



AM02 – Műszaki áramlásan I.

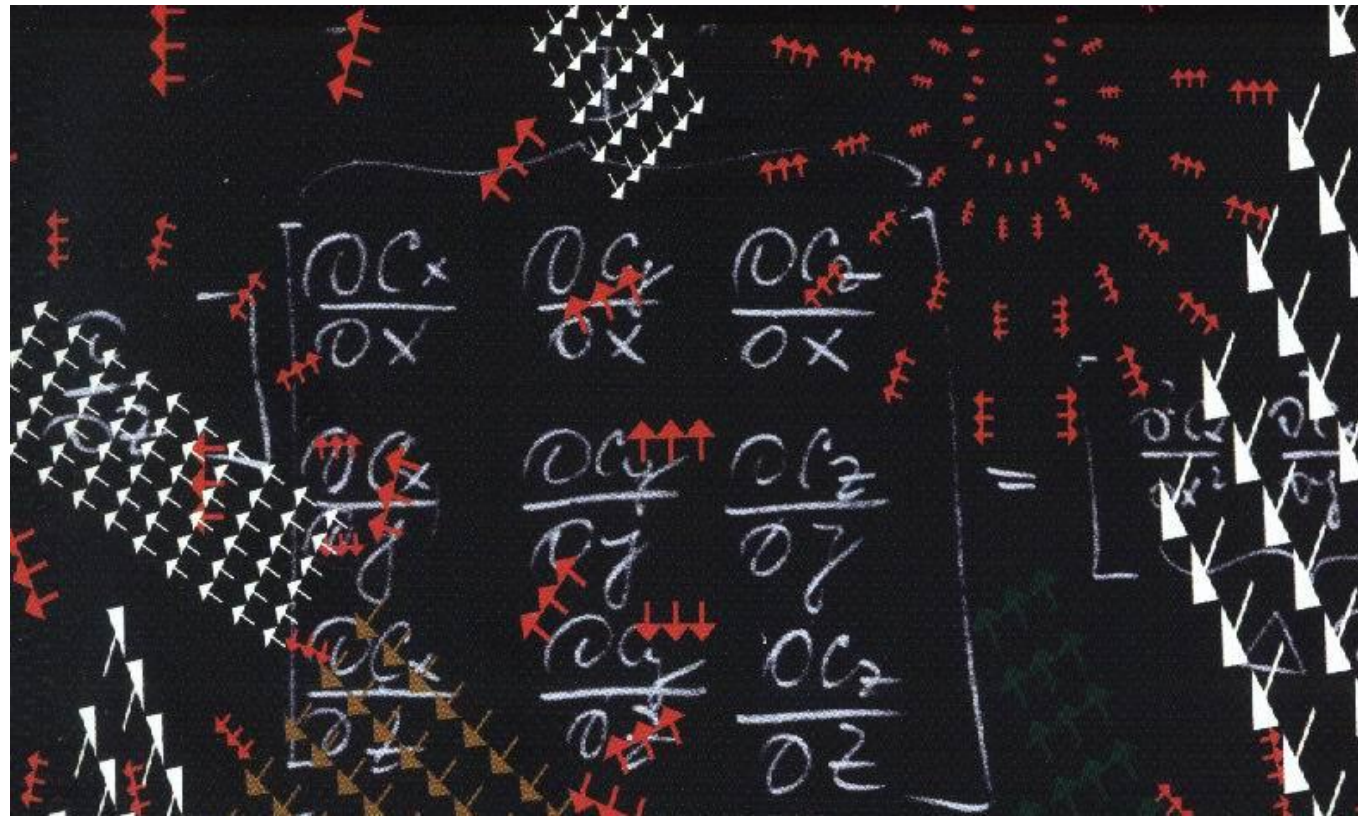
4.: Felületi feszültség, áramlások hasonlósága

Dr. Szente Viktor

adjunktus

szente@ara.bme.hu

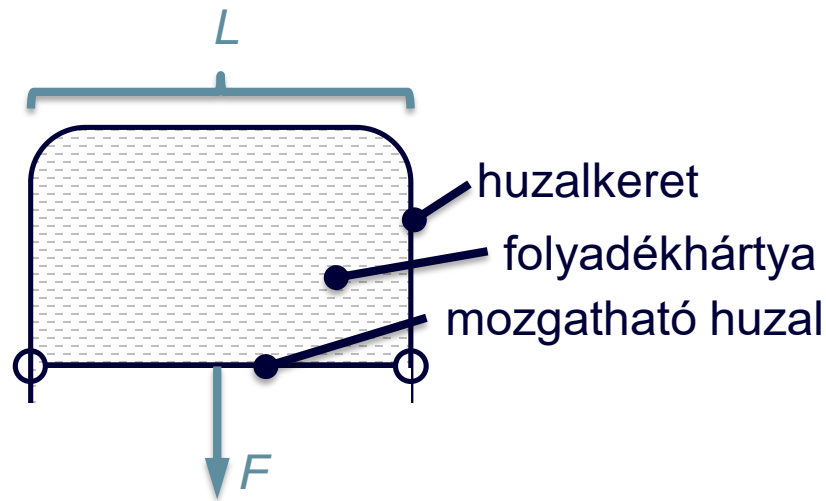
Budapesti Műszaki és
Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar
Áramlásan Tanszék



FELÜLETI FESZÜLTSG

Felületi feszültség: cseppfolyós-gáz határfelületen a vonzerő kiegyensúlyozatlan: rugalmas hártyaként viselkedik.

Mérése:



$$F = 2 \cdot L \cdot \sigma$$

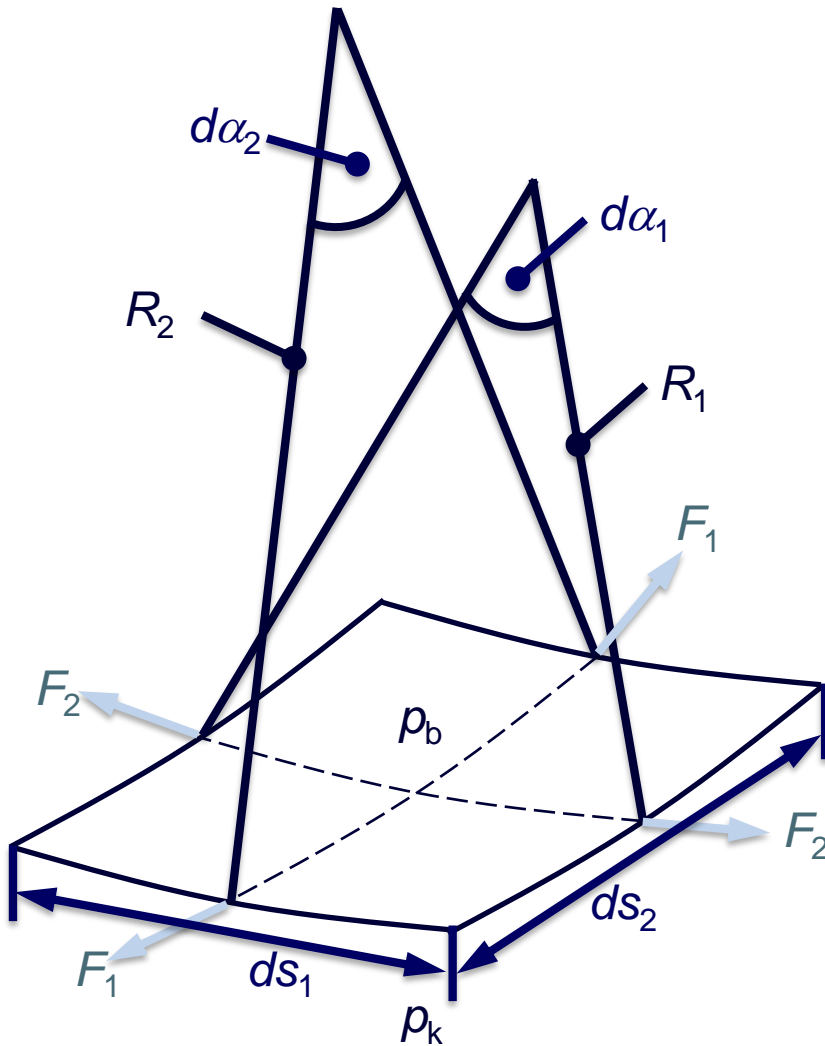
két oldala van a hártyának

$\sigma \left[\frac{N}{m} \right]$: egységnyi hosszra ható, felületi feszültségből származó erő

Levegő-víz esetén $\sigma = 0.072 \frac{N}{m}$



Ellipszoid alakú vízcsepp



$$ds_1 = R_1 \cdot d\alpha_1 \rightarrow d\alpha_1 = \frac{ds_1}{R_1}$$

$$ds_2 = R_2 \cdot d\alpha_2 \rightarrow d\alpha_2 = \frac{ds_2}{R_2}$$

$$F_1 = ds_1 \cdot \sigma$$

$$F_2 = ds_2 \cdot \sigma$$



Eredő erő:

$$F_{e1} = ds_1 \cdot \sigma \cdot d\alpha_2$$

$$F_{e2} = ds_2 \cdot \sigma \cdot d\alpha_1$$

Erőegyensúly:

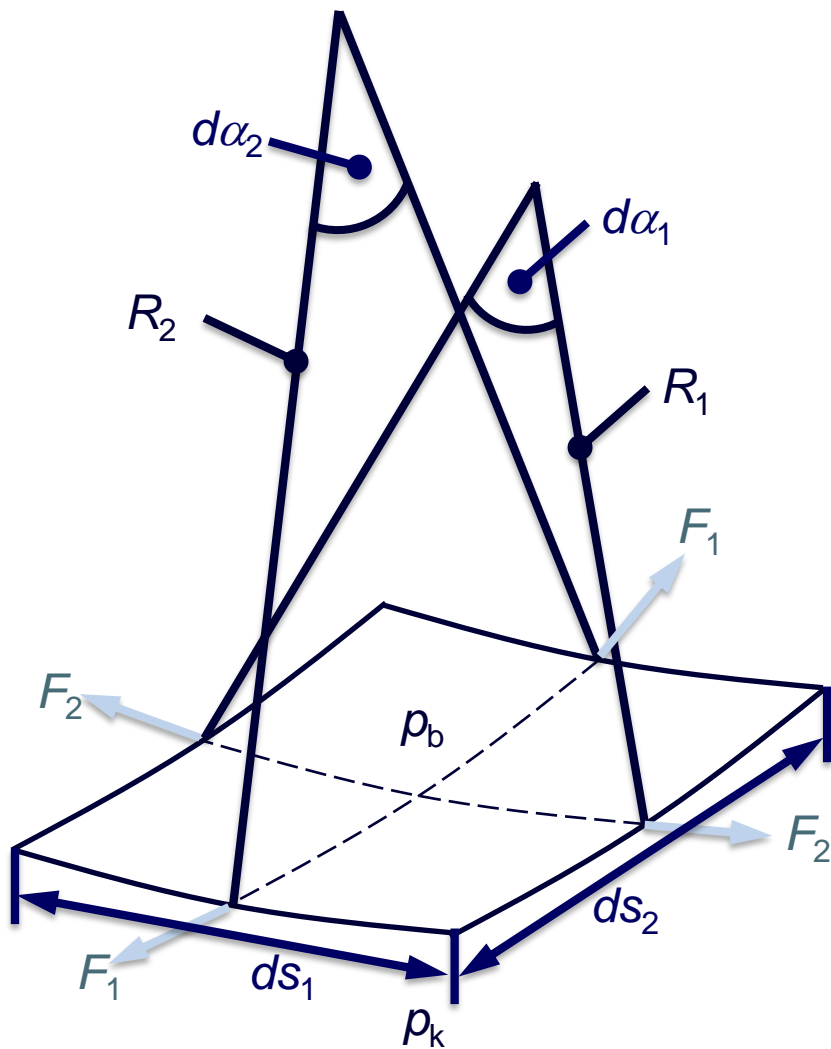
$$(p_b - p_k) ds_1 ds_2 = F_{e1} + F_{e2} =$$

$$= \sigma \cdot ds_1 \cdot d\alpha_2 + \sigma \cdot ds_2 \cdot d\alpha_1 =$$

$$= \sigma \cdot ds_1 \cdot ds_2 \cdot \frac{1}{R_2} + \sigma \cdot ds_2 \cdot ds_1 \cdot \frac{1}{R_1} =$$

$$= \sigma \cdot ds_1 \cdot ds_2 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

FELÜLETI FESZÜLTTSÉG



$$(p_b - p_k) \cancel{ds_1} \cancel{ds_2} = \sigma \cdot \cancel{ds_1} \cdot \cancel{ds_2} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$p_b - p_k = \sigma \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

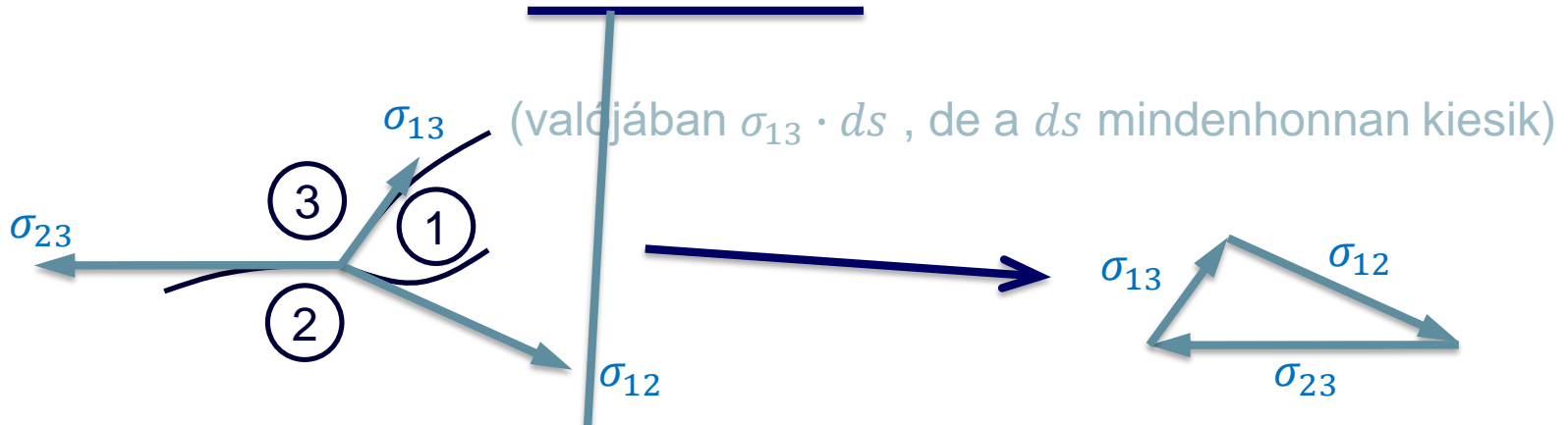
Ha gömb: $R_1 = R_2 \rightarrow p_b - p_k = \frac{2\sigma}{R}$

Ha hártya: $p_b - p_k = 2 \cdot \sigma \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$

Ha gömbhártya: $p_b - p_k = \frac{4\sigma}{R}$



Folyadékcseppek alakja (pl. víz-olaj-levegő kombináció)

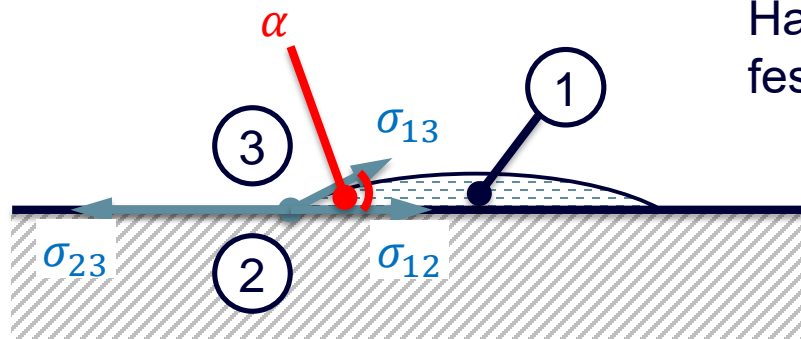


Ha a vektorháromszög nem záródik
(pl. $|\sigma_{23}| > |\sigma_{13}| + |\sigma_{12}|$)

akkor az ① a ② és ③ elválasztó felületén szétterjed.

FELÜLETI FESZÜLTSG

Folyadékcsepp alakja ha a 3 anyagból az egyik szilárd:



Ha a (3) levegő, akkor σ_{23} nem felületi feszültség, hanem adhézió.

$$\sigma_{23} = \sigma_{12} + \sigma_{13} \cdot \cos(\alpha) \quad \text{ebből}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\sigma_{23} - \sigma_{12}}{\sigma_{13}}$$

Lehetőségek:

- $\sigma_{23} > \sigma_{12} \rightarrow \alpha < 90^\circ$
- $\sigma_{23} < \sigma_{12} \rightarrow \alpha > 90^\circ$
- $|\sigma_{23}| > |\sigma_{12}| + |\sigma_{13}|$ ekkor az (1) a (2) felületén szétterjed (pl. petróleum: "kimászik" az üvegből)

FELÜLETI FESZÜLTSG

Kapilláris

Feltételezés: a kapillárisban a folyadék felszíne gömbszelet $\rightarrow p_b - p_k = \frac{2\sigma}{R}$

$$p_0 - p_A = 2 \cdot \sigma_{13} \cdot \frac{1}{R} = 2 \cdot \sigma_{13} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{r}$$

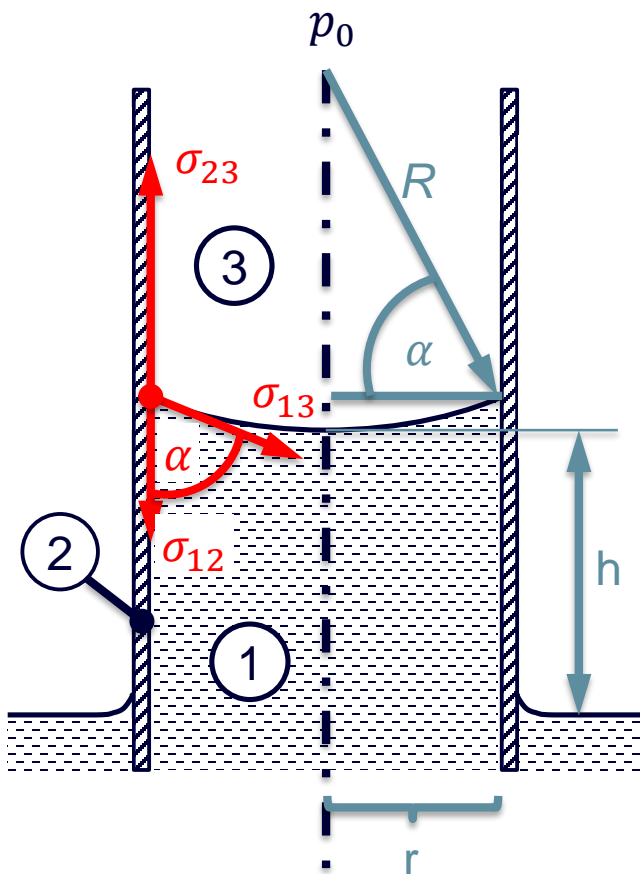
$$p_0 - p_A = \rho \cdot g \cdot h$$

$$2 \cdot \sigma_{13} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{r} = \rho \cdot g \cdot h$$

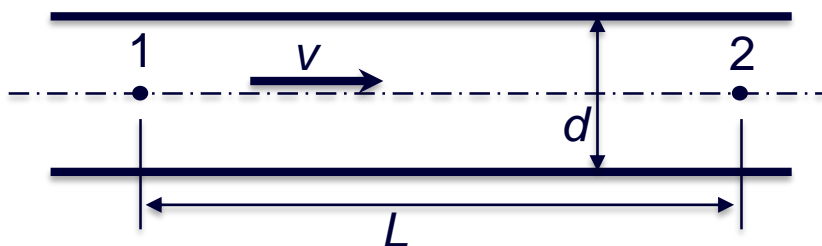
$$h = \frac{2 \cdot \sigma_{13} \cdot \cos(\alpha)}{\rho \cdot g \cdot r}$$

Ha $\alpha < 90^\circ \rightarrow h > 0$ (pl. üveg-víz-levegő)

Ha $\alpha > 90^\circ \rightarrow h < 0$ (pl. üveg-higany-levegő)



DIMENZIÓANALÍZIS



$$\Delta p' = ?$$

$$\Delta p' = f(L, \mu, \rho, d, v)$$

Ezt kellene meghatározni

Probléma: legalább 5 változó van ☹

Kiindulás: a vizsgált fizikai mennyiségek dimenziói (mértékegységei) leírhatók fizikai alapegységekkel: kg, m, s...

Mégpedig az alábbi módon: $Q = kg^\alpha \cdot m^\beta \cdot s^\gamma$

Itt Q-ból legalább 6 van (a $\Delta p'$ is az!).

Szeretnénk meghatározni a $f(Q_1, Q_2 \dots Q_n) = 0$ függvényt.

A fentiek szerint Q_n leírható:

$$[Q_1] = kg^{a_{11}} \cdot m^{a_{21}} \cdot s^{a_{31}}$$

$$[Q_2] = kg^{a_{12}} \cdot m^{a_{22}} \cdot s^{a_{32}}$$

⋮

$$[Q_n] = kg^{a_{1n}} \cdot m^{a_{2n}} \cdot s^{a_{3n}} \quad \text{ahol } a_{ij} \text{ ismert.}$$

$$\text{Pl.: sebesség: } \frac{m}{s} \rightarrow kg^0 \cdot m^1 \cdot s^{-1}$$



Kérdés: létezik-e (léteznek-e) $\Pi = Q_1^{k_1} \cdot Q_2^{k_2} \dots Q_n^{k_n}$ alakú dimenziótlan csoport(ok), amely(ek) a szereplő fizikai mennyiségek dimenziós hatványaiból leírhatók?

$$\Pi = kg^0 \cdot m^0 \cdot s^0 = (kg^{a_{11}} \cdot m^{a_{21}} \cdot s^{a_{31}})^{k_1} \cdot (kg^{a_{12}} \cdot m^{a_{22}} \cdot s^{a_{32}})^{k_2} \dots$$

$$\begin{array}{l}
\text{innen } a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 \dots + a_{1n}k_n = 0 \\
a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3 \dots + a_{2n}k_n = 0 \\
a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3 \dots + a_{3n}k_n = 0
\end{array}
\left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}} \right\} \text{dimenziómátrix}$$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{bmatrix}$ Ennek rangja R , ha **létezik** R -ed rendű nem-0 értékű aldeterminánsa, és **nem létezik** $R+1$ -ed rendű nem-0 értékű aldeterminánsa.

Ha a dimenziómátrix rangja R , akkor az egyenletrendszernek $n-R$ független megoldása van.

(R rendszerint megegyezik a fizikai alapmennyiségek számával, itt $R=3$)

Azaz $n-R$ dimenziótlan csoport képezhető. Itt $6-3=3$ db.



Eddigieket összefoglalva a dimenzióanalízis lépései:

- Fizikai alapmennyiségek meghatározása
- A jelenséget befolyásoló $Q_1, Q_2 \dots Q_n$ fizikai mennyiségek meghatározása
- Dimenziómátrix felállítása, rangjának meghatározása
- Egyenletrendszer megoldása ($n-R$ megoldás meghatározása)
- $\Pi_1, \Pi_2 \dots \Pi_{n-R}$ dimenziótlan csoportok képzése
- $f(\Pi_1, \Pi_2 \dots \Pi_{n-R}) = 0$ függvénykapcsolat kísérleti meghatározása.

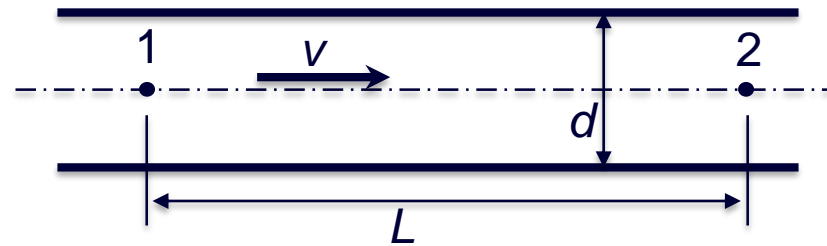
DIMENZIÓANALÍZIS ALKALMAZÁSA

	$\Delta p'$	L	μ	ρ	d	v
kg	1	0	1	1	0	0
m	-1	1	-1	-3	1	1
s	-2	0	-1	0	0	-1

kiegészítő négyzetmátrix: $\underline{\underline{A}}$
 mátrix: $\underline{\underline{B}}$

eredménymátrix: $\underline{\underline{C}} = -(\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}})^T =$

-1	0	-2
0	-1	0
-1	-1	-1



$$\Delta p' = f(L, \mu, \rho, d, v)$$

egységmátrix: $\underline{\underline{D}} =$

1	0	0
0	1	0
0	0	1

DIMENZIÓANALÍZIS ALKALMAZÁSA

$$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & -1 \\ \hline -2 & 0 & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & -2 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Eredmény:

$\underline{\underline{B}}$	$\underline{\underline{A}}$
$\underline{\underline{D}}$	$\underline{\underline{C}}$

→

	$\Delta p'$	L	μ	ρ	d	v
kg	1	0	1	1	0	0
m	-1	1	-1	-3	1	1
s	-2	0	-1	0	0	-1
Π_1	1	0	0	-1	0	-2
Π_2	0	1	0	0	-1	0
Π_3	0	0	1	-1	-1	-1

Konstanssal osztani
vagy szorozni szabad

$$\Pi_1 = \Delta p' \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{v^2} = \frac{\Delta p'}{\rho \cdot v^2}$$

$$\Pi_2 = \frac{L}{d}$$

$$\Pi_3 = \mu \cdot \frac{1}{\rho \cdot d \cdot v} = \frac{\mu}{\rho \cdot v \cdot d} = Re$$

Reciprokot venni is szabad

$$v = \frac{\mu}{\rho}$$

ÁRAMLÁSOK HASONLÓSÁGA

Kisminta kísérlet a valódi helyett, de csak akkor, ha az eredmény felhasználható.

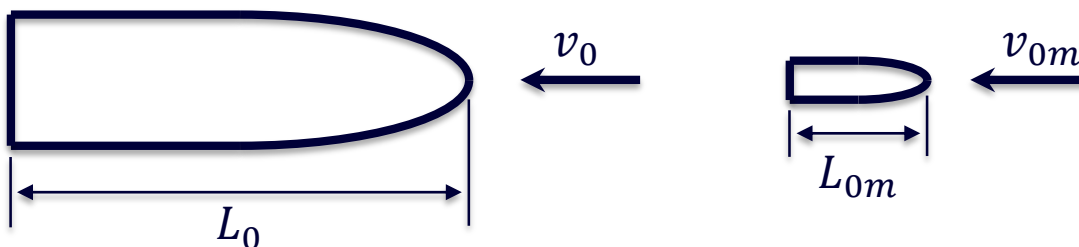
Mikor használható fel?

Ha az áramlás az eredetinél és a kismintánál hasonló.

Mikor hasonló?

Ha megegyező dimenziótlan függvények írják le a nyomás- és sebességeloszlást.

Vagyis: ugyanaz a dimenziótlan parciális diff. egy. rsz. és ugyanaz a dimenziótlan kezdeti- és peremfeltétel a dimenziótlan hely- és időkoordinátákban.



L_0 : áramlásra jellemző méret
 v_0 : áramlásra jellemző sebesség

$\frac{L_0}{v_0} = t_0$: áramlásra jellemző idő

ÁRAMLÁSOK HASONLÓSÁGA

Megegyező dimenziótlan függvények írják le a nyomás- és sebességeloszlást.

$$\frac{v}{v_0} = f\left(\frac{x}{L_0}, \frac{y}{L_0}, \frac{z}{L_0}, \frac{t}{t_0}\right) \quad \frac{p}{p_0} = f\left(\frac{x}{L_0}, \frac{y}{L_0}, \frac{z}{L_0}, \frac{t}{t_0}\right)$$

Ugyanaz a dimenziótlan parciális diff. egy. rsz. és ugyanaz a dimenziótlan kezdeti- és peremfeltétel a dimenziótlan hely- és időkoordinátákban.

Navier-Stokes egyenlet X irányú komponensegyenlete:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \cdot \frac{L_0}{v_0^2}$$

Dimenziótlan Navier-Stokes egyenlet X irányú komponensegyenlete:

$$\frac{\partial \left(\frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left(\frac{t}{L_0/v_0} \right)} + \frac{v_x}{v_0} \cdot \frac{\partial \left(\frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left(\frac{x}{L_0} \right)} + \dots = \frac{g_x L_0}{v_0^2} - \frac{\partial \left(\frac{p - p_0}{\rho \cdot v_0^2} \right)}{\partial \left(\frac{x}{L_0} \right)} + \frac{\nu}{v_0 L_0} \cdot \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left(\frac{x}{L_0} \right)^2} + \dots \right)$$

ÁRAMLÁSOK HASONLÓSÁGA

Ha $\rho = \text{áll.}$ akkor a dimenziótlan kontinuitásegyenlet felírható:

Dimenziós:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Dimenziótlan:

$$\frac{\partial \left(\frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left(\frac{x}{L_0} \right)} + \frac{\partial \left(\frac{v_y}{v_0} \right)}{\partial \left(\frac{y}{L_0} \right)} + \frac{\partial \left(\frac{v_z}{v_0} \right)}{\partial \left(\frac{z}{L_0} \right)} = 0$$

Hasonlóság feltétele: ugyanaz a dimenziótlan parc. diff. egy. rsz. írja le az áramlást:

- Állandóknak és együtthatóknak ugyanolyan értékűnek kell lennie:

$$\frac{\partial \left(\frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left(\frac{t}{L_0/v_0} \right)} + \frac{v_x}{v_0} \cdot \frac{\partial \left(\frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left(\frac{x}{L_0} \right)} + \dots = \frac{g_x L_0}{v_0^2} \cdot \frac{\partial \left(\frac{p - p_0}{\rho \cdot v_0^2} \right)}{\partial \left(\frac{x}{L_0} \right)} + \frac{v}{v_0 L_0} \cdot \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{v_x}{v_0} \right)}{\partial \left(\frac{x}{L_0} \right)^2} + \dots \right)$$

$$\frac{g_x L_0}{v_0^2} = \frac{g_{xm} L_{0m}}{v_{0m}^2} \qquad \frac{v}{v_0 L_0} = \frac{v_m}{v_{0m} L_{0m}}$$

- Dimenziótlan kezdeti- és peremfeltételek ugyanazok legyenek:

geometriai hasonlóság és a peremen hasonló viszonyok biztosítása.



$\frac{v}{v_0 L_0} \rightarrow \frac{vL}{v} = Re$ Reynolds-szám: tehetetlenségi erők és viszkózus erők között

$\frac{g_x L_0}{v_0^2} \rightarrow \frac{v}{\sqrt{gL}} = Fr$ Froude-szám: tehetetlenségi erők és nehézségi erők között

Probléma: Re azonosságából: $\frac{v_{0m}}{v_0} = \frac{L_0 v_m}{L_{0m} v} = \frac{L_0}{L_{0m}}$ mivel rendszerint $v_m = v$

Fr azonosságából: $\frac{v_{0m}}{v_0} = \sqrt{\frac{L_{0m}}{L_0}}$ mivel rendszerint $g_m = g$

Megoldás: ha az áramlás kitölti a teret (pl. búvárhajó), akkor Fr azonossága nem szükséges.

Hajóknál a hullámellenállás fontos \rightarrow térerő fontos $\rightarrow Fr$ fontos: külön kisminta Re és Fr számra.



Periodikus (instacioner) peremfeltétel: dimenziótlan időlépték ugyanaz legyen.

$$t_0 = \frac{L_0}{v_0} \rightarrow \frac{t_{pm}}{t_{0m}} = \frac{t_p}{t_0} \rightarrow \frac{t_{pm}v_{0m}}{L_{0m}} = \frac{t_p v_0}{L_0}$$

Mivel $t_p = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{t_p v_0}{L_0} = \frac{v_0}{L_0 f} \rightarrow Str = \frac{f L_0}{v_0}$ Strouhal-szám

Nyomás peremfeltétel biztosítása: $Eu = \frac{p - p_0}{\rho v_0^2}$ Euler-szám nyomásból származó erő és tehetetlenségi erő

Ha a felületi feszültség szerepe fontos (pl. porlasztás, befecskendezés):

$\Delta p \sim \frac{\sigma}{R} \rightarrow \frac{\sigma}{L_0} \rightarrow Eu = \frac{\sigma}{\rho L_0 v_0^2} \rightarrow We = \frac{\rho L_0 v_0^2}{\sigma}$ Weber-szám tehetetlenségi erő és a felületi feszültségből származó erő

A hasonlósági számok azonossága egyes esetekben nem követelmény hanem következmény:

pl. egy autó és modellje azonos dimenziótlan koordinátájú pontján az Eu-szám u.a.