5.GYAKORLAT (5. oktatási hét) ÁRAMLÁSTAN BSc

Téma: hidrosztatika

PÉLDA (hidrosztatika alapegyenlete egyszerűsítve)

Középiskolai tanulmányok alapján folyadékban g=10N/kg nehézségi erőtérben egy $\Delta h[m]$ szintkülönbség esetén a Δp[Pa] nyomáskülönbség számítható:

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

A $\rho = 1000 kg/m3$ sűrűségű vízben $\Delta h = 1m$ folyadékoszlop nyomása $\Delta p = 10000 Pa$.

A skalár hely szerinti megváltozásának rohamosságát a gradiens vektor jellemzi. Pl. két pont közötti nyomáskülönbség a *grad*p és a d$\underline{r}$ elmozdulásvektor ismeretében számítható.

$$\Delta p = \mathrm{grad} p \cdot d\underline{r}$$

Az erőtereket a $\underline{g}$ térerősségvektor jellemzi. A „g"-vel indexelt nehézségi erőtér térerősségvektora $\underline{g}_g = -g_g \underline{k}$, de emellett értelmezhetjük relatív rendszerben a „t"-vel indexelt tehetetlenségi erőtérre a $\underline{g}_t = -a \cdot \underline{i}$, a „c"-vel indexelt forgó (centrifugális) erőtérre pedig a $\underline{g}_c = \underline{r}\omega^2$ térerősségvektorokat is. Egy vagy több erőtér együttese esetét is figyelembe véve, fentiekből felírható általánosan az ún. hidrosztatika alapegyenlete az eredő erőtér térerősségvektorával (alsó index nélküli $\underline{g}$ jelölést használva):

$$\boxed{\mathrm{grad} p = \rho \cdot \underline{g}}$$

Az erőterekre bevezették az U erőtér potenciált, ami skalár mennyiség, így „kényelmes".

$$\underline{g} = -\mathrm{grad} U$$

A három erőtér jellemzői összefoglalva az alábbi táblázatban látható. Az erőtér potenciál U alakjait $\underline{g}$ behelyettesítése utáni integrálással kapjuk. Az integrálási konstansok a koordinátarendszer origójának helyes megválasztásával kinullázhatók. (z=0m, x=0m ill. r=0m esetén a *konst*=0.). Fentiekkel a hidrosztatika alapegyenlete átírható az alábbi alakokra, ahol több erőtér együttes fennállása esetén U az eredő potenciálfüggvény ($U = U_g + U_t$+U_c).

$$\frac{1}{\rho}\mathrm{grad} p + \mathrm{grad} U = 0$$

$$\frac{p}{\rho} + U = \acute{a}lland\acute{o}$$

$$\frac{p_1}{\rho} + U_1 = \frac{p_2}{\rho} + U_2$$

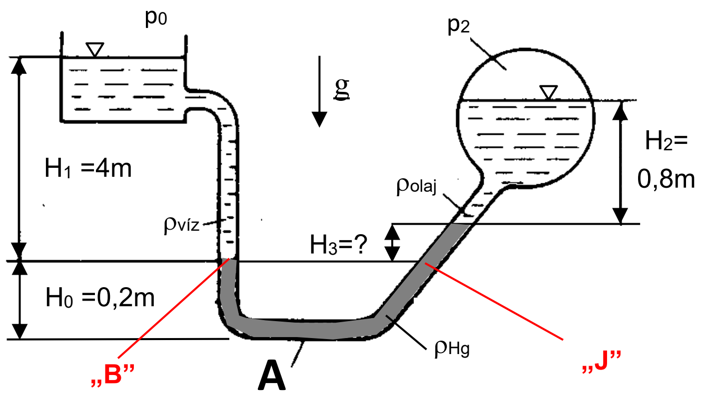
$$(p_2 - p_1) = \rho(U_1 - U_2)$$

erőtér:	nehézségi	tehetetlenségi	forgó
térerősség-vektor:	$\underline{g}_g = -g_g \underline{k}$	$\underline{g}_t = -a \cdot \underline{i}$	$\underline{g}_c = \underline{r}\omega^2$
potenciál-függvény:	$U_g(z) = g_g \cdot z + konst.$	$U_t(x) = a \cdot x + konst.$	$U_c(r) = -\frac{r^2\omega^2}{2} + konst.$
$(p_2 - p_1) =$	$= \rho \cdot g_g \cdot (z_1 - z_2)$	$= \rho \cdot a \cdot (x_1 - x_2)$	$= \frac{\rho \cdot \omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2)$

Látható, hogy nehézségi erőtér esetében visszakapjuk a folyadékoszlop nyomására korábbról ismert $\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h$ kifejezést. Többfolyadékos rendszer esetén ügyelni kell arra, hogy ρ=áll. feltétel miatt csak azonos sűrűségű közeghatáron belül lévő két pontra írható fel a hidrosztatika alapegyenlete.

PÉLDA (hidrosztatika, csak g_g)

A mellékelt ábrán látható rendszerben a három különböző sűrűségű, nem keveredő folyadék (víz, olaj, higany) nyugalomban van. A jobboldali tartály zárt, a nyomása (p_2) ismert értékű. A baloldali tartály p_0 nyomásra nyitott.



ADATOK: $g=10N/kg$ $\quad H_0= 200mm$ $\quad p_0=10^5Pa$ $\quad p_2=1,2bar$ $\quad \rho_{víz}= 1000kg/m^3$ $\quad \rho_{olaj}= 800kg/m^3$ $\quad \rho_{Hg}=13600kg/m^3$ $\quad H_1=4000$ mm $\quad H_2= 800$ mm $\quad H_3= ?$

KÉRDÉSEK: **A)** Határozza meg a H_3 higanyszint kitérését! $H_3=?$ [m]

B) Határozza meg az „A" pontbeli nyomást! $p_A=?$ [Pa]

A) Legyen az „A" pontban a „z" tengely origója: $z_A=0m$.

A manométeregyenlet felírható a $z=H_0$ szintre a higany baloldali („B") és jobboldali („J") ekvipotenciális pontjai között, hiszen azonos folyadékban (higany) vagyunk és a „B" és „J" pont $z_B = z_J$ miatt egy, a **g** térerősségvektorra merőleges vízszintesen, azaz ekvipotenciális (U=állandó) szintvonalon ($U_B=U_J$) helyezkedik el: $z_B = z_J$, tehát $U_B=U_J$.

Manométeregyenlet:

$$p_B = p_J$$

$$p_0 + \rho_{víz}\cdot g\cdot H_1 = p_2 + \rho_{olaj}\cdot g\cdot H_2 + \rho_{Hg}\cdot g\cdot H_3$$

Ebben csak a H_3 keresett higany szintkülönbség az ismeretlen, így erre rendezve kapjuk:

$$H_3 = (p_0 - p_2 + \rho_{víz}\cdot g\cdot H_1 - \rho_{olaj}\cdot g\cdot H_2) / (\rho_{Hg}\cdot g)$$

$$H_3 = (100\,000 - 120\,000 + 40\,000 - 6\,400) / 136\,000=0,1m$$

$$\mathbf{H_3=0,1m}$$

B) Az „A" pontbeli nyomás a p_0 –nál az A" pont „felett" lévő folyadékoszlopok nyomásával nagyobb. A p_A nyomást kiszámolhatjuk az „A" pont és pl. a baloldali tartályfelszín között:

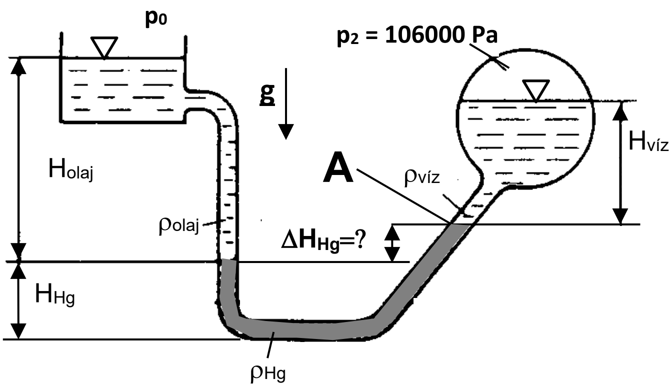
$$\mathbf{p_A} = p_0+\rho_{víz}\cdot g\cdot H_1 + \rho_{Hg}\cdot g\cdot H_0 = 100\,000Pa + 40\,000Pa + 27\,200Pa= \mathbf{167\,200Pa}$$

vagy az „A" pont és a jobboldali tartályfelszín között is, ugyanazt kell kapnunk:

$$\mathbf{p_A} = p_2+\rho_{olaj}\cdot g\cdot H_2 + \rho_{Hg}\cdot g\cdot (H_0+H_3)= 120\,000Pa + 6\,400Pa + 40\,800Pa= \mathbf{167\,200Pa}$$

PÉLDA (hidrosztatika, csak $\underline{g}_g$)

Az ábrán látható két tartályt egy cső köti össze, amelyben a három különböző sűrűségű, egymással nem keveredő folyadék (víz, olaj, higany) nyugalomban van. A baloldali tartály felszíne p_0 nyomásra nyitott, a jobboldali zárt tartály folyadékfelszín felett 6000 Pa túlnyomás van.



ADATOK:

$g = 10$ N/kg, $p_0 = 10^5$ Pa

$\rho_{olaj} = 800$ kg/m^3 $H_{olaj} = 1500$ mm

$\rho_{víz} = 1000$ kg/m^3 $H_{víz} = 400$ mm

$\rho_{Hg} = 13600$ kg/m^3 $H_{Hg} = 200$ mm

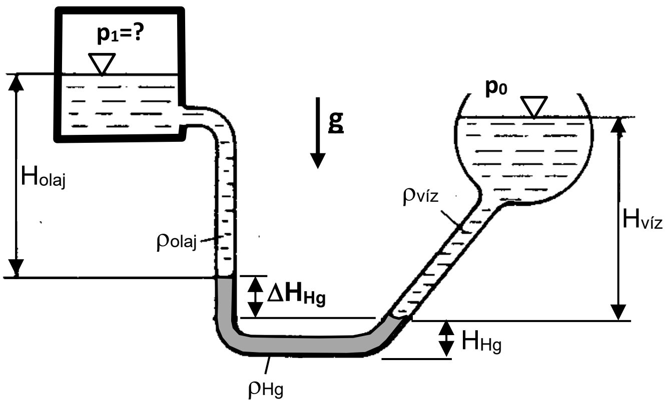
KÉRDÉSEK:

A) Mekkora a nyomás az „A" pontban, tehát a higany és olaj folyadékfelszínek határán? p_A=?

B) Mekkora az ábrán látható ΔH_{Hg} szintkülönbség? ΔH_{Hg} = ?

PÉLDA (hidrosztatika, csak $\underline{g}_g$)

A jobboldali tartály p_0 nyomásra nyitott, a baloldali tartály zárt. A tartályokat összekötő cső a függőleges síkban van: benne a három különböző sűrűségű, egymással nem keveredő folyadék (olaj, higany és víz) nyugalomban van. A csőben alul a bal- és jobboldali higanyfelszínek közötti szintkülönbség értéke ΔH_{Hg} = 150 mm.



ADATOK: $g = 10$ N/kg, $p_0 = 10^5$ Pa

$\rho_{olaj} = 800$ kg/m^3

$H_{olaj} = 1600$ mm

$\rho_{víz} = 1000$ kg/m^3 $H_{víz} = 1400$ mm

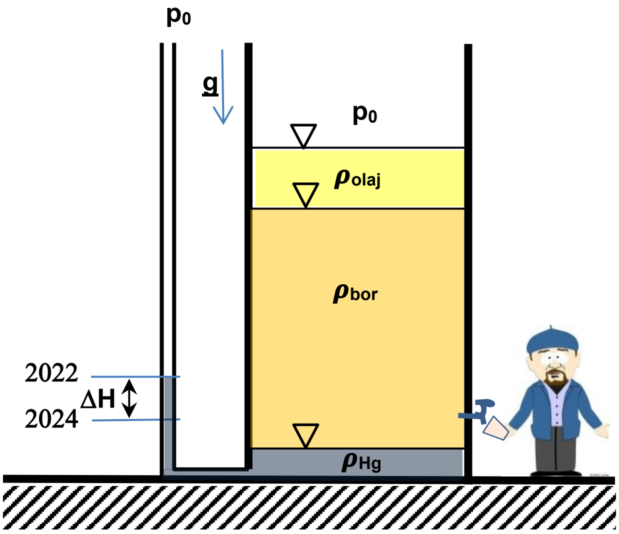
$\rho_{Hg} = 13600$ kg/m^3 $H_{Hg} = 100$ mm

KÉRDÉSEK:

A) Mekkora p_1 nyomást kell ehhez az állapothoz biztosítani a baloldali tartályban?

B) Hol a legnagyobb a túlnyomás a rendszerben? Jelölje be az ábrába és számítsa ki az értékét!

PÉLDA (hidrosztatika, csak $\underline{g}_g$)



Szalacsi – a jobb időkre várva – két éve 2022.10.02-án 2000 liter bort rejtett el egy függőleges tengelyű, 1m×1m alapterületű tartályban. Először óvatosan betöltött 200 liter higanyt (eredetileg atomtámadás ellen vásárolta), majd rátöltötte a bort, végül a tetejére az összes (500 liter) tartalék étolaját is ráöntötte, nehogy elpárologjon a bor. Annyit ő is tudott, hogy a három összenyomhatatlan folyadék nem keveredik, nyugalomban van az ábrán látható eredeti elrendezésben. A tartály felszíne p_0 nyomásra nyitott. A tartály legaljához csatlakozik egy folyadékszintjelző mérőcső, amely függőleges, felül p_0-ra nyitott szakaszában két éve ΔH_1 magasságban állt a higany (nem emlékszik értékére, csak bejelölte a csövön). A mérőcső keresztmetszete elhanyagolható a tartályéhoz képest.

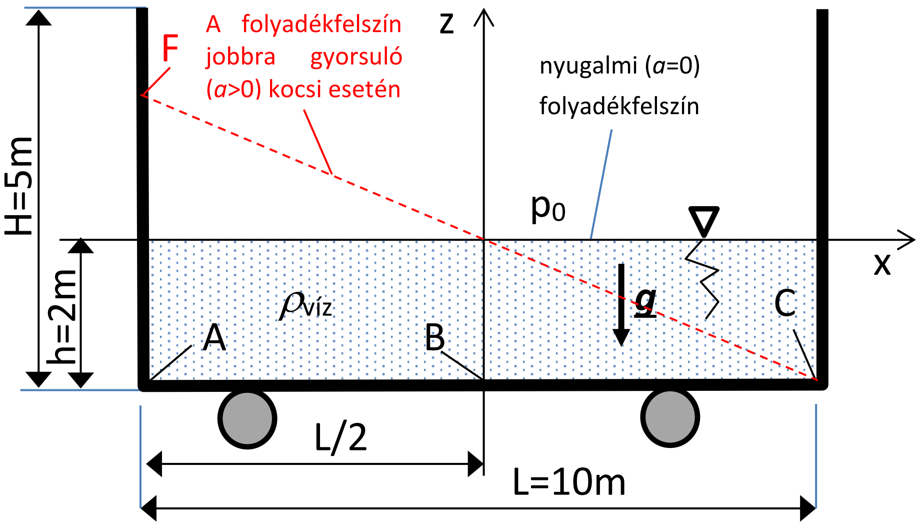
Ma, 2024.10.02-án is bejelöli a mérőcsövön a higany szintjét és lemérve ΔH=150mm adódik. Tudnunk kell, hogy a két év alatt az olaj felét eladta a tartályból és igen sok bort meg is ivott. Higany hálistennek nem fogyott.

KÉRDÉS: Segítsen neki: hány liter bora maradt a tartályban?

Adatok: g=10N/kg; p_0=10^5Pa; ρ_{olaj}=800kg/m^3; ρ_{bor}= 1000kg/m^3; ρ_{Hg}=13600kg/m^3

PÉLDA (hidrosztatika, nehézségi és tehetetlenségi erőtér együtt)

Egy L=10m hosszú, H=5m magas, felül nyitott ($p_0=10^5$Pa) tartálykocsit h=2m magasságig víz ($\rho_{víz}=1000$kg/m^3) tölt ki. A nyugalmi vízfelszín vízszintes.



ADATOK:
g=10N/kg
ideális közeg

KÉRDÉSEK:

A) Mekkora $\underline{a}$ gyorsulással kell mozgatni a tartálykocsit vízszintes irányban, hogy az elmozduló folyadékfelszín éppen elérje a „C" pontot? a=?

B) Rajzolja be a gyorsuló folyadék felszínének alakját az ábrába!

C) Rajzolja be az ábrába a gyorsuló folyadékban a *grad*p vektort!

D) Az ábrán látható „B" pont a tartálykocsi hossza mentén középen, a tartály alján helyezkedik el. Az A) kérdésben kiszámolt gyorsulás esetén számolja ki a „B" pontbeli nyomás értékét! p_B=? [Pa]

E) Számolja ki az „A" pontbeli nyomás értékét!

F) Számítsa ki, hogy mekkora az „A" pontbeli túlnyomás a „C" ponthoz képest! p_A-p_C=? [Pa]

A) Két erőtér van jelen a gyorsuló kocsihoz rögzített relatív rendszerben. Az eredő erőtér térerősségvektora: $\underline{g}_e=\underline{g}_g+\underline{g}_t$. Az eredő erőtér potenciál: $U_e=U_g+U_t=g_g\cdot z+a\cdot x$, a felszín egyenlete így $z=(-a/g_g)\cdot x$. Az (x,z) koordinátarendszer origójában x=0 és z=0 pontban $U_0=0$. A folyadékfelszín egyenlete a gyorsuló tartálykocsihoz rögzített (x,z) relatív koordinátarendszerben, amely origója nyugalmi és gyorsuló rendszerben is azonos. A gyorsuló folyadékfelszín egyben nyomás és potenciál szintvonal (3D –ben szintfelület) is, így $U_0=U_C$, tehát $0=g_g\cdot z_C+a\cdot x_C$. Ismertek „C" pont koordinátái x_C=5m és z_C=-2m, illetve g_g=10N/kg, így $a=-g_g\cdot z_C/x_C=(-10)\cdot(-2)/5=4$ m/s^2.

B) Lásd ábra.

C) $\underline{g}_g$ ismert; $\underline{g}_t=-a\underline{i}$; $\underline{g}_e$ merőleges a folyadékfelszínre, és $\underline{g}_e$ -vel azonos irányba mutat a gradp.

D) Az origó és a „B" pont között hidrosztatika alapegyenlete:

$p_0+\rho(g_g\cdot z_0+a\cdot x_0)=p_B+\rho(g_g\cdot z_B+a\cdot x_B)$

Mivel $x_0=0$ és $z_0=0$, valamint $x_0=x_B$, így a keresett nyomás fentit rendezve

$p_B=p_0-\rho\cdot g_g\cdot z_B=10^5-1000\cdot10\cdot(-2)=10^5+20\,000=120\,000$ Pa

(Csak a nehézségi erőtér mentén kell elmozdulni az origó és „B" pont között.)

E) Az „A" pont és a „fölötte" lévő folyadékfelszín „F" pontja között hidrosztatika alapegyenlete:

$p_A+\rho(g_g\cdot z_A+a\cdot x_A)=p_F+\rho(g_g\cdot z_F+a\cdot x_F)$

Mivel $x_A=x_F$, valamint $p_F=p_0$, így az „A" pontban a keresett nyomás fentit rendezve

$p_A=p_0+\rho\cdot g_g\cdot(z_F-z_A)=10^5+1000\cdot10\cdot(+2-(-2))=10^5+40\,000=140\,000$ Pa

(Csak a nehézségi erőtér mentén kell elmozdulni „A" és „F" pont között.)

F) Az „A" és „C" pontok között hidrosztatika alapegyenlete:

$p_A+\rho(g_g\cdot z_A+a\cdot x_A)=p_C+\rho(g_g\cdot z_C+a\cdot x_C)$

Mivel $z_A=z_C$, valamint $p_C=p_0$, így a keresett túlnyomás fentit rendezve

$p_A-p_C=\rho\cdot a\cdot(x_C-z_C)=1000\cdot4\cdot(+5-(-5))=40\,000$ Pa

(Csak a tehetetlenségi erőtér mentén kell elmozdulni „A" és „C" pont között.)

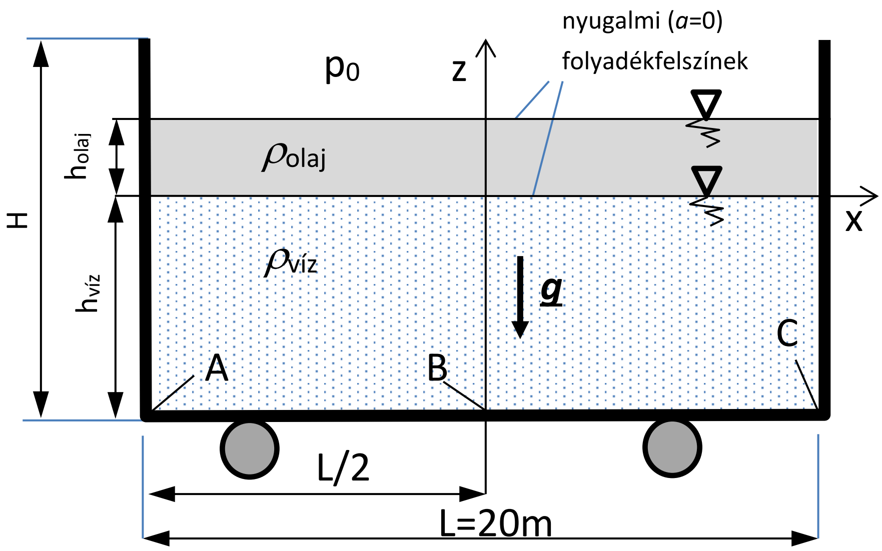
PÉLDA (hidrosztatika, nehézségi és tehetetlenségi erőtér együtt)

Egy L=20m hosszú, H=5m magas, felül nyitott $p_0=10^5$Pa nyomásra nyitott tartálykocsiba $h_{víz}$=3m magasságig vizet, majd fölé h_{olaj}=1m (ρ_{olaj}=1000kg/m^3) olajat töltünk. A nyugalmi folyadékfelszínek vízszintesek.

FELTÉTELEK: ideális közeg, nem keveredő folyadékok. (Az ábra nem méretarányos.)

ADATOK: g=10N/kg

KÉRDÉSEK:



A) Mekkora gyorsulással kell mozgatni a tartálykocsit vízszintes *x* irányban, hogy abból minden olaj kifolyjon és csak víz maradjon? *a*=?

B) Rajzolja be az ábrába az A) kérdésben kiszámolt gyorsulással mozgó tartálykocsi esetén a gyorsuló folyadékfelszín alakját és a nyomásgradiens vektort!

C) Számolja ki az A) kérdésben kiszámolt gyorsulással mozgó tartálykocsi esetén az „A” pontbeli túlnyomást, illetve a „B” és „C” pontok közötti nyomáskülönbséget!

PÉLDA (hidrosztatika: nehézségi és forgó erőtér együtt)

Az ábrán látható ∅D=500mm átmérőjű, H=600mm magas függőleges tengelyű, a p_0 nyomásra felül közpen nyitott hengeres tartály h=400mm magasságig vízzel van töltve. Az ábra az ω=0 nyugalmi folyadékfelszínt mutatja.

ADATOK:

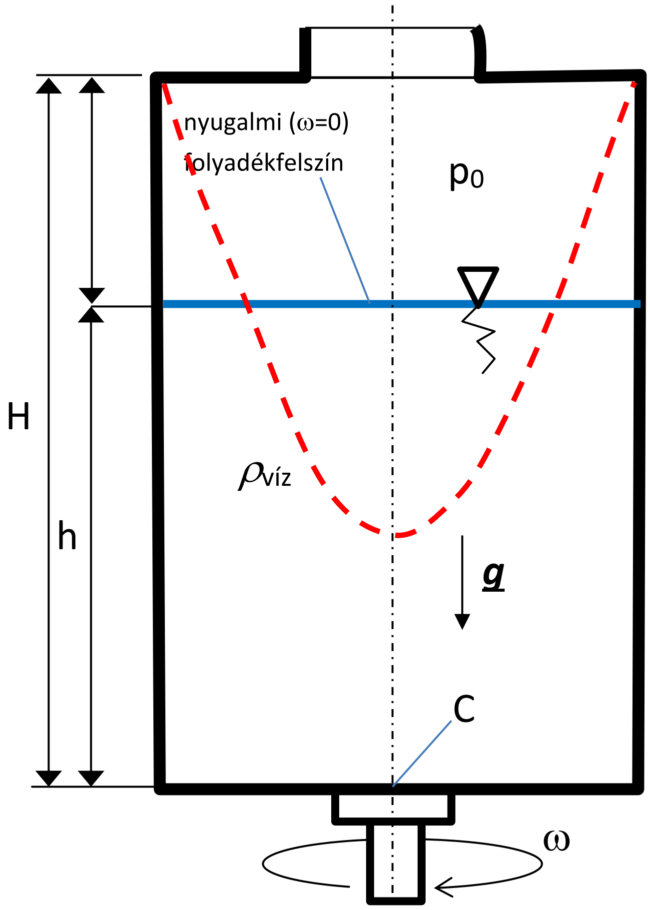
g=10N/kg; $\rho_{víz}$=1000kg/m^3; p_0=10^{5}Pa

KÉRDÉSEK:

A) Mekkora állandó ω szögsebességgel kell megforgatni a hengert, hogy a víz éppen elérje a tartály fedlapját?

B) Írja fel a forgó vízfelszín egyenletét (alakja másodfokú forgásparaboloid, lásd ábra, szaggatott vonal!), és számítsa ki a tengelybeli lesüllyedést !

C) Hol található az a pont az A) kérdésben kiszámolt ω szögsebességgel forgó folyadékban, ahol a legnagyobb a túlnyomás? (Jelölje ezt a pontot az ábrán „B"-vel!) Számítsa ki ebben a pontban a túlnyomást! p_B-p_0=? [Pa]



D) Mekkora ekkor a tartály alján a tengelyben (ábrán „C" pont) a nyomás értéke? p_C=? [Pa]

Felhasználandó: erőtér eredő térerősségvektor és eredő potenciál (nehézségi + centrifugális), hidrosztatika alapegyenlete