



# 8. Súrlódásos közegek áramlása

# 9. Határrétegek

# 10. Hidraulika

# 11. Áramlásba helyezett testre ható erő

Áramlás-tan előadást kiegészítő prezentáció  
Dr. Suda Jenő Miklós, adjunktus  
BME Áramlás-tan Tanszék

Felhasznált szakirodalom:

Dr. Lajos T.: Az áramlás-tan alapjai tankönyv  
Dr. Balogh M.: Turbulencia modellezése előadásjegyzet  
Dr. Suda J.M.: Járműáramlás-tan előadásjegyzet



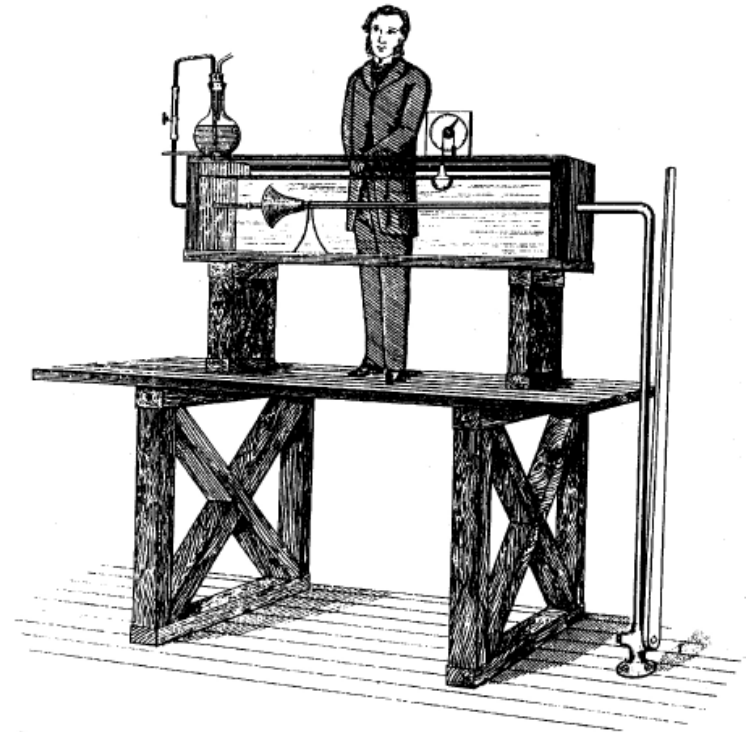


# 8. Súrlódásos közegek áramlása

Áramlástan előadást kiegészítő prezentáció  
Dr. Suda Jenő Miklós, adjunktus  
BME Áramlástan Tanszék

Felhasznált szakirodalom:

Dr. Lajos T.: Az áramlástan alapjai tankönyv  
Dr. Balogh M.: Turbulencia modellezése előadásjegyzet  
Dr. Suda J.M.: Járműáramlástan előadásjegyzet



A Reynolds-féle kísérlet





# Súrlódásos közegek áramlása

$\mu \neq 0$

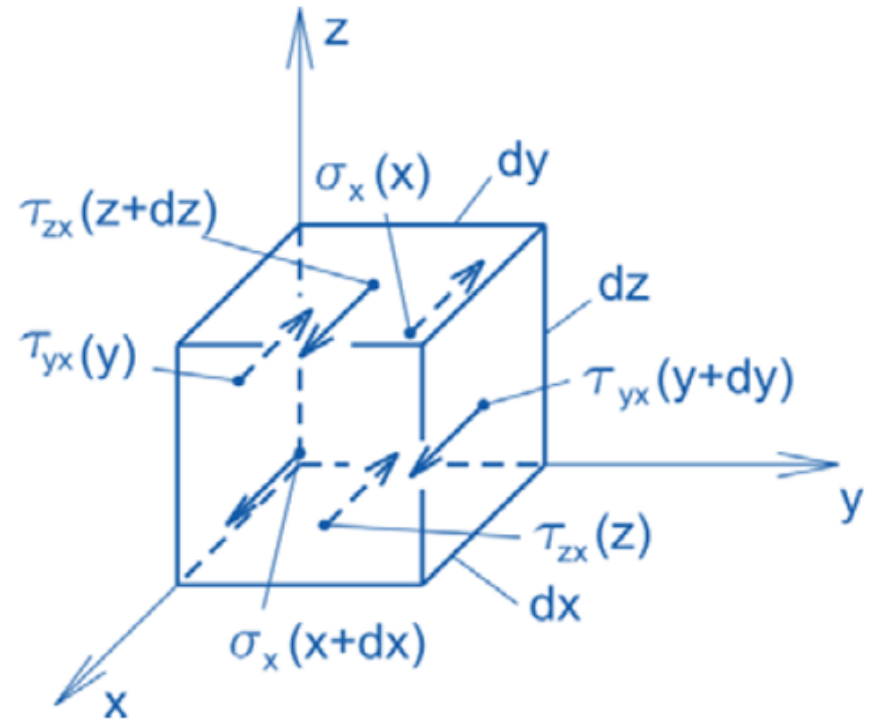
Feszültségtenzor:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$\sigma$ : húzó-nyomó feszültségek

$\tau$ : csúsztatófeszültségek

Csak az x irányú  $\sigma$  és  $\tau$  feszültségek:



**8.2.ábra**  
Elemi folyadékrész





## N-II.: mozgásegyenlet:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} + \frac{1}{\rho} \Phi \nabla.$$

ahol  $\nabla$ : nabla operátor:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k}$$

x:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right).$$

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

A felületre merőleges  $\sigma$  húzófeszültség komponensek két részből tevődnek össze: a statikus nyomásból és az alakváltozási sebességből adódó húzófeszültségből. Az alakváltozás eredményeként létrejövő csúsztatófeszültségek következtében ugyanis a felületre merőleges  $\sigma'$  húzófeszültségek is keletkeznek, azaz pl. a folyadékban keletkező húzófeszültség x irányú komponensére írható:

$$\sigma_x = -p + \sigma'_x.$$

itt a második tag ( $\sigma'$ ) a látszólagos húzó-/nyomó feszültség





**Kontinuitás tétele ( $\rho = \text{áll.}$ ):  $\text{div } \underline{v} = 0$**

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div } \underline{v}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{3} \text{div } \underline{v}$$

**X irányban a húzó-/nyomófeszültség:  $p$  nyomás és  $\sigma'_x$  látszólagos húzó/nyomófeszültség**

$$\sigma_x = -p + \sigma'_x \quad \text{ahol:} \quad \sigma'_x = 2\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \text{div } \underline{v} \right) \quad \text{az ún. látszólagos feszültség}$$

**Húzó-/nyomófeszültség ezzel:**

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \text{div } \underline{v}$$

**Feszülstégtenzor**

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \text{div } \underline{v} & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \text{div } \underline{v} & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \text{div } \underline{v} \end{bmatrix}$$

**Feszülstégtenzor (az  $\underline{\underline{A}}_S$  alakváltozási sebesség tenzorral felírva):**

$$\underline{\underline{\Phi}} = \left( -p - \frac{2}{3}\mu \text{div } \underline{v} \right) \underline{\underline{E}} + 2\mu \underline{\underline{A}}_S$$





Súrlódásos közeg mozgásegyenlete:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} + \frac{1}{\rho} \underline{\Phi} \underline{\nabla}$$

ahol a feszültségtenzor (látszólagos húzó-/nyomófeszültségekkel):

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \underline{v} & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \underline{v} & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \underline{v} \end{bmatrix}$$

A mozgásegyenlet egyik (x irányú) komponensegyenlete kifejtve:

$$\begin{aligned} \text{X: } \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \underline{v} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}: \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \text{div} \underline{v} \right] + \right. \\
 \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Tételezzük fel, hogy  $\mu = \text{áll.}$  és  $\rho = \text{áll.}$ , azaz az áramló newtoni közeg dinamikai viszkozitása és sűrűsége állandó. Figyelembe véve továbbá, hogy  $\rho = \text{áll.}$  esetén a (2.23) folytonosság tétele értelmében  $\text{div} \underline{v} = 0$ , e feltételezéssel a (8.15) összefüggés jobb oldalán lévő kapcsos zárójelben lévő kifejezés az alábbi alakra hozható:

$\mu = \text{áll.}$   
 $\rho = \text{áll.}$   
 $v = \frac{\mu}{\rho} = \text{áll.}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}: \quad \frac{\mu}{\rho} \left( 2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} \right) = v \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \\
 + v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \tag{8.16}
 \end{aligned}$$

$\text{div} \underline{v} = 0$

Miután az egyenlet jobb oldalán álló második tag a  $\text{div} \underline{v}$  x szerinti deriváltja, amely  $\text{div} \underline{v} = 0$  következtében zérus, felírható az állandó sűrűség és viszkozitás esetén érvényes mozgásegyenlet, a **Navier-Stokes-egyenlet**, amelyet

**Navier\*** 1822-ben, majd **Stokes** 1845-ben vezetett le:





## 8.2.1. A Navier-Stokes-egyenlet

$\mu \neq 0$

$\mu = \text{áll.}, \rho = \text{áll.} (\text{div } \underline{v} = 0)$

### Navier-Stokes-egyenlet komponensegyenletei

$$\begin{aligned}
 \text{x: } & \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\
 \text{y: } & \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\
 \text{z: } & \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)
 \end{aligned}$$

### Navier-Stokes-egyenlet

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot } \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \underline{v}$$

N-S egyenlet = [Euler-egyenlet] + [a súrlódás hatását kifejező  $\nu \Delta \underline{v}$  tag]





**N-S egyenlet = [Euler-egyenlet] + [a súrlódás hatását kifejező  $\underline{v} \Delta \underline{v}$  tag]**

## Navier-Stokes-egyenlet

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \underline{v} \Delta \underline{v}$$

$\mu \neq 0$

$\mu = \text{áll.}, \rho = \text{áll.}$

$\underline{a}_{\text{lok}}$   
 $\underline{a}_{\text{konv}} = \underline{D}\underline{v}$

## Navier-Stokes-egyenlet komponensegyenletei

**x:**

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

**y:**

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$$

**z:**

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$





## Euler-egyenlet

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad \mu=0$$

## Navier-Stokes-egyenlet

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \underline{v} \quad \begin{array}{l} \mu \neq 0 \\ \mu = \text{áll.}, \rho = \text{áll.} \\ (\text{azaz } \text{div} \underline{v} = 0) \end{array}$$



\* Navier, Claude Louis Marie H. (1785–1836) Francia fizikus és matematikus. Az École Polytechnique professzora, a Francia Akadémia tagja. Lerakta a rugalmasságtan általános alapegyenletének alapjait. 1822-ben fogalmazta meg a viszkózus folyadékokra vonatkozó egyenletet, amelyet később Stokes öntött végleges matematikai formába [13].



\* Stokes, Sir George, Gabriel (1819–1903) Angol matematikus és fizikus. A Királyi Társaság titkára, majd elnöke. A fizikai optika és a folyadékok mechanikája területén kiemelkedő eredményeket ért el. Nevéhez fűződik a folyadékok mozgását leíró, Navier által 20 évvel korábban megfogalmazott egyenlet napjainkban alkalmazott formába öntése (1847). Ő állapította meg a folyadékdeformáció és a feszültségek közötti lineáris kapcsolatot [13].





## Euler-egyenlet

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

$$\mu=0$$

### az Euler-egyenlet komponensegyenletei

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

## Navier-Stokes-egyenlet

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \underline{v}$$

$$\mu \neq 0$$

$$\mu = \text{áll.}, \rho = \text{áll.}$$

(azaz  $\text{div} \underline{v} = 0$ )

### Navier-Stokes-egyenlet komponensegyenletei

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$





Látható, hogy a Navier-Stokes-egyenlet a jobb oldal utolsó tagjával, a  $\nu \Delta \underline{v}$  taggal különbözik a súrlódásmentes esetre levezetett Euler-egyenlettől (ld. (3.18) összefüggés).

A súrlódás hatását kifejező tagban szereplő  $\Delta \underline{v}$  felbontható:

$$\Delta \underline{v} = \text{grad } \boxed{\text{div } \underline{v}} - \text{rot rot } \underline{v}.$$

$\rho = \text{áll.}$   
 $\text{div } \underline{v} = 0$

Miután  $\text{div } \underline{v} = 0$ , írható:

$$\boxed{\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \nu \text{rot rot } \underline{v}}.$$

kapcsolat a a súrlódás hatása és az örvényesség között (8.20)

A (8.20) egyenlet jól mutatja az áramlás örvényessége és a súrlódás közötti kapcsolatot. Potenciális áramlás ( $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$ ), sőt állandó örvényességű áramlás esetén (pl. az 1.2. ábrán látható két síklap közötti áramlásnál) a súrlódásnak nincs szerepe, a Navier-Stokes-egyenlet az Euler-egyenletbe megy át. Az M.8.2.1. melléklet két példát mutat be a valóságos, súrlódásos közeg olyan áramlásaira, amelyekben a folyadékreszek nem forognak, azaz  $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$ . Ilyenkor az áramlás potenciális, a Navier-Stokes-egyenlet súrlódásos tagja zérus, tehát az áramlást a súrlódásmentes közegre levezetett Euler-egyenlet írja le.





## Millennium Problems

### Yang–Mills and Mass Gap

Experiment and computer simulations suggest the existence of a "mass gap" in the solution to the quantum versions of the Yang-Mills equations. But no proof of this property is known.

### Riemann Hypothesis

The prime number theorem determines the average distribution of the primes. The Riemann hypothesis tells us about the deviation from the average. Formulated in Riemann's 1859 paper, it asserts that all the 'non-obvious' zeros of the zeta function are complex numbers with real part  $1/2$ .

### P vs NP Problem

If it is easy to check that a solution to a problem is correct, is it also easy to solve the problem? This is the essence of the P vs NP question. Typical of the NP problems is that of the Hamiltonian Path Problem: given  $N$  cities to visit, how can one do this without visiting a city twice? If you give me a solution, I can easily check that it is correct. But I cannot so easily find a solution.

### Navier–Stokes Equation

This is the equation which governs the flow of fluids such as water and air. However, there is no proof for the most basic questions one can ask: do solutions exist, and are they unique? Why ask for a proof? Because a proof gives not only certitude, but also understanding.

### Hodge Conjecture

The answer to this conjecture determines how much of the topology of the solution set of a system of algebraic equations can be defined in terms of further algebraic equations. The Hodge conjecture is known in certain special cases, e.g., when the solution set has dimension less than four. But in dimension four it is unknown.

### Poincaré Conjecture

In 1904 the French mathematician Henri Poincaré asked if the three dimensional sphere is characterized as the unique simply connected three manifold. This question, the Poincaré conjecture, was a special case of Thurston's geometrization conjecture. Perelman's proof tells us that every three manifold is built from a set of standard pieces, each with one of eight well-understood geometries.

### Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture

Supported by much experimental evidence, this conjecture relates the number of points on an elliptic curve mod  $p$  to the rank of the group of rational points. Elliptic curves, defined by cubic equations in two variables, are fundamental mathematical objects that arise in many areas: Wiles' proof of the Fermat Conjecture, factorization of numbers into primes, and cryptography, to name three.

**Clay Mathematics Institute**  
CMI has designated a \$7 million prize fund for the solutions to these Problems, with \$1 million allocated to each Problem (each, a "Prize"). Below are the Rules for qualifying for award of a Prize for solving any Problem.



[ABOUT](#)

[PROGRAMS](#)

[PEOPLE](#)

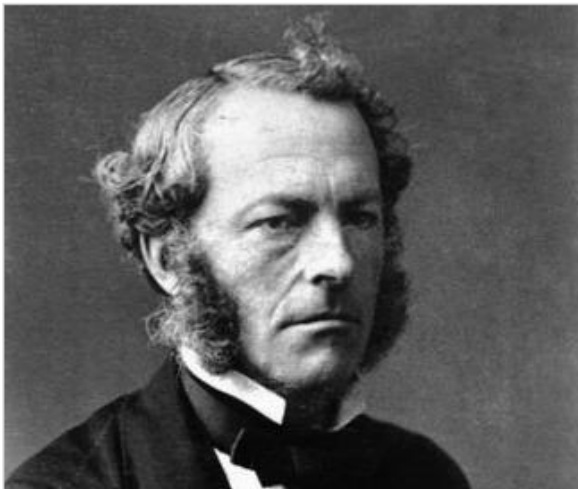
**MILLENNIUM PROBLEMS**

[PUBLICATIONS](#)

[EVENTS](#)

[NEWS](#)

## Navier–Stokes Equation



Waves follow our boat as we meander across the lake, and turbulent air currents follow our flight in a modern jet. Mathematicians and physicists believe that an explanation for and the prediction of both the breeze and the turbulence can be found through an understanding of solutions to the Navier-Stokes equations. Although these equations were written down in the 19th Century, our understanding of them remains minimal. The challenge is to make substantial progress toward a mathematical theory which will unlock the secrets hidden in the Navier-Stokes equations.

Image: Sir George Gabriel Stokes (13 August 1819–1 February 1903). [Public Domain](#)

**This problem is:**      Unsolved

### Rules:

[Rules for the Millennium Prizes](#)

### Related Documents:

[Official Problem Description](#)

### Related Links:

[Lecture by Luis Cafarelli](#)



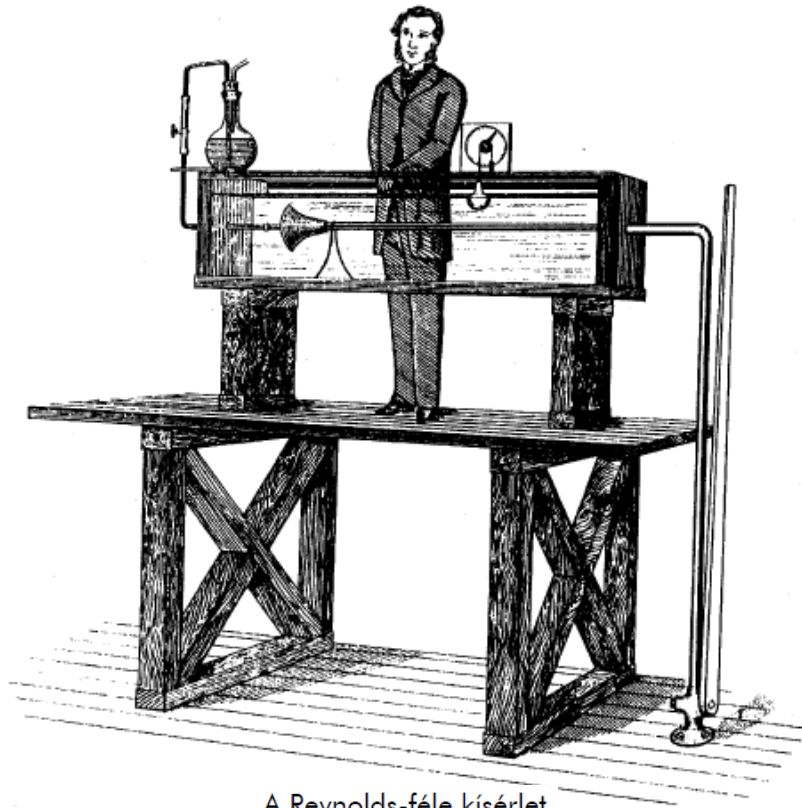


## 8.3. lecke

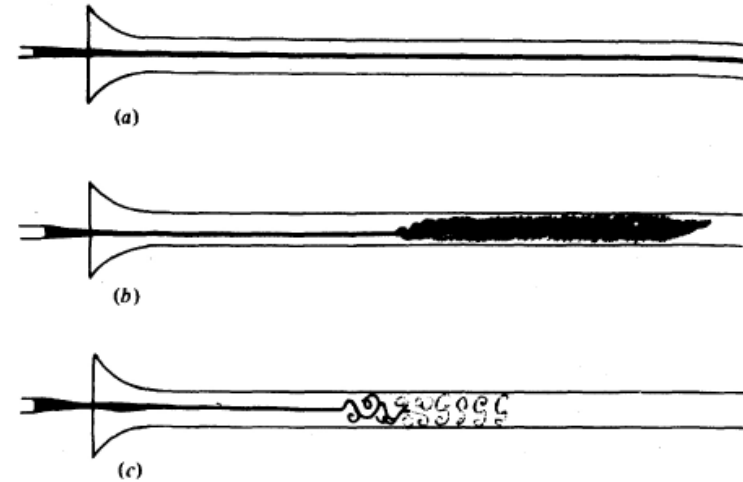
### Lamináris és turbulens áramlások

# Reynolds-kísérlet, 1883

Osborne Reynolds (1842-1912) angol matematikus és fizikus



A Reynolds-féle kísérlet



\* Reynolds, Osborne (1842–1912) Angol matematikus és fizikus. A Manchesteri Egyetemen oktatott és kutatott. Foglalkozott a felhők elektromos tulajdonságaival, esőcseppek kialakulásával, a folyadékok és gázok áramlásával, kenélmélettel és termodinamikával. Ő írta le először az áramló közegben lejátszódó impulzus- és hőtranszport azonos mechanizmusát, a csősúrlódási és a hőátadási tényező közötti kapcsolatot. Foglalkozott a folyótorkolatokban lévő áramlás megismerése érdekében végzett kisminta-kísérletek feltételeivel. Különösen a viszkózus folyadékokkal végzett kísérletek tették híressé. Róla nevezték el a tethetatlenségi- és súrlódóerők viszonyát kifejező számot [13].





## 8.3. lecke

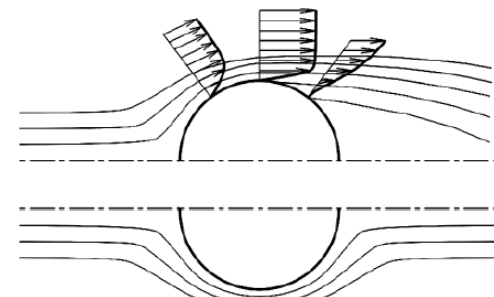
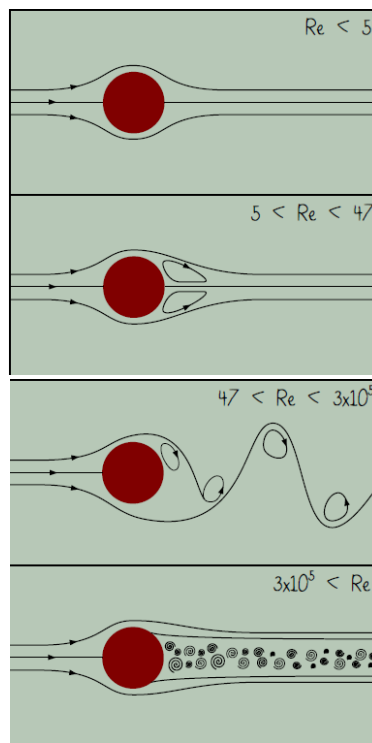
### Lamináris és turbulens áramlások



**8.7. ábra**

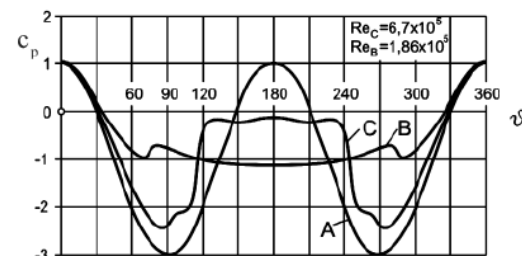
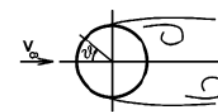
A Reynolds-féle kísérlet

- Reynolds szám:  $Re = \frac{vL}{\nu}$
- Lamináris réteges áramlások ( $Re < 2300$ )
- Turbulens áramlások (tranzien,  $Re > 2300$ )



**9.11. ábra**

Valóságos és ideális közeg áramlása henger körül



**9.12. ábra**

Áramkép és nyomásmegoszlás henger körüli áramlásban

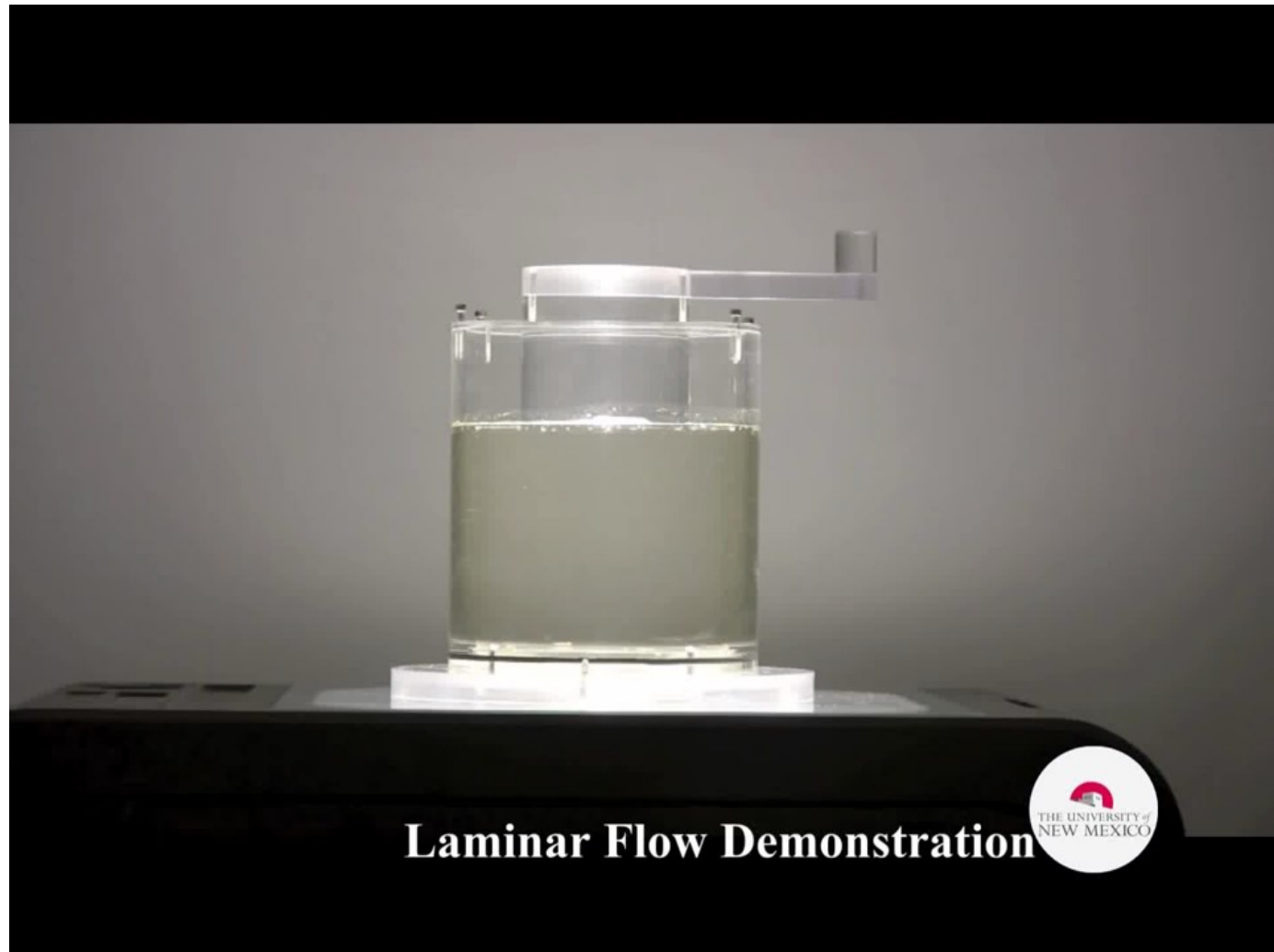






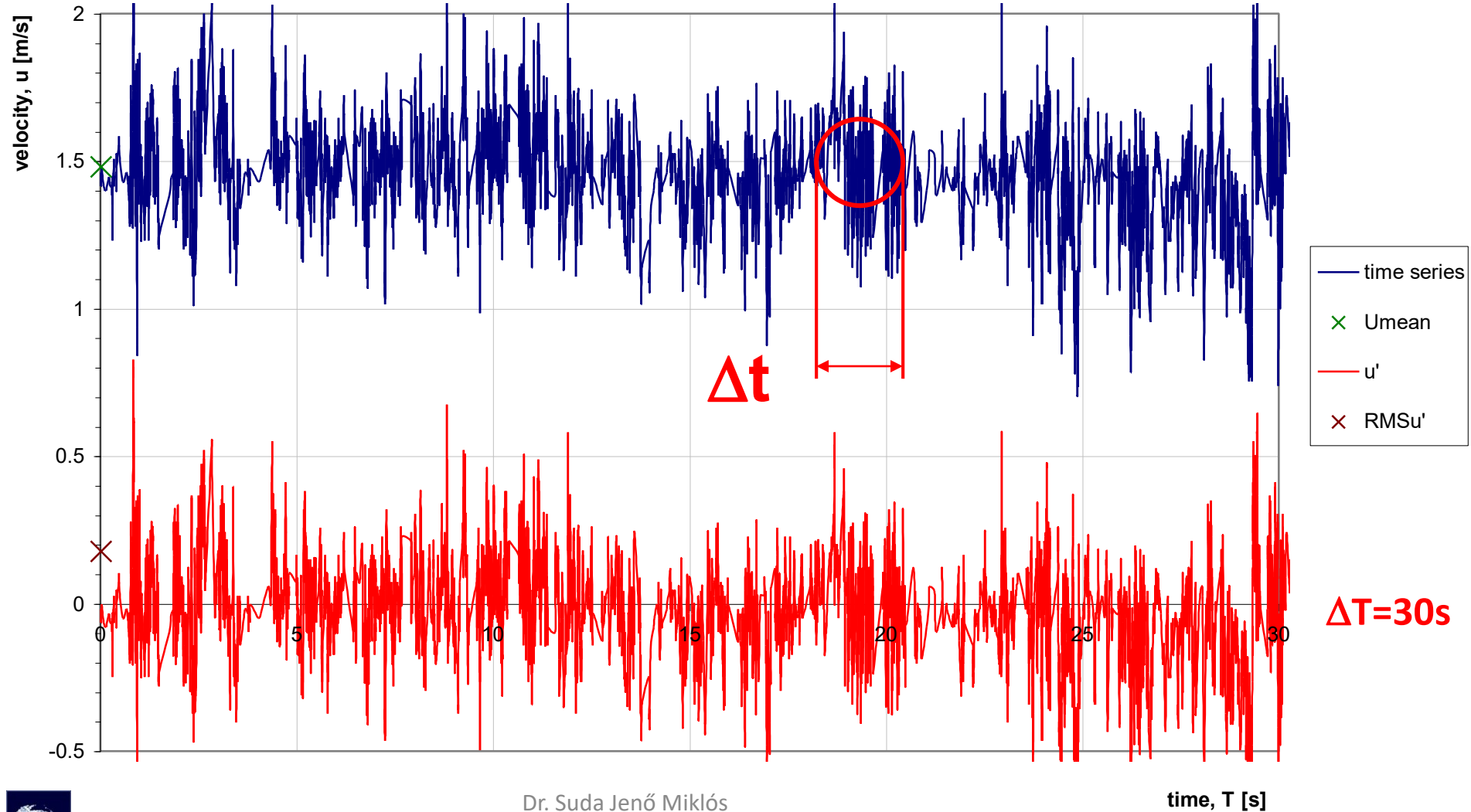
## 8.3. lecke

### Lamináris és turbulens áramlások

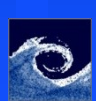
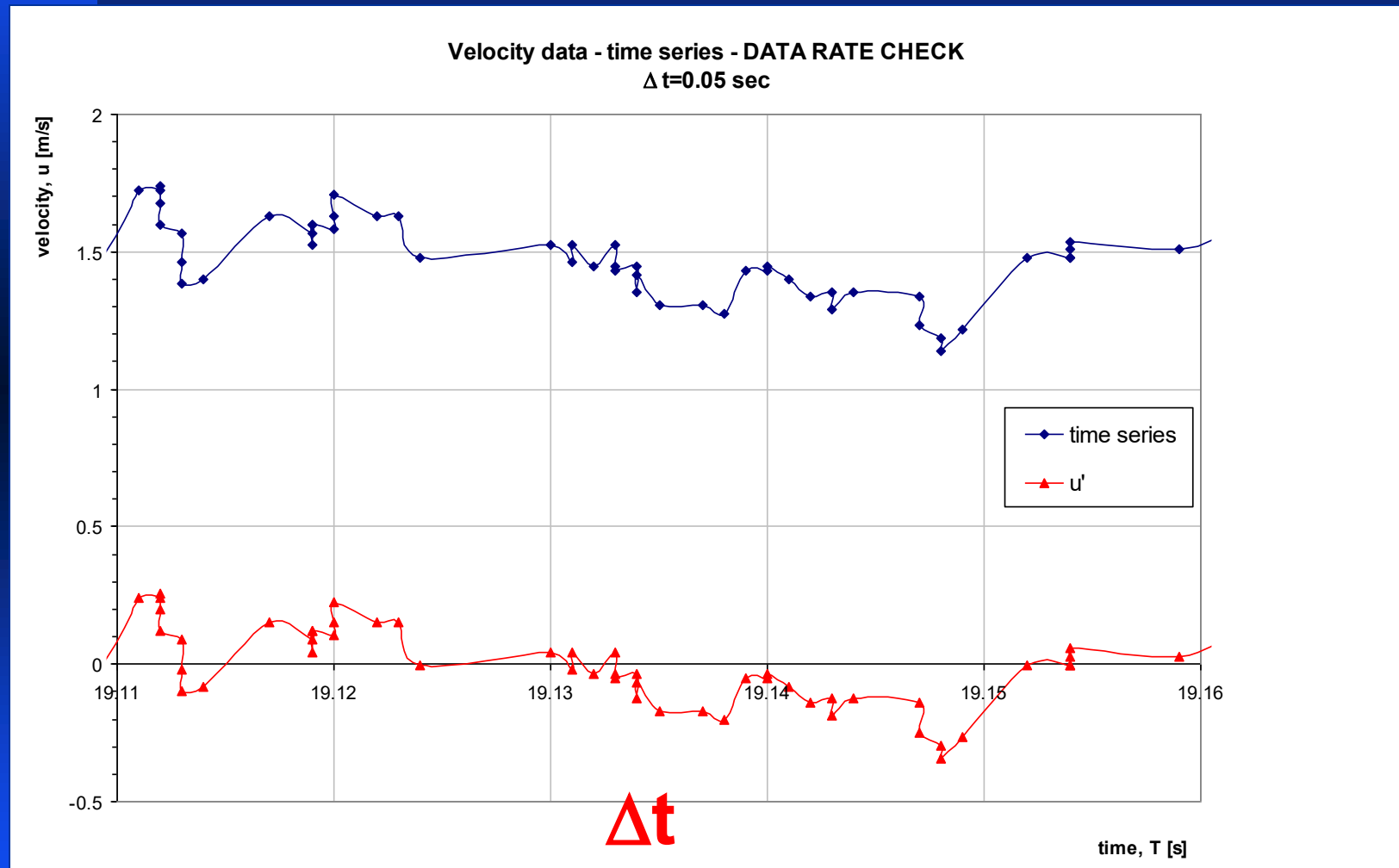


# Lézer Doppler sebességmérés

Velocity data - time series - DATA RATE CHECK  
Nr. of samples = 20 000

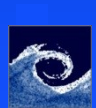
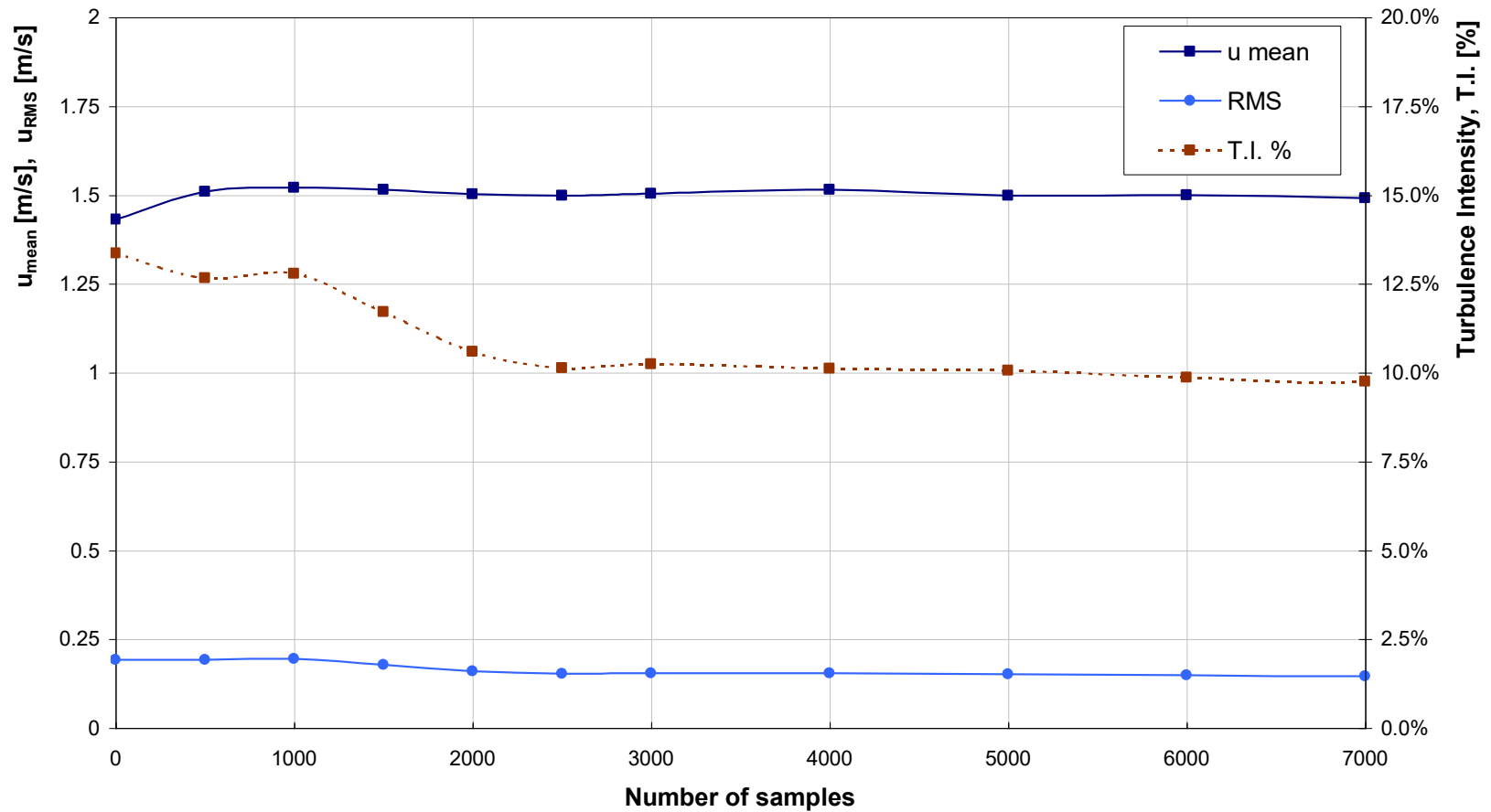


# Lézer Doppler sebességmérés



# Lézer Doppler sebességmérés

"Number of Samples" CHECK at position z=50mm, y=20mm



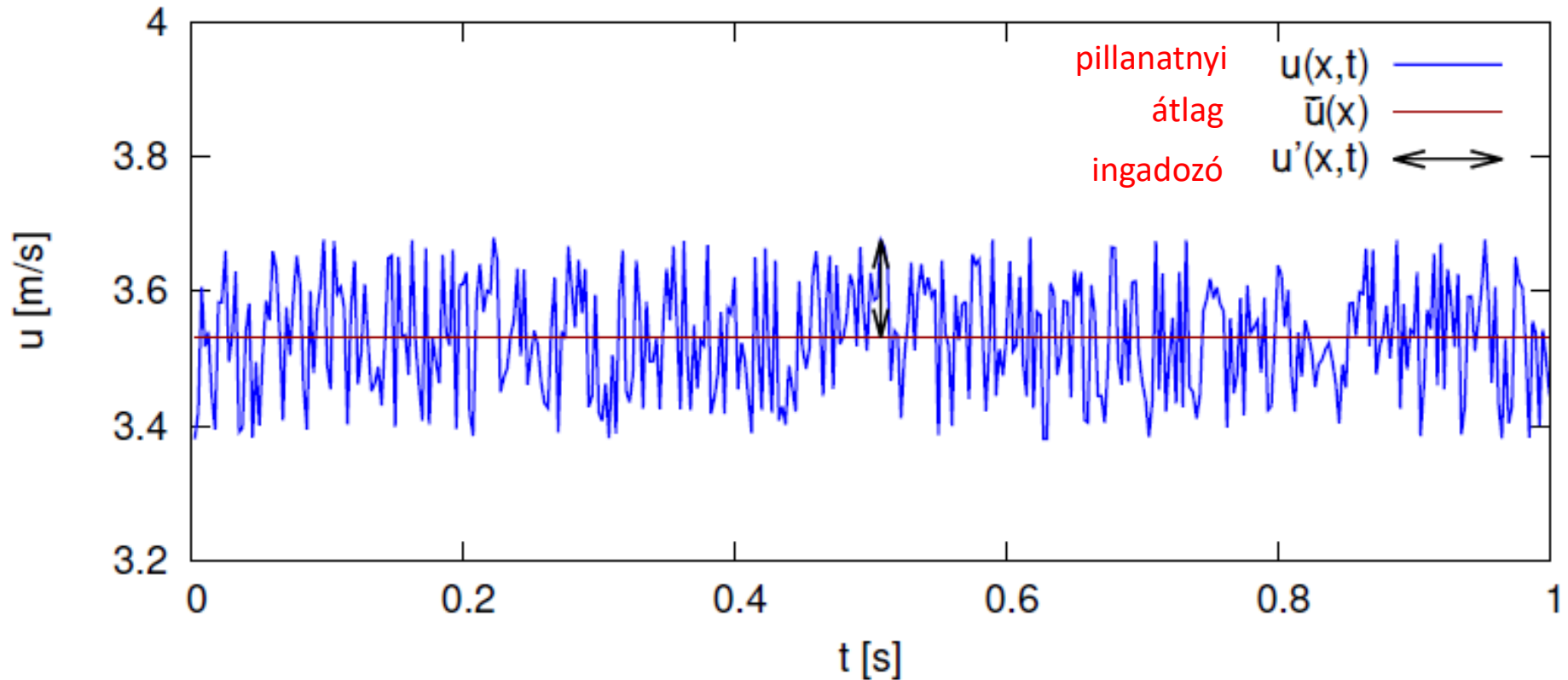


Vagy más jelöléssel:

$$\underline{U}(\underline{r},t) = \underline{u}(\underline{r},t) \cdot \underline{i} + \underline{v}(\underline{r},t) \cdot \underline{j} + \underline{w}(\underline{r},t) \cdot \underline{k}$$

$$\underline{u} = \bar{u} + u'$$

pillanatnyi      átlag      ingadozó





Áramlási sebességvektor:  $\underline{v}(\underline{r},t) = v_x(\underline{r},t)\cdot\underline{i} + v_y(\underline{r},t)\cdot\underline{j} + v_z(\underline{r},t)\cdot\underline{k}$

Vagy más jelöléssel:

$$\underline{U}(\underline{r},t) = u(\underline{r},t)\cdot\underline{i} + v(\underline{r},t)\cdot\underline{j} + w(\underline{r},t)\cdot\underline{k}$$

Sebesség-komponens:

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x$$

pillanatnyi érték
átlag érték
ingadozás

RMS (root-mean-square):

$$v_{x,rms} = \sqrt{\overline{v_x'^2}}$$

Turbulencia intenzitás (pl. x):

$$T.I._x = \frac{v_{x,rms}}{\bar{v}_x} = \frac{\sqrt{\overline{v_x'^2}}}{\bar{v}_x}$$





### 8.3. lecke

Lamináris és turbulens áramlások

## Turbulencia = ?

Horace Lamb, 1932

„Már idős ember vagyok, és mikor meghalok és a mennyországba jutok, két dolog van, amelyekre a megvilágosodás reményével gondolok. Az egyik a kvantum-elektrodinamika, a másik pedig a folyadékok turbulens áramlása. Az előbbivel kapcsolatban meglehetősen optimista vagyok.”

Peter Bradshaw, 1994

„A turbulenciát minden bizonnyal a sátán találta fel a teremtés hetedik napján, mikor a Jóisten már nem figyelt oda.”



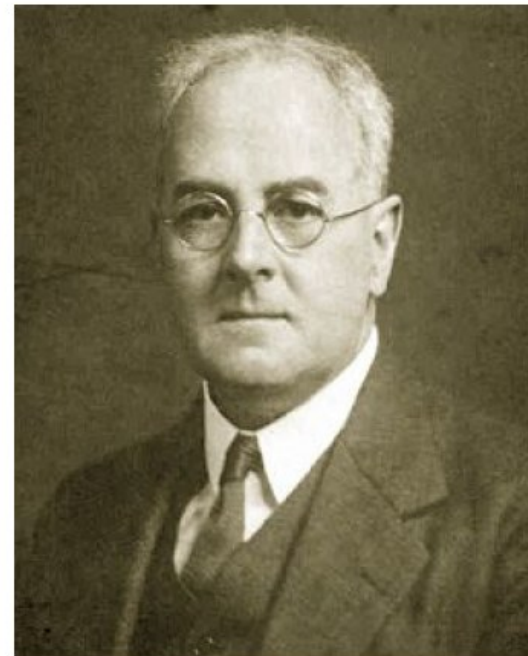


*„Főáramlás a nagy örvényt,  
Nagy a kisebbet táplálja;  
Kis örvény a még kisebbet,  
S elérünk a viszkozításra.”*  
(Lajos Tamás: Az áramlástan alapjai)

**Lewis Fry Richardson (1920):**

*„Big whirls have little whirls,  
that feed on their velocity;  
and little whirls have lesser whirls,  
and so on to viscosity.”*

*„Nagy örvény kisebbet plántál,  
melyet sebességével táplál;  
majd az még kisebbet szülvén,  
viszkozításba tűnik szürkén.”*

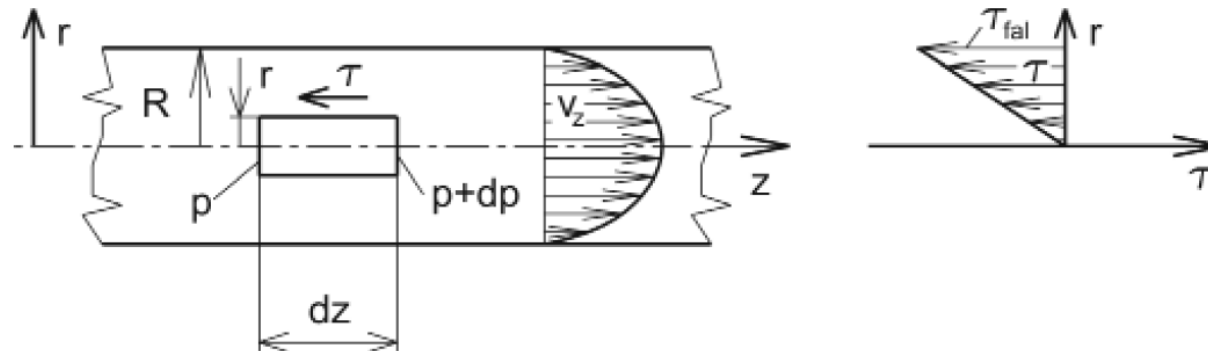






### 8.2.3. Lamináris (réteges) áramlás csőben

Tekintsük a **8.6. ábrát**, amely egy kör keresztmetszetű, egyenes csőben lévő, **kialakult**, hengerszimmetrikus **áramlást** mutat be. (Csövekben azt az áramlást nevezzük kialakult áramlásnak, amelyben a sebességmegoszlás a cső hossza mentén nem változik:  $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ , amiből következően a radiális sebességkomponens  $v_r = 0$ .) Legyen az **áramlás lamináris** (réteges), amelynek definícióját a következő leckében tanuljuk. Itt elengedő annak megjegyzése, hogy az áramlás stacionárius, és a Newton-féle viszkozitási törvény alkalmazható.

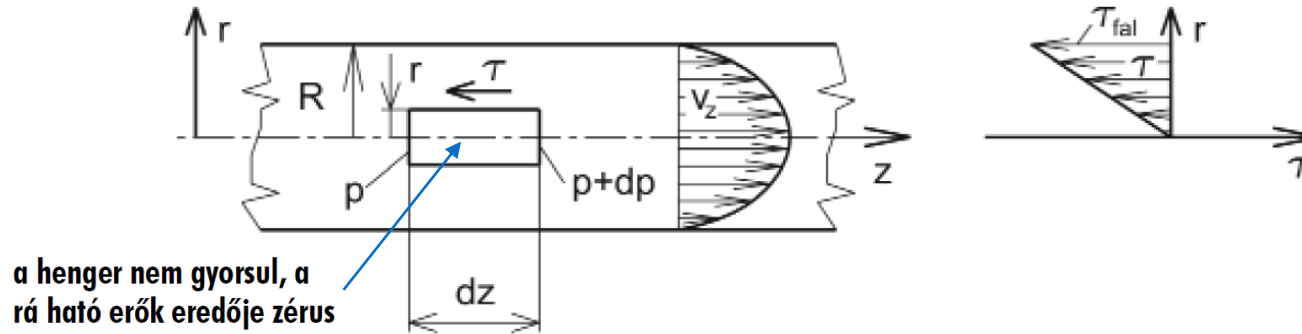


**8.6. ábra**  
Lamináris áramlás csőben





### 8.2.3. Lamináris (réteges) áramlás csőben



8.6. ábra

Lamináris áramlás csőben

Vegyünk fel egy, a cső tengelyével koncentrikus,  $r$  sugarú,  $dz$  hosszúságú hengert (ld. **8.6. ábrát**), és írjuk fel az erre ható,  $z$  irányú erők egyensúlyát. Tekintettel arra, hogy a kialakult csőáramlásban e folyadékhenger nem gyorsul, a rá ható erőknek ki kell egyensúlyozniuk egymást.

A hengerre az alap- és fedőlapján lévő nyomások különbségéből származó erő és a paláston keletkező, csúsztatófeszültségből származó erő hat. A  $z$  koordinátatengely pozitív irányításának figyelembevételével írjuk fel az erők egyensúlyát:

$$r^2 \pi p - r^2 \pi (p + dp) + 2 r \pi dz \tau = 0 . \quad (8.22)$$





## 8.2.3. Lamináris (réteges) áramlás csőben

Beszorzás és egyszerűsítés után  $2 \tau dz = r dp$  adódik, amiből a Newton viszkozitási törvényét felhasználva:

$$\tau = \frac{1}{2} r \frac{dp}{dz} = \mu \frac{dv_z}{dr} \quad (8.23)$$

összefüggést kapjuk. A (8.23) differenciálegyenletet a változók szétválasztásával oldjuk meg, figyelembe véve, hogy kialakult csőáramlásban  $dp/dz = \text{áll.}$ :

$$\int dv_z = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dz} \int r dr \Rightarrow v_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r^2 + \text{áll.} \quad (8.24)$$

Ha  $r = R$  (azaz a csőfalon) a sebesség  $v_z = 0$ . Ezt a peremfeltételt a (8.24) összefüggésbe behelyettesítve megkapjuk az integrálási állandót, majd  $v_z$ -t kifejezve a

$$v_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} [R^2 - r^2] \quad (8.25)$$

összefüggést kapjuk. A sebességmegoszlás tehát másodfokú forgási paraboloid alakú (ld. **8.6. ábra**).

**Newton viszkozitási törvénye**

**másodfokú forgási paraboloid**





## 8.2.3. Lamináris (réteges) áramlás csőben

Látható, hogy akkor egyezik meg az áramlás iránya a z tengely pozitív irányításával, (azaz  $v_z > 0$ ), ha  $\frac{dp}{dz} < 0$ , azaz – a várakozásnak megfelelően – a nyomás növekvő z koordináta irányában csökken. (Áramlás irányában csökkenő nyomásból származó erő mozgatja a közeget a súrlódóerőkkel szemben.)

**a nyomás az áramlás irányában csökken**

Vezessük be a  $\Delta p'$  [Pa] **súrlódási veszteség** fogalmát, ami itt a súrlódás következtében bekövetkező nyomáscsökkenés a vízszintes, állandó keresztmetszetű cső hossza mentén, áramlás irányában! (Később, a 10. fejezetben ezt a fogalmat kiterjesztjük a Bernoulli-összeg csökkenésére.) A fentiek alapján a csőtengely irányú, 1 m-re jutó nyomásváltozás írható:  $\frac{dp}{dz} = -\frac{\Delta p'}{l}$ , ahol l [m] csőhosszon a súrlódás következtében  $\Delta p'$  nyomáscsökkenés következik be. Ezzel a (8.23) összefüggéssel megadott csúsztatófeszültség és a (8.25) sebességmegoszlás így írható:

**súrlódási veszteség**

$$\tau = -\frac{\Delta p'}{2l} r, \quad (8.26) \quad \text{csúsztatófeszültség}$$

$$v_z = \frac{\Delta p'}{4\mu l} [R^2 - r^2]. \quad (8.27) \quad \text{sebességmegoszlás}$$





## 8.2.3. Lamináris (réteges) áramlás csőben

A 8.6. ábrában felrajzoltuk a  $\tau$  csúsztatófeszültség és a  $v_z$  sebesség sugár menti változását. Látható, hogy  $\tau$  negatív, és abszolút értéke a sugár függvényében nő.

A maximális sebesség  $r = 0$ -nál adódik:  $v_{z \max} = \frac{\Delta p' R^2}{4 \mu l}$ . A 2.4.3. pontban a (2.34) összefüggés teremtett kapcsolatot a forgási paraboloid alakú sebességmegoszlás esetén a maximális sebesség és a  $\bar{v}$  átlagsebesség között.

maximális sebesség

Másodfokú paraboloid ( $n=2$ ) esetén  $\bar{v} = \frac{v_{z \max}}{2}$ . Így írható:

$$\bar{v} = \frac{1}{8} \frac{\Delta p'}{\mu l} R^2,$$

az átlagsebesség a maximális sebesség fele

ill. a nyomásvesztés kifejezve:

$$\Delta p' = \frac{8 \mu \bar{v} l}{R^2}. \tag{8.28}$$

nyomáscsökkenés, nyomásvesztés

A csúsztatófeszültség a (8.26) összefüggésből a falnál  $\tau_{\text{fal}} = -\frac{\Delta p' R}{2 l}$  értéket vesz fel. Ugyanez adódik, ha egyenlővé tesszük az áramlást akadályozó, csúsztatófeszültségből származó  $2 R \pi l \tau_{\text{fal}}$  erő és az áramlást fenntartó, nyomásból származó  $R^2 \pi \Delta p'$  erő összegét zérussal (mivel nem gyorsul a közeg), és kifejezzük a  $\tau_{\text{fal}}$  értékét.

fali csúsztatófeszültség





## 8.2.3. Lamináris (réteges) áramlás csőben

A Navier-Stokes-egyenlet levezetése után kör keresztmetszetű csőben, réteges áramlásban a sebességmegoszlás és a nyomáscsökkenés meghatározására alkalmaztuk a tanultakat (ld. 8.2.3. pont). A nyomás csőhossz menti csökkenésére (ami vízszintes, állandó keresztmetszetű cső esetén nem más, mint a  $\Delta p'$  súrlódási veszteség) a (8.28) összefüggést kaptuk:

$$\Delta p' = \frac{8\mu l}{R^2} v, \text{ ahol } R = \frac{d}{2}.$$

Figyelembe véve, hogy  $\mu = \rho\nu$ , átalakítások után adódik:

$$\Delta p' = \frac{\rho}{2} v^2 \frac{l}{d} \frac{64\nu}{vd},$$

azaz, mivel  $\frac{vd}{\nu} = Re$ , írható:

$$\Delta p' = \frac{\rho}{2} v^2 \frac{l}{d} \lambda_{lam},$$

ahol a lamináris áramlásra vonatkozó  $\lambda_{lam}$  csősúrlódási tényező:

$$\lambda_{lam} = \frac{64}{Re}.$$

$$\Delta p' = \frac{\rho}{2} v^2 \frac{l}{d} \lambda(Re)$$

**egyenes cső súrlódási  
vesztesége**

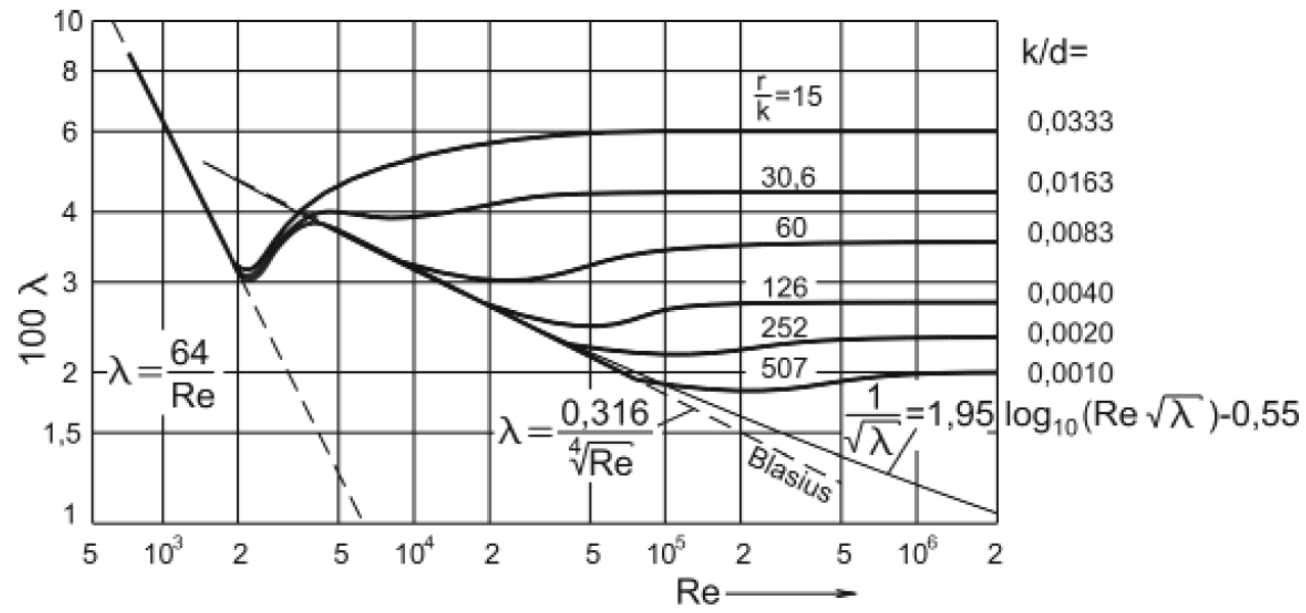
(10.11)





### 8.2.3. Lamináris (réteges) áramlás csőben

**Nikuradze\*** határozta meg mérésrel a  $\lambda$  csősúrlódási tényezőt a  $Re$  függvényében különböző  $k/d = \text{áll. homokérdesség}$  értékek mellett, és a mérések eredményét kétszer logaritmikus diagramban ábrázolta.



**10.3 ábra**  
Csősúrlódási tényező sima és érdes csöveknél



\*Nikuradze, Johann grúz származású német mérnök (1894-1979). A Göttingeni Egyetemen folytatott tanulmányokat, és ezek befejezése után Prandtl intézetében dolgozott tanárségként, majd munkatársként részt vett Prandtl áramlástechnikai kutatóintézeté létrehozásában. Kiemelkedő eredményeket ért el sima és érdes csövek kísérleti vizsgálatával. 1934-ben meghívták a Breslau-i (ma Wrocław, Lengyelország) Műszaki Főiskola Áramlástan Tanszékének vezetésére. Ezt követően Aachenben emeritus professzor [13].

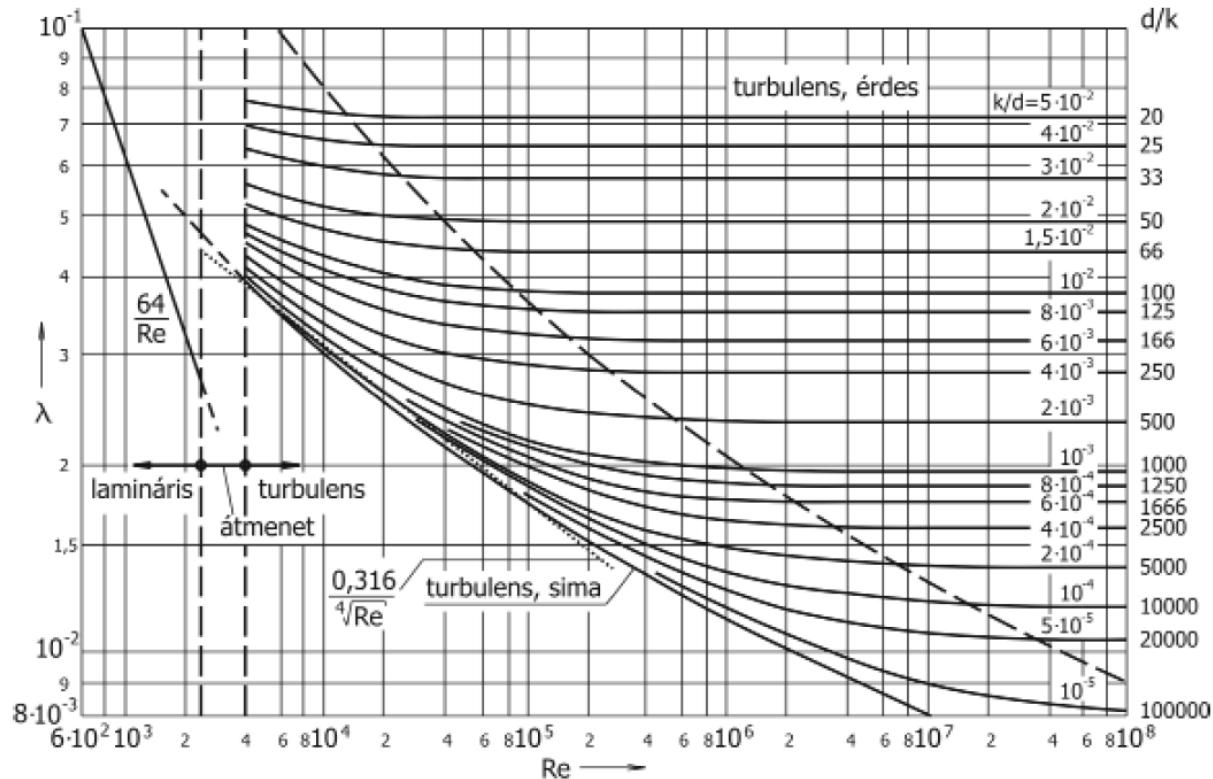


\*Blasius, Paul Richard Henrich (1883-1970). Göttingenben tanult matematikát és fizikát. 1907-ben Prandtlnál áramlásba helyezett testeken keletkező határretegek vizsgálata témakörben doktorált. Foglalkozott a súrlódásos áramlások hasonlóságával. Tanárként nagy szerepet játszott a Hamburgi Műmőkiskola fejlesztésében. Megadta a hidraulikailag sima csövek csősúrlódási tényezőjének összefüggését. Számos tankönyvet írt [13].



## 8.2.3. Lamináris (réteges) áramlás csőben

Kör keresztmetszetű érdes csövek esetén a csősúrlódási tényezőt a Reynolds-szám és a  $d/k$  alakban definiált relatív érdesség függvényében a **10.4. ábrán** látható **Moody\*-diagram** adja meg.



**10.4. ábra**

A nem homogén érdességű csövekre vonatkozó Moody diagram



\* Moody, Lewis Ferry (1880-1953) Északamerikai mérnök. Kavitációs jelenségek tanulmányozása és kavitációs együtthatóra vonatkozó javaslat kidolgozása mellett 1944-ben tette közzé a róla elnevezett diagramot [13].





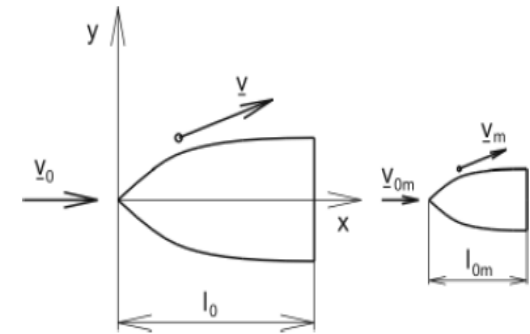
## 8.5. Az áramlások hasonlósága és a hasonlóság feltételei

A kísérleti vizsgálatokat technikai és költségkímélési okokból is gyakran az eredeti berendezés kis méretű modelljén (kismintáján) hajtjuk végre. Így, pl. ha meg kell határozni egy tervezés alatt lévő hajó motorjának előírt sebesség eléréséhez szükséges teljesítményét, vagy a korrekt szilárdsági méretezéshez ismerni kell egy szerkezetre, vagy épületre ható szélerőt, csak **kisminta-kísérletek** jöhetnek szóba.

Egy kisminta-kísérletnek csak akkor van értelme, ha eredménye megfelelő biztonsággal átvihető, felhasználható a nagy kivitelnél. Ez a feltétel akkor valósul meg, ha a kisminta és a nagy kivitel körüli áramlás hasonló. Vizsgáljuk meg, hogy mikor tekintünk két áramlást hasonlóknak, és melyek az **áramlások hasonlóságának** feltételei összenvomhatatlan közegek esetén!

A **kisminta** körüli áramlás akkor hasonló a **nagy kivitel** körüli áramláshoz, ha megegyező függvények írják le a nagy kivitel és a kisminta sebesség- és nyomásmegoszlását – természetesen a nagy kivitel és a kisminta megfelelő jellemző fizikai paramétereivel dimenziótlanított formában.

Mikor hasonló két áramlás, azaz mikor azonos a dimenziótlan sebességet és nyomást leíró (8.61) függvény a nagy kivitelnél és a kismintánál? Nyilvánvalóan akkor, ha a két áramlást ugyanaz a dimenziótlan parciális differenciálegyenlet-rendszer írja le, és ugyanazok a kezdeti- és peremfeltételek a dimenziótlan hely- és időkoordinátákban.



**8.10. ábra**

Nagy kivitel és kisminta körüli áramlás hasonlósága





## 8.5. Az áramlások hasonlósága és a hasonlóság feltételei

### dimenziótlan Navier-Stokes-egyenlet

Írjuk fel a Navier-Stokes-egyenlet x irányú komponens-egyenletét a (8.17) összefüggés alapján!

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right). \quad (8.62)$$

Szorozzuk be a (8.62) egyenlet mindkét oldalán lévő tagokat  $\frac{l_0}{v_0^2}$ -tel, azaz dimenziótlanítsuk a Navier-Stokes-egyenlet x irányban felírt komponens-egyenletét:

**dimenziótlan Navier-Stokes-egyenlet** x irányban felírt komponens-egyenlete

$$\frac{\partial \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{t}{l_0 / v_0} \right)} + \frac{v_x}{v_0} \frac{\partial \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)} + \dots = \frac{g_x l_0}{v_0^2} - \frac{\partial \left( \frac{p - p_0}{\rho v_0^2} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)} + \frac{\nu}{v_0 l_0} \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)^2} + \dots \right). \quad (8.63)$$





## 8.5. Az áramlások hasonlósága és a hasonlóság feltételei

**dimenziótlan Navier-Stokes-egyenlet** x irányban felírt komponens-egyenlete

$$\frac{\partial \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{t}{l_0 / v_0} \right)} + \frac{v_x}{v_0} \frac{\partial \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)} + \dots = \frac{g_x l_0}{v_0^2} - \frac{\partial \left( \frac{p - p_0}{\rho v_0^2} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)} + \frac{v}{v_0 l_0} \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)^2} + \dots \right). \quad (8.63)$$

Hasonlóképpen fel lehet írni a **dimenziótlan Navier-Stokes-egyenlet** y és z irányú komponens-egyenletét, valamint a folytonosság tétele dimenziótlantított formáját, figyelembe véve, hogy a Navier-Stokes-egyenlet alkalmazásakor már eldöntöttük, hogy a  $\rho = \text{áll.}$  feltételezéssel élünk. Ez esetben a folytonosság tétele a  $\text{div } \underline{v} = 0$  alakot ölti, amely dimenziótlantítva:

**dimenziótlan folytonosság tétele**

$$\frac{\partial \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)} + \frac{\partial \left( \frac{v_y}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{y}{l_0} \right)} + \frac{\partial \left( \frac{v_z}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{z}{l_0} \right)} = 0. \quad (8.64)$$





## 8.5. Az áramlások hasonlósága és a hasonlóság feltételei

### 8.5.2. Az áramlások hasonlóságának feltételei

- a) Azonos dimenziótlan differenciálegyenlet írja le mindkét áramlást, ami azt jelenti, hogy a (8.63) összefüggésben (és a további két komponens-egyenletben) szereplő állandóknak és együtthatóknak azonos értékűnek kell lennie a két (nagy kivitel és a kisminta körüli) áramlásra vonatkozóan. A nagy kivitel és a modell esetén ez a feltétel annyit tesz, hogy

$$\frac{g_x l_0}{v_0^2} = \frac{g_{xm} l_{0m}}{v_{0m}^2}, \quad (8.65)$$

$$\frac{v}{v_0 l_0} = \frac{v_m}{v_{0m} l_{0m}}; \quad (8.66)$$

- b) Saját léptékben azonosak a **kezdeti- és peremfeltételek**. Ezt a feltételt általában a modell és a nagy kivitel **geometriai hasonlóságával**, az áramlási tér peremén hasonló viszonyok biztosításával és az instacionárius hatások megfelelő modellezésével (ld. később) valósíthatjuk meg.

---

**azonos dimenziótlan  
differenciálegyenlet**

---



---

**azonos kezdeti- és  
peremfeltételek**

---

**geometriai hasonlóság**





## 8.5. Az áramlások hasonlósága és a hasonlóság feltételei

dimenziótlan Navier-Stokes-egyenlet  $x$  irányban felírt komponens-egyenlete

Euler-szám:

$$\frac{\partial \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{t}{l_0/v_0} \right)} + \frac{v_x}{v_0} \frac{\partial \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)} + \dots = \frac{g_x l_0}{v_0^2} \frac{\partial \left( \frac{p - p_0}{\rho v_0^2} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)} + \frac{\nu}{v_0 l_0} \frac{\partial^2 \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)^2} + \dots$$

Froude -szám:

$$Fr = \frac{v_0}{\sqrt{g l_0}}$$

Reynolds-szám:

$$Re = \frac{v_0 l_0}{\nu}$$

$$\frac{\partial \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{t}{l_0/v_0} \right)} + \frac{v_x}{v_0} \frac{\partial \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)} + \dots = \frac{1}{Fr^2} \frac{\partial \left( \frac{p - p_0}{\rho v_0^2} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \left( \frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{l_0} \right)^2} + \dots$$



## 8.5.3. A hasonlósági számok és alkalmazásuk

### Froude -szám:

$$Fr = \frac{v_0}{\sqrt{g l_0}}$$

$$Fr_m = Fr$$

$$\Rightarrow \frac{v_{0m}}{v_0} = \sqrt{\frac{l_{0m}}{l_0}}$$

Ha a valósággal azonos erőterben modellezünk:  
 $g = g_m$



\* Froude, William (1810–1879) Angol építőmérnök. Hajótervezéssel, majd hajók áramlási ellenállásának kisminta-kísérletekkel történő meghatározásával foglalkozott. Ő javasolta a hajó ellenállásának hullám- és súrlódási ellenállásra való felbontását, és megállapította a hullám-ellenállás modellkísérlettel történő meghatározásánál a helyes modellezés feltételét [13].

### Reynolds-szám:

$$Re = \frac{v_0 l_0}{\nu}$$

$$Re_m = Re$$

$$\Rightarrow \frac{v_{0m}}{v_0} = \frac{l_0 v_m}{l_{0m} \nu} = \frac{l_0}{l_{0m}}$$

Ha a valósággal azonos viszkozitású közeggel modellezünk:  
 $\nu = \nu_m$

### Strouhal -szám:

$$Str = \frac{f l_0}{v_0}$$

$$Str_m = Str$$

$$\Rightarrow \frac{v_{0m}}{v_0} = \frac{l_0 f}{l_{0m} f_m} = \frac{l_0}{l_{0m}}$$

Ha a valósággal azonos örvénylevélési frekvenciával modellezünk:  
 $f = f_m$



\* Strouhal, Cenek (1850-1922) cseh fizikus. Prágában a Károly Egyetemen tanult, majd würzburgi kutatásai után itt lett a kísérleti fizika tanára. Akusztikai tanulmányai során definiálta a később róla elnevezett Strouhal-számot. A modern cseh kísérleti fizika megalapítója [13].

### Euler-szám:

$$Eu = \frac{p - p_0}{\rho v_0^2}$$

### Weber-szám

$$We = \frac{\rho l_0 v_0^2}{\sigma}$$

### Stokes-szám

$$St_p = \frac{\tau_p}{\tau_g} = \frac{\frac{W_s}{g}}{l_0 v_0}$$

### Prandtl-szám, stb.....



## hasonlósági számok, mint erők hányadosai

Reynolds-szám: 
$$Re \sim \frac{\text{tehetetlenségi erő}}{\text{súrlódásból származó erő}} = \frac{F_T}{F_S} \sim \frac{v_0^2 / l_0}{\nu v_0 / l_0^2} = \frac{v_0 l_0}{\nu},$$

Froude -szám: 
$$Fr \sim \sqrt{\frac{\text{tehetetlenségi erő}}{\text{súlyerő}}} = \sqrt{\frac{F_T}{F_G}} \sim \sqrt{\frac{v_0^2 / l_0}{g}} = \frac{v_0}{\sqrt{g l_0}},$$

Euler-szám: 
$$Eu \sim \frac{\text{nyomásból származó erő}}{\text{tehetetlenségi erő}} = \frac{F_P}{F_T} \sim \frac{(p - p_0) l_0}{\rho l_0 v_0^2} = \frac{p - p_0}{\rho v_0^2},$$

Weber-szám 
$$We \sim \frac{\text{tehetetlenségi erő}}{\text{felületi feszültségből származó erő}} = \frac{F_T}{F_F} \sim \frac{v_0^2 / l_0}{\sigma / l_0^2 \rho} = \frac{\rho v_0^2 l_0}{\sigma}$$



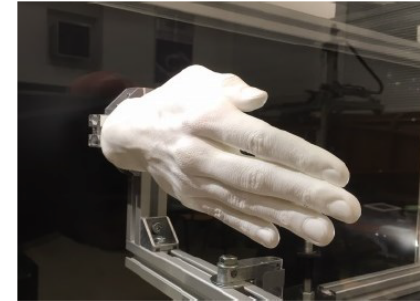


## 8.5.3. A hasonlósági számok és alkalmazásuk

### X.PÉLDA (ÁRAMLÁSOK HASONLÓSÁGA)

X. FELADAT „A” csoport „B” csoport

Egy úszó kéz 1:1 méretarányú modelljén aerodinamikai paramétereket (pl. ellenálláserő) kell meghatároznunk, viszont nincs vízcsatorna a laborunkban csak szélcsatorna. Olyan, a kéz körüli áramláshoz hasonló körülményeket kell biztosítanunk, amikor az úszó keze az úszómedencében nyugalomban lévő vízben éppen  $v=2\text{m/s}$  ( $v=1,5\text{m/s}$ ) sebességgel mozog a vizsgált időpillanatban. Ez a  $v$  megfúvási sebesség vehető a  $v_0$  jellemző sebességnek, míg a kéz körüli áramlásra jellemző hosszlépték  $l_0=0,1\text{m}$ .



**KÉRDÉSEK: A)** Melyik hasonlósági szám azonosságát kell biztosítani? Indokolja választát!

**B)** Mekkora megfúvási sebességet kell beállítani a szélcsatornában, hogy a valósághoz hasonló áramlást hozzunk létre a modell kéz körül? Válaszát számítással indokolja!

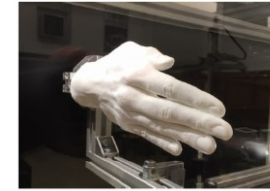
ADATOK		valós	modell
Megnevezés	mértékegység	víz	levegő
sűrűség	$\text{kg}/\text{m}^3$	1000	1,184
hőmérséklet	$^\circ\text{C}$	18	21
viszkozitás	$\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$	$10^{-3}$	$18,4\cdot 10^{-6}$
megfúvási sebesség	$\text{m}/\text{s}$	2	?
erőtér térerősségvektora	$\text{N}/\text{kg}$	9,81	9,81
légköri nyomás	$\text{Pa}$	100 453	99 870







## 8.5.3. A hasonlósági számok és alkalmazásuk



### MEGOLDÁS

**Reynolds-szám:**

$$\text{Re} = \frac{v_0 l_0}{\nu}$$

**A)** A kéz körüli áramlásban a tehetetlenségi és a súrlódó erők dominálnak, így a Reynolds-szám azonosság a hasonlósági feltétel a vízbeli valós („V”) és a levegőbeli modell („M”) áramlás között.

**B) Hasonló áramlás feltétele:**  $\text{Re}_{\text{Valós}} = \text{Re}_{\text{Modell}}$

$$\frac{v_{0,\text{valós}} \cdot l_{0,\text{valós}}}{\nu_{\text{valós}}} = \frac{v_{0,\text{modell}} \cdot l_{0,\text{modell}}}{\nu_{\text{modell}}}$$

Az M=1:1 méretarány esetén a jellemző hosszlépték azonos, így :

$$v_{0,\text{modell}} = v_{0,\text{valós}} \frac{\nu_{\text{modell}}}{\nu_{\text{valós}}} = v_{0,\text{valós}} \frac{\frac{\mu_{\text{modell}}}{\rho_{\text{modell}}}}{\frac{\mu_{\text{valós}}}{\rho_{\text{valós}}}} = 2 \cdot \frac{18,4 \cdot 10^{-6}}{\frac{1,184}{1000}} = 31,08 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**A „B” csoport adatokkal az eredmény:**

$$v_{0,\text{modell}} = v_{0,\text{valós}} \frac{\nu_{\text{modell}}}{\nu_{\text{valós}}} = v_{0,\text{valós}} \frac{\frac{\mu_{\text{modell}}}{\rho_{\text{modell}}}}{\frac{\mu_{\text{valós}}}{\rho_{\text{valós}}}} = 1,5 \cdot \frac{18,4 \cdot 10^{-6}}{\frac{1,184}{1000}} = 23,31 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$





## 8.5.3. A hasonlósági számok és alkalmazásuk

### X.PÉLDA (ÁRAMLÁSOK HASONLÓSÁGA)

#### X. FELADAT

Személyautó körüli áramlást tanulmányozunk, de szélcsatornánk nincs, csak olyan vízcsatornánk, amely mérőterében legfeljebb 10m/s vízsebesség állítható be. Kapunk egy, a valós



személyautóhoz geometriailag hasonló,  $M=1:5$  méretarányban lekicsinyített modellt. A Reynolds-szám azonosság, mint hasonlósági feltétel betartása során a jellemző sebességnek a megfúvási sebességet, a jellemző hosszléptéknek pedig az  $l_0 = \sqrt{A_{ref}}$  összefüggéssel számítható értéket vehetjük. Itt  $A_{ref}$  az autó haladási irányra merőleges vetület keresztmetszete. A valós autóra  $A_{ref} = 2\text{m}^2$ .

#### ADATOK:

Jel	mértékegység	VALÓS	MODELL (M=1:5)
$A_{ref}$	$\text{m}^2$	2	$2 \cdot M^2 = 0,08$
$l_0 = \sqrt{A_{ref}}$	m	$\sqrt{2}$	$\sqrt{0,08} = \sqrt{2}/5$
	<b>közeg</b>	<b>LEVEGŐ</b>	<b>VÍZ</b>
$\rho$	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	1,15	1000
$v$	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$16,8 \cdot 10^{-6}$	$8,01 \cdot 10^{-7}$
$\mu$	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$	$1,932 \cdot 10^{-5}$	$8,01 \cdot 10^{-4}$
$t_0$	$^{\circ}\text{C}$	32	30
$R$	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	287	-

**KÉRDÉS:** Legfeljebb mekkora valós haladási sebességű autó körüli áramlás vizsgálható ebben a vízcsatornában ezzel a modellel? (Válaszát számítással indokolja!)



## 8.5.3. A hasonlósági számok és alkalmazásuk



### MEGOLDÁS

Az autómodell körüli áramlásban a tehetetlenségi és a súrlódó erők dominálnak, így a Reynolds-szám azonosság a hasonlósági feltétel a levegőbeli valós („V”: valós) és a vízbéli modell („M” modell) áramlás között.

Reynolds-szám:

$$\text{Re} = \frac{v_0 l_0}{\nu}$$

$$\text{Re}_{\text{valós}} = \text{Re}_{\text{modell}}$$

$$\frac{v_{0,\text{valós}} \cdot l_{0,\text{valós}}}{\nu_{\text{valós}}} = \frac{v_{0,\text{modell}} \cdot l_{0,\text{modell}}}{\nu_{\text{modell}}}$$

Az 1:5 méretarány esetén a jellemző hosszlépték eltérő, így ha  $v_{0,\text{modell}} = 10\text{m/s}$  lehet, akkor a vizsgálható max. való sebesség rendezve fentit adódik:

$$v_{0,\text{valós}} = v_{0,\text{modell}} \cdot \frac{\nu_{\text{valós}}}{\nu_{\text{modell}}} \cdot \frac{l_{0,\text{modell}}}{l_{0,\text{valós}}} = 10 \cdot \frac{16,8 \cdot 10^{-6}}{8,01 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{1}{5} = 41,95 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ (kb. } 151\text{km/h)}$$

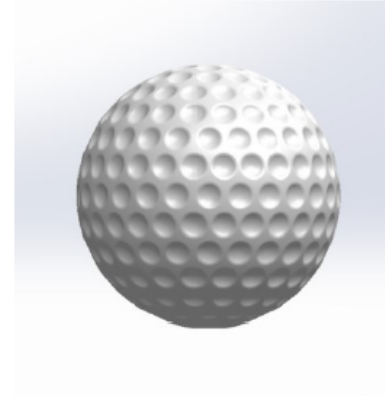




## 8.5.3. A hasonlósági számok és alkalmazásuk

### X.PÉLDA (áramlásba helyezett testekre ható erő)

Egy  $D=42,7\text{mm}$  átmérőjű valós golflabda felnagyított, 10:1 méretarányú modelljére vonatkozó aerodinamikai méréseket végzünk szélcsatornában. A nyugvó levegőben az éppen  $180\text{km/h}$  sebességgel mozgó valós golflabda körüli valós áramláshoz hasonló áramlási körülményeket kell biztosítanunk a szélcsatorna modellmérésen. A golflabda-modell mért ellenállástényezője  $c_e=0,2$ . A golflabda körüli áramlásra a jellemző hosszlépték ( $l_0$ ) mindig a labda átmérője (valós és modell esetben is). **ADATOK:**



ADATOK		VALÓS	MODELL
Megnevezés	mértékegység		
közeg		levegő	levegő
sűrűség ( $\rho$ )	$\text{kg/m}^3$	1,2	1,2
hőmérséklet (t)	$^{\circ}\text{C}$	25	25
viszkozitás ( $\nu$ )	$\text{m}^2/\text{s}$	$15,5 \cdot 10^{-6}$	$15,5 \cdot 10^{-6}$
megfúvási jell. sebesség ( $v_0$ )	$\text{km/h}$	180	?
térerősségvektor ( $g$ )	$\text{N/kg}$	9,81	9,81
ellenállástényező ( $c_e$ )	1	0,2	0,2

### KÉRDÉSEK:

- A) Indokolja, hogy a mérés során mely hasonlósági szám azonosságát kell biztosítani!
- B) Mekkora megfúvási sebességet kell beállítani a szélcsatornában? Válaszát számítással indokolja!
- C) Számítsa ki a szélcsatorna mérés esetére a kézre ható  $F_e$  ellenálláserőt ( $F_e=?[\text{N}]$ ) és aerodinamikai veszteségteljesítményt ( $P_{ae}=?[\text{W}]$ )!



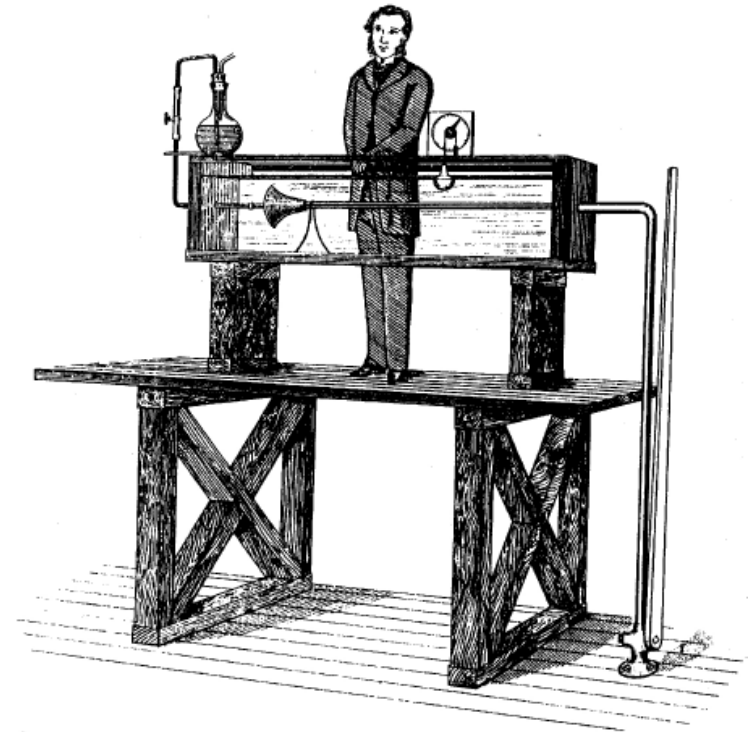


# 8. Súrlódásos közegek áramlása

Köszönöm a figyelmet!

Áramlástan előadást kiegészítő prezentáció  
Dr. Suda Jenő Miklós, adjunktus  
BME Áramlástan Tanszék

Felhasznált szakirodalom:  
Dr. Lajos T.: Az áramlástan alapjai tankönyv  
Dr. Balogh M.: Turbulencia modellezése előadásjegyzet  
Dr. Suda J.M.: Járműáramlástan előadásjegyzet



A Reynolds-féle kísérlet

