható vékony síklapot *x* irányban húzzuk a két álló fal közötti résben. A síklap feletti és alatti vékony résméret állandó S=0,1mm értékű. Az $A_{FELSŐ}=A_{ALSÓ}=1m^2$ méretű, négyzet (1m×1m) alakú, W=3mm vastagságú merev, elhanyagolható tömegű síklap állandó $v_x$=5m/s sebességgel mozog. A két párhuzamos álló fallal határolt teret állandó $\rho_{víz}$=1000kg/m$^3$ sűrűségű és $\mu_{víz}$=0,001kg/(m·s) viszkozitású víz tölt ki.




**FELTÉTELEK**: lineáris sebességprofil a résben; newtoni folyadék; a síklap felső és alsó felületei és a falak közötti résben ébredő viszkózus veszteségen kívül minden más veszteséget hanyagoljon el.

**KÉRDÉSEK:** **A)**Számítsa ki a síklap és álló fal közötti résben ébredő csúsztatófeszültség értékét! τ=?

**B)**Számítsa ki, mekkora vontató erő és vontatási teljesítmény szükséges ehhez az állapothoz! $F_x$=?, $P_{vont}$=?

**C)**Mekkora lenne a síklap mozgási sebessége ugyanekkora vontatási teljesítmény esetén, ha nem víz, hanem olaj ($\rho_{olaj}$=800kg/m$^3$, $\nu_{olaj}$=1,25·10$^{-5}$ m$^2$/s) töltené ki a rést? Válaszát indokolja! $v_x$=?

**MEGOLDÁS** (A lap túloldalán is folytathatja a megoldást)

**A)**

A $\tau$ csúsztatófeszültség kiszámítható Newton viszkozitási törvénye alapján:

$$\tau=\mu\cdot\dot{\gamma}\cong\mu\cdot\frac{\partial v_x}{\partial y}=\mu_{víz}\cdot\frac{v_x-v_{fal}}{S}=0{,}001\frac{\mathrm{kg}}{m\cdot s}\cdot\frac{5\frac{\mathrm{m}}{s}-0\frac{\mathrm{m}}{s}}{0{,}0001m}=50Pa$$

**B)**

Az $F_x$ vontató erő az alsó és a felső résben ébredő súrlódó erő összegével egyenlő, amely a csúsztatófeszültség alapján:

$$F_x=\tau\cdot(A_{\mathrm{ALSÓ}}+A_{\mathrm{FELSŐ}})=50Pa\cdot(1m^2+1m^2)=100N$$

A $P_{vont}$ vontatási teljesítmény ezzel:

$$P_{vont}=F_x\cdot v_x=100\mathrm{N}\cdot 5\frac{\mathrm{m}}{s}=500W$$

**C)**

A $P_{vont}$ vontatási teljesítmény kifejezés a sebesség négyzetével ($P\sim v_x^2$) és a dinamikai viszkozitással ($P\sim\mu$) egyenesen arányos:

$$P_{vont}=F_x\cdot v_x=\tau\cdot(A_{\mathrm{ALSÓ}}+A_{\mathrm{FELSŐ}})\cdot v_x=\mu\cdot\frac{v_x-0}{S}\cdot(A_{\mathrm{ALSÓ}}+A_{\mathrm{FELSŐ}})\cdot v_x=\frac{\mu\cdot(A_{\mathrm{ALSÓ}}+A_{\mathrm{FELSŐ}})}{S}\cdot v_x^2$$

Az olaj dinamikai viszkozitása a megadott sűrűség és kinematikai viszkozitás ismeretében számítható:

$$\mu_{olaj}=\nu_{olaj}\cdot\rho_{olaj}=1{,}25\cdot 10^{-5}\frac{m^2}{s}\cdot 800\frac{\mathrm{kg}}{m^3}=0{,}01\frac{\mathrm{kg}}{m\cdot s}$$

A vontatási sebességet kifejezve, majd adatok behelyettesítése után kapjuk az olaj esetére a vontatási sebességet:

$$v_{x,olaj}=\sqrt[2]{\frac{P_{vont}\cdot S}{\mu_{olaj}\cdot(A_{\mathrm{ALSÓ}}+A_{\mathrm{FELSŐ}})}}=\sqrt[2]{\frac{500W\cdot 0{,}0001m}{0{,}01\frac{\mathrm{kg}}{m\cdot s}\cdot(1m^2+1m^2)}}=1{,}581\frac{\mathrm{m}}{s}$$

Másik lehetséges megoldás: Mivel azonos vontatási teljesítmény áll rendelkezésre víz és olaj esetére is, így írható:

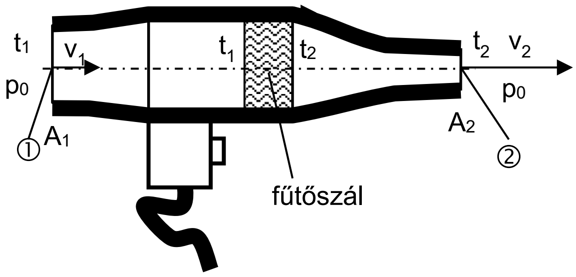
$$P_{vont,víz}=\frac{\mu_{víz}\cdot(A_{\mathrm{ALSÓ}}+A_{\mathrm{FELSŐ}})}{S}\cdot v_{x,víz}^2=\frac{\mu_{olaj}\cdot(A_{\mathrm{ALSÓ}}+A_{\mathrm{FELSŐ}})}{S}\cdot v_{x,olaj}^2=P_{vont,olaj}$$

$$\mu_{víz}\cdot v_{x,víz}^2=\mu_{olaj}\cdot v_{x,olaj}^2$$

$$v_{x,olaj}=v_{x,víz}\cdot\sqrt[2]{\frac{\mu_{víz}}{\mu_{olaj}}}=5\frac{\mathrm{m}}{s}\cdot\sqrt[2]{\frac{0{,}001\frac{\mathrm{kg}}{m\cdot s}}{0{,}01\frac{\mathrm{kg}}{m\cdot s}}}=5\frac{\mathrm{m}}{s}\cdot\sqrt[2]{\frac{1}{10}}=1{,}581\frac{\mathrm{m}}{s}$$

## 3.FELADAT (10pont)

Az ábrán látható hőlégfúvó áramcsőnek tekinthető: csak az $A_1$=90cm$^2$ belépő és az $A_2$=30cm$^2$ kilépő keresztmetszetén nyitott. Stacioner áramlási állapotban a kiáramló levegő átlagsebessége ismert: $v_2$=9m/s. A hőlégfúvóban lévő fűtőszál a beszívott környezeti $t_1$=17°C levegőt $t_2$=75°C-ra fűti fel.




**FELTÉTELEK:** stacioner állapot, a sűrűség kiszámításának szempontjából a nyomás mindenhol $p_0$=10$^5$Pa értékű.

**ADATOK:** R=287 J/(kgK)

**KÉRDÉSEK**: **A)** Határozza meg a hőlégfúvó be- ill. kilépő keresztmetszeteiben a térfogatáramokat,
**B)** a belépő levegő átlagsebességét,
**C)** és a hőlégfúvón átáramló levegő tömegáramát!

**MEGOLDÁS** (A lap túloldalán is folytathatja a megoldást)

A folytonosság tétele változó sűrűségű közeg stacioner áramlására. A $q_m$ [kg/s] tömegáram állandó, így megegyezik a belépő és kilépő keresztmetszetekben:

$$q_m = \text{állandó}$$
$$q_{m,1} = q_{m,2}$$
$$\rho_1 \cdot \bar{v}_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot \bar{v}_2 \cdot A_2$$
$$\rho_1 \cdot q_{V,1} = \rho_2 \cdot q_{V,2}$$

A mellékelt ábra szerint az „1" keresztmetszeten ($A_1$=90cm$^2$) beáramló környezeti hideg (17˚C) levegő a hőlégfúvó fűtőszálain felmelegedve (75˚C) a „2" $A_2$=30cm$^2$ (harmad akkora) keresztmetszeten áramlik ki. Ez egy áramcső, más be- vagy kiáramlás nincs. A $q_m$[kg/s] tömegáram állandó, a $q_V$[m$^3$/s] térfogatáram viszont nem, mivel az áramlási sebesség a hőmérséklet- és a keresztmetszet-változás miatt is változik. A be- ill. kiáramló levegő sűrűsége $p_1 = p_2 = p_0 = 10^5 Pa$ feltétellel számítható:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R\cdot T_1} = \frac{100000}{287\cdot(273+17)} = 1{,}201490\frac{kg}{m^3}$$
$$\rho_2 = \frac{p_2}{R\cdot T_2} = \frac{100000}{287\cdot(273+75)} = 1{,}001242\frac{kg}{m^3}$$

A keresztmetszetek pedig ismertek:

$A_1 = 90cm^2 = 0{,}009m^2$; $A_2 = 30cm^2 = 0{,}003m^2$;

Kilépő keresztmetszetben a sebesség ismert: $\bar{v}_2 = 9\frac{m}{s}$.

Kilépő keresztmetszetben a térfogatáram: $q_{V,2} = \bar{v}_2 A_2 = 9\frac{m}{s}\cdot 0{,}003m^2 = 0{,}027\frac{m^3}{s}$

A tömegáram: $q_{m,2} = \rho_2 \cdot q_{V,2} = 1{,}001242 kg/m^3 \cdot 0{,}027\frac{m^3}{s} = 0{,}027033522\frac{kg}{s}$

Mivel a tömegáram álandó, így azonos a belépő és kilépő keresztmetszetben ($q_m = q_{m,1} = q_{m,2}$). Ezzel kapjuk:

Belépő keresztmetszetben a térfogatáram: $q_{V,1} = \frac{q_m}{\rho_1} = \frac{0{,}027033522\frac{kg}{s}}{1{,}201490 kg/m^3} = 0{,}0225\frac{m^3}{s}$

Belépő keresztmetszetben a sebesség: $\bar{v}_1 = \frac{q_{V,1}}{A_1} = \frac{0{,}0225\frac{m^3}{s}}{0{,}009m^2} = 2{,}5\frac{m}{s}$

Kerekítés nélkül a belépő sebesség: $\bar{v}_1 = \frac{\rho_2\cdot\bar{v}_2\cdot A_2}{\rho_1\cdot A_1} = \bar{v}_2\cdot\frac{\frac{p_2}{R\cdot T_2}}{\frac{p_1}{R\cdot T_1}}\cdot\frac{A_2}{A_1} = \bar{v}_2\cdot\frac{T_1}{T_2}\cdot\frac{A_2}{A_1} = 9\cdot\frac{290}{348}\cdot\frac{30}{90} = 2{,}5\frac{m}{s}$

Összefoglalva:

| | | „1" (belépés) | „2" (kilépés) |
|---|---|---|---|
| **Nyomás** | **p [Pa]** | 100000 | 100000 |
| **Hőmérséklet** | **t [˚C]** | 17 | 75 |
| **Hőmérséklet** | **T [K]** | 290 | 348 |
| **Sűrűség** | **ρ [kg/m$^3$]** | 1,201490 | 1,001242 |
| **Sebesség** | **v [m/s]** | 2,5 | 9 |
| **Keresztmetszet** | **A [m$^2$]** | 0,009 | 0,003 |
| **Térfogatáram** | **$q_V$[m$^3$/s]** | 0,0225 | 0,0270 |
| **Tömegáram** | **$q_m$[kg/s]** | 0,027033522 | 0,027033522 |

**4.FELADAT (10pont)**

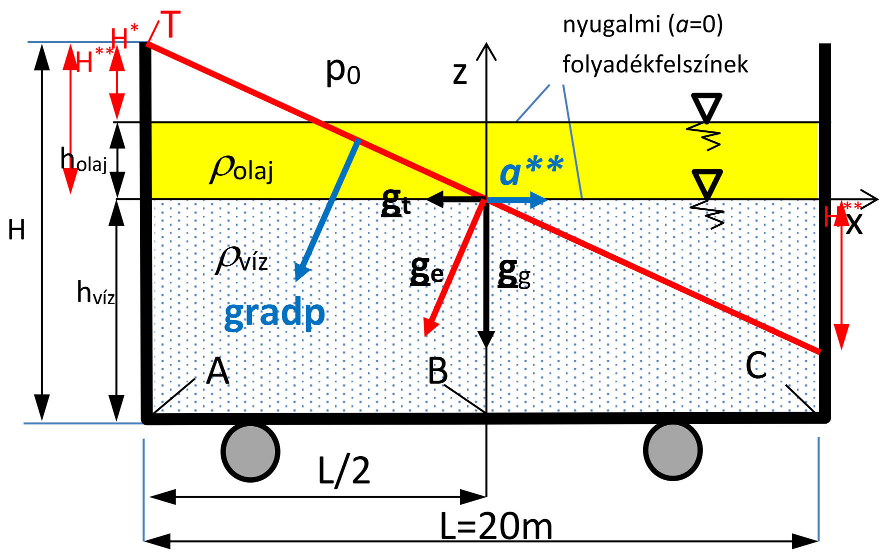
Egy L=20m hosszú, H=5m magas, felül nyitott $p_0=10^5$Pa nyomásra nyitott tartálykocsiba $h_{víz}$=3m magasságig vizet ($\rho_{víz}$=1000kg/m$^3$), majd fölé $h_{olaj}$=1m ($\rho_{olaj}$=800kg/m$^3$) olajat töltünk. A nyugalmi folyadékfelszínek vízszintesek.

**FELTÉTELEK**: ideális közeg, nem keveredő folyadékok. (Az ábra nem méretarányos.)

**ADATOK**: g=10N/kg

**KÉRDÉSEK:**

**A)** Mekkora gyorsulással kell mozgatni a tartálykocsit vízszintes *x* irányban, hogy abból minden olaj kifolyjon és csak víz maradjon? *a*=?




**B)** Rajzolja be az ábrába az A) kérdésben kiszámolt gyorsulással mozgó tartálykocsi esetén a gyorsuló folyadékfelszín alakját és a nyomásgradiens vektort!

**C)** Számolja ki az A) kérdésben kiszámolt gyorsulással mozgó tartálykocsi esetén az „A" pontbeli túlnyomást, illetve a „B" és „C" pontok közötti nyomáskülönbséget!

**MEGOLDÁS** (A lap túloldalán is folytathatja a megoldást)

**Rövid megoldás:**

**A)** Mivel a felszín egyenlete $z=-\frac{a}{g_g}\cdot x$, ezért $a^{**}=-\frac{z_T}{x_T}\cdot g_g=-\frac{2m}{-10m}\cdot 10\frac{N}{kg}=2\frac{m}{s^2}$.

**B) lásd ábra**

**C)** A ($p_A$-$p_0$) túlnyomás: $(p_A-p_0)=\rho\cdot g_g\cdot(z_T-z_A)=1000\cdot 10\cdot\left(2-(-3)\right)=1000\cdot 10\cdot 5=50000Pa$

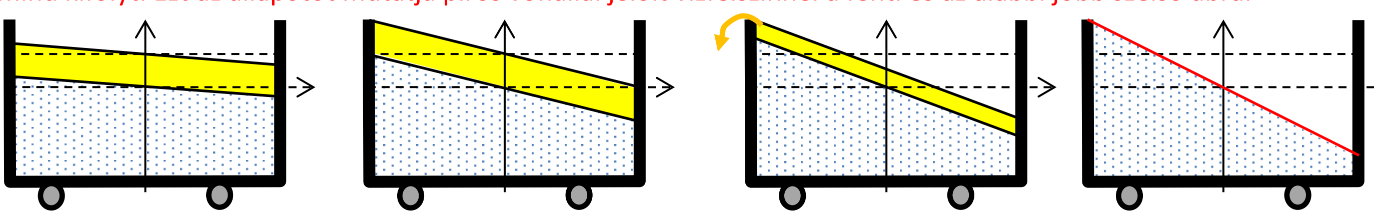
A ($p_B$-$p_C$) nyomáskülönbség: $(p_B-p_C)=\rho\cdot a^{**}\cdot(z_C-z_B)=1000\cdot 2\cdot\left(10-(0)\right)=1000\cdot 2\cdot 10=20000Pa$

**Részletes megoldás:**

A)Nehézségi és tehetetlenségi erőtér esetén az eredő erőtér térerősségvektora $\underline{g_e}=\underline{g_g}+\underline{g_t}$, és eredő potenciálfüggvénye $U_e=U_g+U_t$ , azaz $U_e=g_g\cdot z+a\cdot x$ . Ha a kocsit elkezdjük x irányban gyorsítani jobbra (lásd ábra), akkor a gyorsuló folyadék felszín egyenlete:

$$z=-\frac{a}{g_g}\cdot x$$

Fenti azt jelenti, hogy jobbra gyorsítva a tartályt (*a* pozitív értéke esetén) a felszín az (x,z) koordinátarendszerben egy negatív meredekségű egyenes, amely a nyugalmi vízszinthez képest az L/2 félhosszbeli folyadékfelszín középpont körül fordul el. Ez a helyben maradó pont legyen az (x,z) koordinátarendszer 0($x_0$,$z_0$) középpontja, ahol $x_0$=0m, $z_0$=0m. Mivel elegendően nagy gyorsulás esetén az olaj majd kifolyik, az olajréteg vastagsága csökken, így célszerű a víz és olaj folyadékfelszín határra felvenni 0($x_0$,$z_0$) pontot. A gyorsulás növelésével addig nem folyik ki még olaj, amíg a baloldalon felfelé H*=H-($h_{víz}$+$h_{olaj}$)=5m-(3m+1m)=5m-4m=1m-t nem emelkedik az olaj (a jobboldalon pedig azonos mértékben 1 métert nem süllyed). Az olaj akkor kezd el kifolyni a tartályból, amikor az *a* gyorsulás pont meghaladja azt a határértéket (*a**-gal jelölve), amikor az olaj felszíne eléri tartálykocsi baloldali fal felső „T" pontját. Ennél nagyobb gyorsulásra az olaj átbukik a „T" ponton és balra távozik a tartályból. Minél nagyobb az *a* gyorsulás, annál több olaj tud kifolyni az elforduló folyadékfelszín miatt. Amikor a gyorsulás eléri az *a** határértéket, az olajfelszín eléri a „T" pontot (eredeti nyugalmi olajszintről H*=1 méter emelkedve). Ezután, ahogy nő a gyorsulás, a kifolyó olajmennyiség miatt egyre kevesebb olajréteg marad a víz felett. Elérve az *a*** gyorsulást, csak víz marad a tartálykocsiban, olaj nincs, mert mind kifolyt. Ezt az állapotot mutatja piros vonallal jelölt vízfelszínnel a fenti és az alábbi jobb szélső ábra.



0<*a*<*a** *a*=*a** *a**<*a*<*a*** *a*=*a***

Ha a gyorsulás eléri azt a határértéket (jelölje ezt *a***), amikor a vízfelszín eléri a „T" pontot (eredeti nyugalmi vízszintről indulva H**=H-$h_{víz}$=5m-3m=2m-t emelkedve), akkor már egy csepp olaj sincs a tartályban, mind kifolyt. Ez a *a*** gyorsulás érték a kérdés. Az 0($x_0$,$z_0$) ponthoz képest ekkor „T" pont koordinátái az : $z_T$=H**=2m és $x_T$=-10m. A felszín egyenletébe helyettesítve és rendezve kapjuk a keresett gyorsulást:

$$a^{**} = -\frac{z_T}{x_T} \cdot g_g = -\frac{2m}{-10m} \cdot 10\frac{N}{kg} = 2\frac{m}{s^2}$$

B)A folyadékfelszín alakja: lásd ábra piros vonal a** esetén. A grad*p* nyomásgradiens vektor párhuzamos az eredő erőtér térerősségvektorával és egyben merőleges a folyadékfelszínre.

C)Hidrosztatika alapegyenlete

$$\frac{p}{\rho} + U = állandó$$

*Az a*** gyorsulással mozgó tartálykocsihoz rögzített (x,z) relatív koordinátarendszert alkalmazunk. Ekkor már csak víz van a tartályban. Az „A" pont ($p_A$-$p_0$) túlnyomásának meghatározásához legcélszerűbb egy, az „A" pont „fölötti", a vízfelszínen lévő, ismert $p_0$ nyomású pontot választani, hogy csak az egyik (most a $g_g$ vektorral jellemzett nehézségi) erőtér mentén való elmozdulást (azaz függőleges vízoszlop hidrosztatikai nyomásából adódó túlnyomást) kelljen figyelembe venni. Ezt a pontot jelöli a „T" az ábrán. A hidrosztatika alapegyenlete „A" és „T" pontra:

$$\frac{p_A}{\rho} + U_A = \frac{p_T}{\rho} + U_T$$

Az erőtér potenciálnak az „A" és a „T" pontbeli értéke az (x,z) koordinátarendszerben, $g_g$ nehézségi erőtér és *a*** gyorsulás esetén:

$$U_A = g_g \cdot z_A + a^{**} \cdot x_A$$
$$U_T = g_g \cdot z_T + a^{**} \cdot x_T$$

Ezetek behelyettesítve a hidrosztatika alapegyenletébe kapjuk:

$$\frac{p_A}{\rho} + (g_g \cdot z_A + a^{**} \cdot x_A) = \frac{p_T}{\rho} + (g_g \cdot z_T + a^{**} \cdot x_T)$$

Mivel úgy vettük fel a „T" pontot, hogy „A" pont „felett" helyezkedjen el, így x koordinátájuk azonos, $x_A = x_T = -10m$, ezért a tehetetlenségi erőtéri potenciált kifejező tag ($U_t = a^{**} \cdot x_T$) azonos, fenti egyenletből kiesik, marad:

$$\frac{p_A}{\rho} + g_g \cdot z_A = \frac{p_T}{\rho} + g_g \cdot z_T$$

Az „A" pont keresett ($p_A$-$p_0$) túlnyomására rendezve kapjuk:

$$(p_A - p_0) = \rho \cdot g_g \cdot (z_T - z_A) = 1000\frac{kg}{m^3} \cdot 10\frac{N}{kg} \cdot \big(2m - (-3m)\big) = 1000 \cdot 10 \cdot 5m = 50000Pa$$

A „B" és „C" pontok ($p_B$-$p_C$) nyomáskülönbségének meghatározásához fentiekhez hasonlóan járhatunk el, mivel ismert a „B" pont feletti vízoszlop 3m magassága egy képzeletbeli vízfelszíni B' pontig (ez egyébként az origó), és ismert a „C" feletti vízoszlop 1m magassága is egy képzeletbeli C fölötti C' vízfelszíni pont között. Mindegyik pont x és z koordinátája ismert, ezzel külön a pontokban a túlnyomások, majd a ($p_B$-$p_C$) nyomáskülönbség meghatározható.

$$(p_B - p_0) = \rho \cdot g_g \cdot (z_{B'} - z_B) = 1000\frac{kg}{m^3} \cdot 10\frac{N}{kg} \cdot \big(0m - (-3m)\big) = 1000 \cdot 10 \cdot 3m = 30000Pa$$

$$(p_C - p_0) = \rho \cdot g_g \cdot (z_{C'} - z_C) = 1000\frac{kg}{m^3} \cdot 10\frac{N}{kg} \cdot \big(-2m - (-3m)\big) = 1000 \cdot 10 \cdot 1m = 10000Pa$$

$$(p_B - p_C) = 30000Pa - 10000Pa = 20000Pa$$

Meghatározhatjuk a ($p_B$-$p_C$) nyomáskülönbséget a „B" és „C" pontokra felírt a hidrosztatika alapegyenletéből is.

$$\frac{p_B}{\rho} + U_B = \frac{p_C}{\rho} + U_C$$

$$\frac{p_B}{\rho} + (g_g \cdot z_B + a^{**} \cdot x_B) = \frac{p_C}{\rho} + (g_g \cdot z_C + a^{**} \cdot x_C)$$

Mivel „B" és „C" pontok azonos ($z_B = z_C = -3m$) magasságban helyezkednek el, így most nem a tehetetlenségi, hanem a nehézségi erőtéri potenciált kifejező tag ($U_g = g_g \cdot z$) esik ki fenti egyenletből.

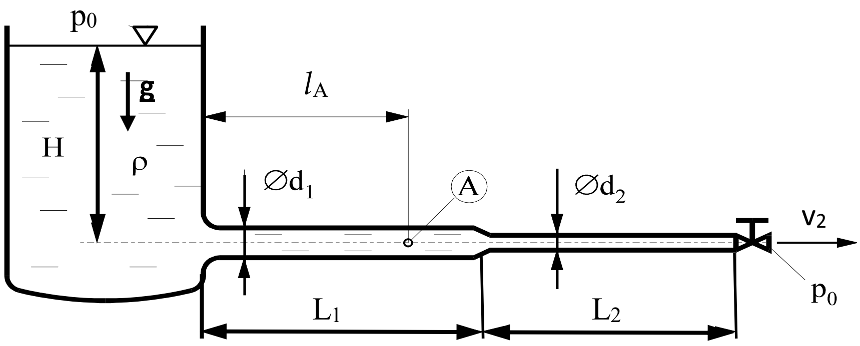
$$\frac{p_B}{\rho} + (a^{**} \cdot x_B) = \frac{p_C}{\rho} + (a^{**} \cdot x_C)$$

Ezt a keresett ($p_B$-$p_C$) nyomáskülönbségre rendezve természetesen ugyanakkora értéket kapunk.

$$(p_B - p_C) = \rho \cdot a^{**} \cdot (z_C - z_B) = 1000\frac{kg}{m^3} \cdot 2\frac{m}{s^2} \cdot \big(10m - (0m)\big) = 1000 \cdot 2 \cdot 10m = 20000Pa$$

## 5.FELADAT (10pont)+(5pont)

Egy felül $p_0$=1bar légköri nyomásra nyitott, H=20m szintig vízzel töltött tartályhoz alul két különböző átmérőjű, azonos hosszúságú, vízszintes tengelyű csőszakasz csatlakozik. A csővégen lévő gömbcsap teljesen nyitott a $p_0$ nyomású szabadra. **FELTÉTELEK**: stacioner áramlási állapot; ideális közeg; $A_{tartály}$>>$A_{cső}$; az átmeneti idomok és a gömbcsap hosszúsága elhanyagolható; A gömbcsap be- és kiáramlási keresztmetszete azonos a csatlakozó csőével. (Az ábra nem méretarányos.)




**ADATOK:** $p_0=10^5$Pa; $\rho$=1000kg/m$^3$; $d_1$=100mm; $d_2$=50mm; g=10N/kg; $L_1$=10m; $L_2$=10m; $l_A$=7,5m

**KÉRDÉSEK:**

**A)** Számítsa ki az „A” pontbeli áramlási sebességet, a statikus nyomást és a dinamikus nyomást!

**B) +5 PONTÉRT!)** Az „A” pont kiszámolt statikus nyomása megnő vagy lecsökken, ha a második ($L_2$) csővezetékszakaszt függőlegesen lefelé fordítva szereljük fel? (minden egyéb adat azonos) Válaszát számítással indokolja!

**MEGOLDÁS** (A lap túloldalán is folytathatja a megoldást)

**A)**

Mivel az „A” pontban sem a nyomást sem a sebességet nem ismerjük, ezért először kiszámoljuk a csővégi kiáramlási sebességet, majd a folytonosságot alkalmazva az „A” keresztmetszetre a sebesség átszámítható.

A tartály folyadékfelszín egy pontja („1”) és a kiáramlási keresztmetszetben felvett („2”) pont közötti áramvonalon felírva a Bernoulli-egyenlet megadott feltételeknek megfelelő alakját:

$$p_1+\frac{\rho}{2}v_1^2+\rho g z_1=p_2+\frac{\rho}{2}v_2^2+\rho g z_2$$

Mivel $p_1=p_2=p_0$, így a csővégi kiáramlási sebesség:

$$v_2=\sqrt{2gH}=\sqrt{2\cdot 10\cdot 20}=\sqrt{400}=20m/s$$

A folytonosság tételét a kilépési „2” és az „A” pont között felírva kapjuk az „A” pontbeli áramlási sebességet:

$$v_A=v_2\cdot\frac{A_2}{A_A}=v_2\cdot\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2=20\cdot\left(\frac{50}{100}\right)^2=20\cdot\frac{1}{4}=5m/s$$

Az „A” pont statikus nyomása pl. az „A” pont és a „2” pont közötti áramvonalra felírt Bernoulli-egyenletből számítható:

$$p_A+\frac{\rho}{2}v_A^2+\rho g z_A=p_2+\frac{\rho}{2}v_2^2+\rho g z_2$$

Fentit $z_A=z_2$ felhasználásával az „A” pontbeli keresett $p_A$ statikus nyomásra rendezve kapjuk:

$$p_A=p_0+\frac{\rho}{2}v_2^2-\frac{\rho}{2}v_A^2=100000+\frac{1000}{2}20^2-\frac{1000}{2}5^2=287500Pa$$

Az „A” pontbeli statikus nyomást pl. a tartály folyadékfelszín és az „A” pont közötti áramvonalra felírt Bernoulli-egyenletből is megkaphatjuk:

$$p_1+\frac{\rho}{2}v_1^2+\rho g z_1=p_A+\frac{\rho}{2}v_A^2+\rho g z_A$$

Fentit $H=z_1-z_A$ és $v_1\approx 0$ felhasználásával az „A” pon keresett $p_A$ statikus nyomására rendezve kapjuk:

$$p_A=p_0+\rho g H-\frac{\rho}{2}v_A^2=100000+1000\cdot 10\cdot 10-\frac{1000}{2}5^2=287500Pa$$

Az „A” pont dinamikus nyomása ezzel kiszámolható:

$$p_{A,din}=\frac{\rho}{2}v_A^2=\frac{1000}{2}5^2=12500Pa$$

**B)**

A csővég (kilépő keresztmetszet „2” pont) ekkor $L_2$=10m-rel lejjebb kerül, ezért a kiáramlási sebesség megnő:

$$v_2{}'=\sqrt{2g(H+L_2)}=\sqrt{2\cdot 10\cdot(20+10)}=\sqrt{600}=24{,}495m/s$$

A kontinuitás miatt így az „A” keresztmetszetben is megnő a sebesség ($v_A<v_A{}'$) és így a dinamikus nyomás is ($p_{A,din}<p_{A,din}{}'$), tehát az „A” pontbeli statikus nyomás lecsökken ($p_A>p_A'$).

$$v_A{}'=v_2{}'\cdot\frac{A_2}{A_A}=v_2{}'\cdot\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2=24{,}495\cdot\left(\frac{50}{100}\right)^2=6{,}124m/s$$

$$p_{A,din}{}'=\frac{\rho}{2}v_{A'}^2=\frac{1000}{2}6{,}124^2=18750Pa$$

$$p_A'=p_0+\rho g H-\frac{\rho}{2}v_{A'}^2=100000+1000\cdot 10\cdot 10-18750=281250Pa$$