<u>Műszaki akusztika és zajcsökkentés</u> *(önálló felkészülést segítő tananyag)*

Összeállította: Dr. Koscsó Gábor c. egyetemi docens (BME Áramlástan Tanszék)

3. előadás

Tartalom:

3.1. A homogén lineáris akusztikai hullámegyenlet

A hangteret leíró változók közvetlen algebrai kapcsolata hasznos ismeret, de a hang térben és időben kiterjedő fizikai jelenség, ezért a hangterek általános modellezésénél a hangteret leíró változók (p', v', T' és ρ') hely- és időfüggését kell meghatározni. A hely- és időfüggő matematikai kapcsolatrendszert a hullámakusztikai modell, a hullámegyenlet és megoldása, a hullámfüggvény írja le. A hely- és időfüggvények meghatározásához a hangjelenségre vonatkozó hely- és időfüggő differenciálegyenleteket kell megoldani.

A matematikai modellezés első lépései (változók kiválasztása, fizikai alapelvek, hangtéri változók felbontása és az egyszerűsítő feltételek) az előző levezetéssel megegyeznek. A különbség a fizikai alapelveket kifejező egyenletek matematikai formája, amelyek most hely- és idő függő változókkal felírt parciális differenciálegyenletek. Az egyszerűség kedvért a levezetést első lépésben x irányba terjedő sík hanghullámra végezzük el.

Kontinuitás egyenlet általános 3 dimenziós alakja,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \underline{v}) = 0$$

Kontinuitás egyenlet x irányban (ahol vezessük be a $v_x = v$ jelölést),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$

A hangtéri változók felbontásával nyugvó közegben ($v_0 = 0$ m/s),

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big((\rho_0 + \rho')v'\big) = 0$$

A sűrűség egyensúlyi értéke időben állandó, így a deriváltja nulla,

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 v' + \rho' v') = 0$$

Továbbá a zárójelen belül a másodrendben kicsi, második tag elhanyagolásával, és a szorzat deriválás elvégzése után,

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + v'\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = 0$$

Homogén közegben az egyensúlyi sűrűség a hely függvényében állandó, így a bal oldalon a második tag nulla. A maradék a lineáris akusztikai kontinuitás egyenlet,

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = 0$$

Az egyenlet lineáris, mert a benne szereplő ismeretlen hangtéri változók (illetve azok deriváltjai) lineáris kifejezések, akusztikai, mert az alkalmazott elhanyagolások hangterekben teljesülnek és kontinuitás egyenlet, mert a kiinduló egyenlet a tömegmegmaradás elvét fejezi ki.

A súrlódásmentes folyadék mozgásegyenlet, az Euler-egyenlet háromdimenziós, sebességi derivált-tenzoros alakja,

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{D}}_v \underline{v} = -\frac{1}{\rho} grad\ p + \underline{g}$$

Az Euler-egyenlet x irányban (ahol v_x= v),

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g_x$$

A hangtéri változók felbontásával nyugvó közegben (v_0= 0 m/s) a mozgásegyenlet,

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial v'}{\partial x} v' = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'}\frac{\partial (p_0 + p')}{\partial x} + g_x$$

A gépészmérnöki gyakorlatban előforduló hangjelenségeknél a hullámhossz nagy (technikai normálállapotú levegőben a hullámhossz egy tizedesre kerekítve 50 Hz frekvencián 6,9 m, 2 kHz frekvencián 171,5 mm). Így a hangtéri változók (jelen esetben részecskesebesség) hosszegységre jutó megváltozása kicsi, ezért a bal oldalon a második tag másodrendben kicsi, jó közelítéssel elhanyagolható. Továbbá a ρ' kicsi értéke miatt legyen $\rho_0+\rho' \approx \rho_0$, így a jobb oldalon az összeg deriválásával,

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial x} + g_x - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}$$

Az egyenlet jobb oldalán az első két tag az egyensúlyi nyomásból származó erő és a külső eredő erőtér tömegegységre vonatkozó értékei (a hidrostatika egyenlet x irányú összetevő bal oldala), előjeles összegük nulla. A külső erőtér kiesése fizikai megközelítésben azt jelenti, hogy a levegőrészecskék a levegőben lebegnek, hangtani szempontból a statikus erőtér jelenléte nem befolyásolja a hangterjedést (pl.: gravitációs erőtérben a hang függőlegesen lefelé, felfelé és vízszintesen egyaránt ugyanúgy terjed). A megmaradt tagok kapcsolata a lineáris akusztikai mozgásegyenlet,

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}$$

A kontinuitás- és mozgásegyenletekben három független hangtéri változó (ρ', v' és p') szerepel, a megoldáshoz kell egy harmadik független egyenlet. Ebben a hely- és időfüggő energiaegyenlet felírása érdemben nem segít, mert benne egy újabb ismertlen (T') szerepel. A megoldás érdekében a harmadik független egyenletet az algebrai modellből vesszük (a számunkra jelenleg fontos hely- és időfüggést a lineáris akusztikai kontinuitás- és mozgásegyenletek már tartalmazzák),

$$\frac{p'}{\rho'} = a^2 = \kappa R T_0$$

Az előző egyenletben a bal oldal a kontinuitás és mozgásegyenletek összevonásából származik, de az, hogy a hangsebesség négyzete állandó, az energiaegyenlet és a gáz állapotegyenlet alapján derült ki. A változók számának csökkentése (a részecskesebesség kiejtése) érdekében deriváljuk a kontinuitás egyenletet az idő, illetve a mozgásegyenletet a hely szerint,

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} = 0$$

illetve

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}$$

A vegyes másodrendű deriváltak egyenlőségét figyelembe véve, a hely szerinti derivált mozgásegyenlet jobb oldalát az idő szerinti derivált kontinuitás egyenlet bal oldalán a második tagba helyettesítve,

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0$$

A hangsebesség négyzet kifejezésből származó, $\rho' = p'/a^2$ felhasználásával, a homogén lineáris akusztikai hullámegyenlet,

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0$$

Megjegyzések:

- A homogén lineáris akusztikai hullámegyenlet egy másodrendű, hiperbolikus típusú parciális differenciálegyenlet, a hangterjedés és a hangterek leírására szolgáló alapegyenlet. Jelentőségét a belőle levonható fizikai következtetések, az egyszerű esetekre vonatkozó analitikus megoldásai és a bonyolult esetekre vonatkozó numerikus szimulációs megoldásai adják.

- A hullámegyenletet más fizikai jelenségre (húrokban terjedő mechanikai zavarásterjedés leírására), de lényegét tekintve hasonló hullámterjedésre, először d'Alembert vezette le, ezért a szakirodalom számos helyen a d'Alembert-egyenlet néven említi.

- Attól függően, hogy a levezetés során mely változókat ejtjük ki, vagy a lineáris algebrai kapcsolatrendszerrel p'-t melyik változóra cseréljük ki, a többi hangtéri változóra (v', T' és ρ') is a hullám-egyenlettel megegyező alakú egyenlet vezethető le. Ez a formálisnak tűnő matematikai tény fizikailag azt jelenti, hogy a hangterjedés során a hangtéri jellemzők térben és időben egyszerre (szimultán) változnak.

- Különböző közegekben a hangsebesség nagyságrendje általában $10^2 \ldots 10^4$ közötti értékek, így a hullámegyenlet átrendezésével belátható, hogy hangterekben a hely szerinti változékonyság sokkal kisebb, mint az idő szerinti.

- A fizika más területein, más jelenségekkel (húrok, membránok mozgása, szabadfelszíni közegmozgás, fénytan, elektromágnesesség, …) kapcsolatban, természetesen más fizikai változóra, de ugyanilyen alakú differenciálegyenlet vezethető le. Ezek a jelenségek mindegyike rendelkezik hullámtermészettel. Ezért az előzőekben levezetett, illetve a vele megegyező alakú egyenleteket hullámegyenletnek nevezzük.

- Térben általános jellegű hangterek leíráshoz a háromdimenziós alapegyenletekből kiindulva háromdimenziós hullámegyenlet vezethető le,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = 0$$

Ahol a Laplace operátor,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- A homogén akusztikai hullámegyenlet az egyszerűsítő feltételek következtében a hangtér leírására alkalmas. Figyelembe véve a hang hullámtermészetét, ez önmagában is nagy feladat. A levezetés során néhány egyszerűsítő feltétel (pl.: súrlódásmentes, hőszigetelő közeg) elhagyásával olyan egyenlet vezethető le, amely bal oldala a homogén hullámegyenlet bal oldalával megegyezik, de a jobb oldala nem nulla. Ezt az egyenletet inhomogén hullámegyenletnek nevezzük, segítségével a hangkeltés és a hangcsillapodás is leírhatóvá válik.

- A homogén akusztikai hullámegyenletnek általános és részmegoldásai vannak. Konkrét esetre vonatkozóan a megoldáshoz egy kezdeti és két peremfeltételre is szükség van.

A homogén, lineáris, akusztikai hullámegyenlet megoldásai

Mérnöki szempontból egy egyenlet annyit ér, amennyire megoldható. Ezért kiemelt figyelmet szentelünk a hullámegyenlet különböző megoldásaira. A hullámegyenlet megoldását hullámfüggvénynek nevezzük. A homogén hullámegyenlet általános megoldása mellett fontos részmegoldásai léteznek, illetve különbséget teszünk szabad- és határolt terekre vonatkozó megoldások között.

3.2. Hullámegyenlet általános megoldása

Végtelen kiterjedésű, homogén, folytonos közegben a hullámegyenlet általános megoldása a következő hullámfüggvény, amely szabad térben az egydimenziós síkhullám hangterjedést írja le,

$$p'(x,t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right) + g\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

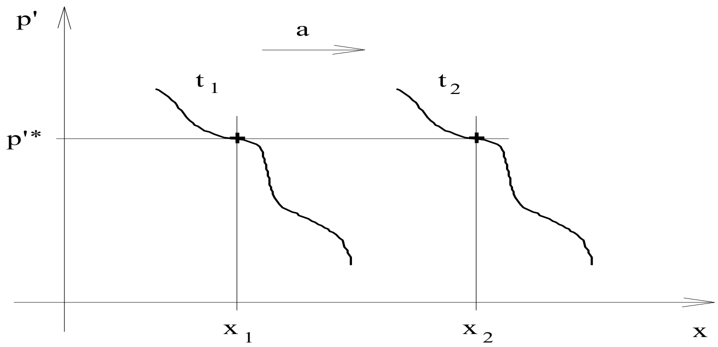
Megjegyzések:

- A megoldás két tetszőleges függvény (f és g) összege, amelyek argumentumában, szokatlan módon, a független változók (t és x) felsorolása helyett, azok egyszerű függvény kapcsolata található.

- A megoldás formális helyessége könnyen ellenőrizhető. Vegyük első lépésben az „f” összetevőt. A külső függvény a hely és az idő függvénye, így a hullámegyenletbe helyettesítve az idő és a hely szerint kétszer deriválás ugyanolyan alakú eredményt ad. A hely szerinti derivált esetében a külső függvény kétszeres deriváltját a belső függvény deriváltjával kétszer meg kell szorozni. Emiatt az idő- és hely szerinti kétszer derivált tagok alakja egyező, előjelük ellentett, így az összeg nulla, a megoldás helyes. Hasonló eredményt kapunk a „g” függvény összetevő esetében is.

- Az f és g kétszer folytonosan differenciálható, alapvetően tetszőleges függvények, vagyis a mechanikai zavarás alakjára a hullámegyenlet nem tesz megkötést. Ennek az elsőre meghökkentő ténynek a fizikai tartalma az, hogy tetszőleges gerjesztés képes hullámot létesíteni. Ezt a hangok sokféleségére vonatkozó gyakorlati megfigyelés is alátámasztja.

- A hullámfüggvény argumentuma is fontos tartalmat rejt. A megoldás formális helyességének létrehozásában betöltött szerepét korábban már beláttuk, most nézzük meg, mi az argumentum fizikai tartalma. Első lépésben vizsgáljuk a „f” függvény összetevőt, a megértést segíti a következő ábra.



Pozitív x irányban mozgó hullám hangnyomás megoszlása a hely függvényben t_1 és t_2 pillanatban

Válasszuk ki a hullámfront t_1 időpontban x_1 helyen tartózkodó csillaggal jelzett pontját. Ebben a pontban a hangnyomás értéke p'*. A hullámfront csillaggal jelzett pontja valamivel később, t_2 időpontban, a hang hullámtermészetének köszönhetőn balról jobbra, az x_2 pontba mozdul el. Síkhullám hangterjedés esetén a hangsugarak nem tartanak szét (nem divergálnak) és nem tartanak össze (nem fókuszálódnak). Továbbá a kiinduló egyszerűsítő feltételeknek köszönhetően a hangterjedés során nem lép fel veszteség (nincs csillapítás), és nem keletkezik hang (nincs hangforrás), így a hullámfront csillaggal jelzett pontjában az új t_2 időpontban és x_2 helyen a hangnyomás értéke ugyanakkora, mint a kiindulásnál volt. Visszatérve a megoldásfüggvényhez,

$p'^*(x_1, t_1) = p'^*(x_2, t_2)$ esetünkben az „f" összetevőt vizsgálva, $f\left(t_1 - \frac{x_1}{a}\right) = f\left(t_2 - \frac{x_2}{a}\right)$

Tetszőleges „f" függvény esetén az egyenlőség akkor áll fenn, ha „f"-be ugyanazt a számot helyettesítjük be,

$t_1 - \frac{x_1}{a} = t_2 - \frac{x_2}{a}$ átrendezést követően, $a = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

A bemutatott levezetéssel megerősítést kaptunk arra a korábbi ismeretünkre, amely szerint az argumentumban szereplő „a" változó a hullámfront egy kiszemelt pontja által megtett távolság, x_2-x_1 és az eközben eltelt idő t_2-t_1 hányadosa, a hangsebesség. Az argumentum, sajátos matematikai nyelvén, a hullám haladó jellegét fejezi ki. Hasonló gondolatmenettel megállapítható, a megoldás függvény másik, „g" összetevője a mínusz x irányban haladó hullámokat írja le.

- Összefoglalva, a hullámegyenlet általános megoldása az x tengely mentén (pozitív és negatív irányban), szabadon terjedő síkhullámokat írja le. Két fontos fizikai jelentése, hogy tetszőleges mechanikai zavarás terjedni fog és a terjedési sebesség nagysága „a".

- Térben tetszőleges n irányban terjedő sík hullám a következő hullámfüggvénnyel írható le,

$$p'(x,t) = f\left(t - \frac{\underline{r}\,\underline{n}}{a}\right) + g\left(t + \frac{\underline{r}\,\underline{n}}{a}\right)$$

3.3. Harmonikus hullámok:

Harmonikus gerjesztés hatására harmonikus hullám keletkezik. A harmonikus hullám (más néven monokromatikus hullám vagy tiszta hang) szinusz illetve koszinusz függvénnyel írható le. A hullámegyenlet megoldásai közül a harmonikus hullámok kiemelt jelentősége egyrészt avval magyarázható, hogy a harmonikus hullámot leíró szinusz és koszinusz függvények a harmonikus (spektrális) elemzés alapelemei, másrészt a véges méretű, rugalmas anyagok (pl.: légoszlop csőben, két pont között kifeszített húr, harang) szabad rezgései harmonikus rezgések, vagy azok összetétele, így az általuk létrehozott hang harmonikus hullám, vagy azok összetétele lesz.

A harmonikus mozgások leírására alkalmas szinusz és koszinusz függvény argumentuma szög mértékegységű (radián), így az általános megoldásban található idő mértékegységű argumentumról szög mértékegységűre kell áttérni, amellyel bevezetjük a hullám állapotára jellemző fázisszög fogalmát,

$$\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)=\omega t-\frac{\omega}{a}x=\omega t-kx$$

A megoldásfüggvény f és g tetszőlegesen bővíthető, így az argumentum megszorzása a szögsebesség (ω) értékével megengedett (az összefügés jobb oldalán k a hullámszám). A harmonikus rezgőmozgásokhoz hasonlóan a harmonikus hullámoknál is adott időpontban és helyen a hangtéri változó értéke egy ω szögsebességgel forgó amplitúdó vektor x valós tengelyre leképzett vetületi értékével egyenlő. A rezgések esetében a forgó amplitúdó vektor szöghelyzete (fázisszöge) csak az időtől függ, a hullámok esetében azonban a forgóvektor fázisszögét az idő és hely koordináta együtt határozza meg. Az átalakított argumentum utolsó kifejezése alapján jól látható, hogy tetszőleges időpontban a kezdőponthoz képest x távolságban lévő pontban kx értékkel kell csökkenteni (retardálni) a fázisszöget a hangtéri változó meghatározásához. Ezek figyelembe vételével, a pozitív x tengely irányában haladó, $\hat{p}$ amplitúdójú, ω szögsebességű harmonikus hanghullám hullámfüggvénye a hangnyomás változóra,

$$p'(x,t)=\hat{p}\cdot cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

Ahol:

Jel	Mértékegység	Név	Jelentés
p'(x,t)	[Pa]	hangnyomás	hangtérben az egyensúlyi értékhez képest kialakuló nyomáskülönbség
$\hat{p}$	[Pa]	hangnyomás amplitúdó	az egyensúlyi értékhez képest a legnagyobb eltérés nagysága
$\omega t-kx+\varphi_0$	[rad]	fázisszög	forgó amplitúdóvektor pozíciója
ω=2π/T	[rad/s]	szögsebesség, szögfrekvencia	a hullám által időegység alatt megtett fázisszög
T	[s]	periódus idő	x= áll. helyen a hullám két szomszédos, azonos fázis állapota között eltelt idő (pl. két szomszédos pozitív maximum közötti idő)
f=1/T	[Hz]	frekvencia	időegység alatti periódusok száma
k=2π/λ	[rad/m]	hullámszám	a hullám által hosszúság egységen befutott fázisszög
λ	[m]	hullámhossz	t= áll. időpontban a hullám két szomszédos, azonos fázis állapota között mérhető távolság (pl. két szomszédos pozitív maximum közötti távolság)
φ_0	[rad]	kezdőfázis	t= 0sec időben és x= 0m helyen a hullám tetszőleges fázisát beállító szög

Harmonikus hullámoknál az azonos zavarási állapotban lévő folyadékrészeket tartalmazó felületet a forgóvektor azonos fázisszöge miatt fázisfelületnek hívjuk. Legyen a kezdőfázis φ_0= 0 rad, és emeljük ki a harmonikus hullámfüggvény argumentumából a szögsebességet,

$$\omega t-kx=\omega\left(t-\frac{x}{\omega/k}\right)=\omega\left(t-\frac{x}{a_f}\right)\ ,\ \ a_f=\frac{\omega}{k}=\frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda}=\frac{\lambda}{T}$$

Ahol „a_f" a harmonikus hullám fázissebessége, adott fázishoz tartozó zavarási állapot terjedési sebessége.

Harmonikus hullámok komplex exponenciális írásmódja: A harmonikus hullámokkal kapcsolatos levezetések során az exponenciális leírás számos esetben előnyösebb, mint a trigonometrikus (pl. deriválás, integrálás esetén). A komplex hangnyomás felírásához a hullámfüggvényt kiegészítjük egy képzetes taggal, a trigonometrikus alakot exponenciálisra átírva, a helytől és időtől függő és nem függő tagokat szétválasztva a komplex hangnyomás (**p'**(x,t)),

$$\boldsymbol{p}'(x,t)=\hat{p}\cdot cos(\omega t-kx+\varphi_0)+i\cdot\hat{p}\cdot sin(\omega t-kx+\varphi_0)=\hat{p}\cdot e^{i(\omega t-kx+\varphi_0)}=$$

$$=\hat{p}\cdot e^{i\varphi_0}\cdot e^{i(\omega t-kx)}=\hat{\boldsymbol{p}}\cdot e^{i(\omega t-kx)}$$ ahol a komplex hangnyomás amplitúdó, $\hat{\boldsymbol{p}}=\hat{p}\cdot e^{i\varphi_0}$

A komplex hangnyomás amplitúdó a legnagyobb kitérés mellett a kezdőfázist is tartalmazza. Valós fizikai jelentése azonban csak a komplex hangnyomás valós részének van. Így a levezetések végén, a formális matematikai előnyök kihasználását követően, a tényleges hangtéri jellemző meghatározása érdekében a komplex mennyiség valós részét kell venni,

$$p'(x,t) = Re\left(\boldsymbol{p}'(x,t)\right)$$

3.4. Gyakorló feladatok

Gy.1. Az áramlástan alapegyenleteiből kiindulva vezesse le a hangnyomásra vonatkozó homogén akusztikai hullámegyenlet 1D síkhullámokat leíró alakját! A levezetés minden lépését írja le, az egyszerűsítő feltételeket, illetve az elhanyagolásokat indokolja! Adja meg az egyenlet alkalmazásait és írja fel a kapott egyenlet általános megoldását szabad térben!

Gy.2. Hosszú csőben egy membrán f=225 Hz frekvenciájú, dugattyúszerű harmonikus rezgő mozgást végez. A membrán legnagyobb sebessége (v_{max}) 0,006m/s. A kezdeti pillanatban a membrán közép-helyzetben van és maximális sebességgel a cső jobb oldali része felé mozog. Határozza meg a levegővel kitöltött cső belsejében a membrántól jobbra, 226m távolságban, a kezdő pillanathoz képest 145sec-al később kialakuló részecskesebesség értékét! A levegő hőmérséklet (t) 250°C, adiabatikus kitevő (κ) 1,4.

$a = \sqrt{\kappa R T_0} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot (273 + 250)} \approx 458{,}4\ \ m/s$

$\omega = 2\pi f\ = 2 \cdot \pi \cdot 225 \approx 1413{,}7\ \ rad/sec$

$k = \omega/a \approx 1413{,}7/458{,}4 \approx 3{,}1\ \ rad/m$

φ_0= 0 rad

$v'(x,t) = \hat{v} \cdot cos(\omega t - kx + \varphi_0) = 0{,}006 \cdot cos(1413{,}7 \cdot 145 - 3{,}1 \cdot 226 + 0) = 0{,}0046\ \ m/s$
