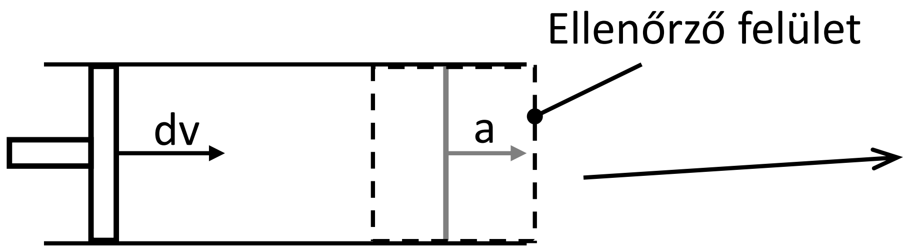
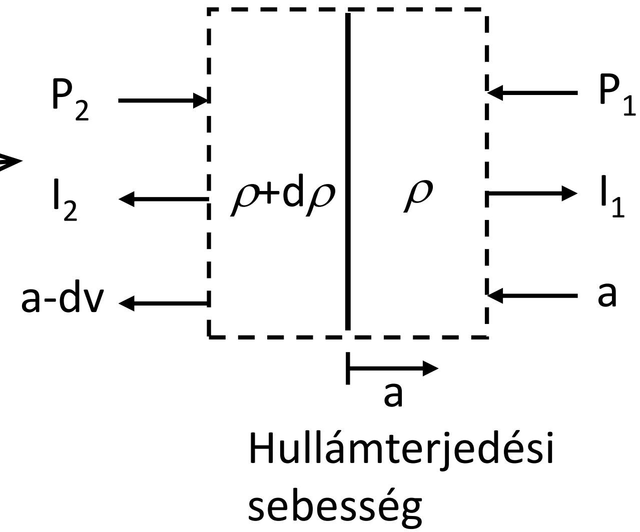
Emlékeztető: energiaegyenlet+gáztörvény $\frac{v^2}{2c_p} + T = áll.$ $\frac{p}{\rho^\kappa} = áll.$

Hullám terjedési sebességének megállapítása





Abszolút rendszer:

v:	0+dv	0
p:	p+dp	p
ρ:	ρ+dρ	ρ
T:	T+dT	T

Impulzustétel:

$$I_1 - I_2 = P_2 - P_1$$

$$\rho a^2 \cancel{A} - (\rho + d\rho)(a - dv)^2 \cancel{A} = (\cancel{p} + dp)\cancel{A} - \cancel{p}\cancel{A}$$

$$\rho a^2 - (\rho + d\rho)(a^2 - 2adv + dv^2) = dp$$

$$\cancel{\rho a^2} - \cancel{\rho a^2} + 2\rho a dv - \cancel{\rho dv^2} - a^2 d\rho + \cancel{2ad\rho dv} - \cancel{d\rho dv^2} = dp$$

Másodrendűen kicsi   Harmadrendűen kicsi

$$2\rho a dv - a^2 d\rho = dp$$

Kontinuitás:

$$\rho a \cancel{A} = (\rho + d\rho)(a - dv)\cancel{A}$$

$$\cancel{\rho a} = \cancel{\rho a} - \rho dv + a d\rho - \cancel{dv d\rho}$$

$$\rho dv = a d\rho$$

Másodrendűen kicsi

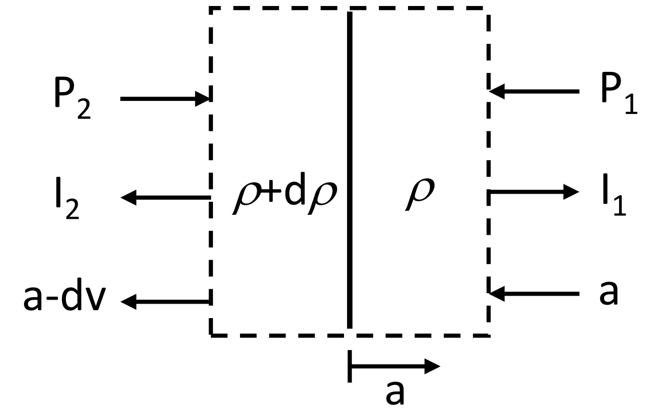
$$2\rho a dv - a^2 d\rho = dp$$

$$2a^2 d\rho - a^2 d\rho = dp$$

$$a^2 d\rho = dp$$

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Konkrétabban?



$$\frac{p}{\rho^\kappa} = áll. \rightarrow \frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \rightarrow p = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa}\rho^\kappa \rightarrow \frac{dp}{d\rho} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa}\kappa\rho^{\kappa-1} = \frac{p}{\rho^{\cancel{\kappa}}}\kappa\cancel{\rho^{\kappa-1}} = \frac{p}{\rho}\kappa = \kappa \cdot R \cdot T$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \kappa \cdot R \cdot T$$

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Vagyis: $a = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T}$

Tehát a hangsebesség gázokban csak a hőmérséklettől függ. Miért?

Mert a molekulák mozgása továbbítja a "jelet".
A hőmérséklet növelésével a molekulák gyorsabban mozognak: gyorsabban tudják továbbítani a jelet.

Áramlások hasonlósága összenyomható közegeknél

Navier-Stokes egyenlet X irányú komponensegyenlete:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

Dimenziótlanítás: $\cdot \frac{L_0}{v_0^2}$ $\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial\left(\frac{p-p_0}{\rho \cdot v_0^2}\right)}{\partial\left(\frac{x}{L_0}\right)}$ Ez volt. ITT NEM JÓ!!!

Helyette: $\frac{1}{\frac{\rho}{\rho_0}} \frac{\partial\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\partial\left(\frac{x}{L_0}\right)} \frac{p_0}{\rho_0\, v_0^2}$ mert a sűrűség nem állandó!

Vagyis: $\frac{p_0}{\rho_0\, v_0^2} = áll.\ (= Eu)$

Energiaegyenlet:

$$\int_V \rho \underline{v}\, \underline{grad}\left(\frac{v^2}{2}+c_pT\right)dV=0$$

Ennek teljesítéséhez $\underline{grad}(\dots)=0$ De ekkor $\underline{v}\, \underline{grad}\left(\frac{v^2}{2}+c_pT\right)=0$

Vagyis: $v_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}+c_pT\right)+v_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}+c_pT\right)+v_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}+c_pT\right)=0$

Dimenziótlanítás: $\cdot\frac{L_0}{v_0^3}$

Ekkor: $\frac{v_x}{v_0}\frac{\partial}{\partial\left(\frac{x}{L_0}\right)}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2+\frac{c_pT_0}{v_0^2}\frac{T}{T_0}\right)+\cdots=0$

$$\frac{c_pT_0}{v_0^2}=áll.$$

$$Eu=\frac{p_0}{\rho_0\, v_0^2}=áll.\;=\frac{R\,T_0}{v_0^2}=\frac{\kappa\,R\,T_0}{\kappa\,v_0^2}=\frac{1}{\kappa}\left(\frac{a_0}{v_0}\right)^2=\frac{1}{\kappa}\,\frac{1}{Ma^2}=áll.$$

$$\frac{v_0}{a_0}=Ma$$

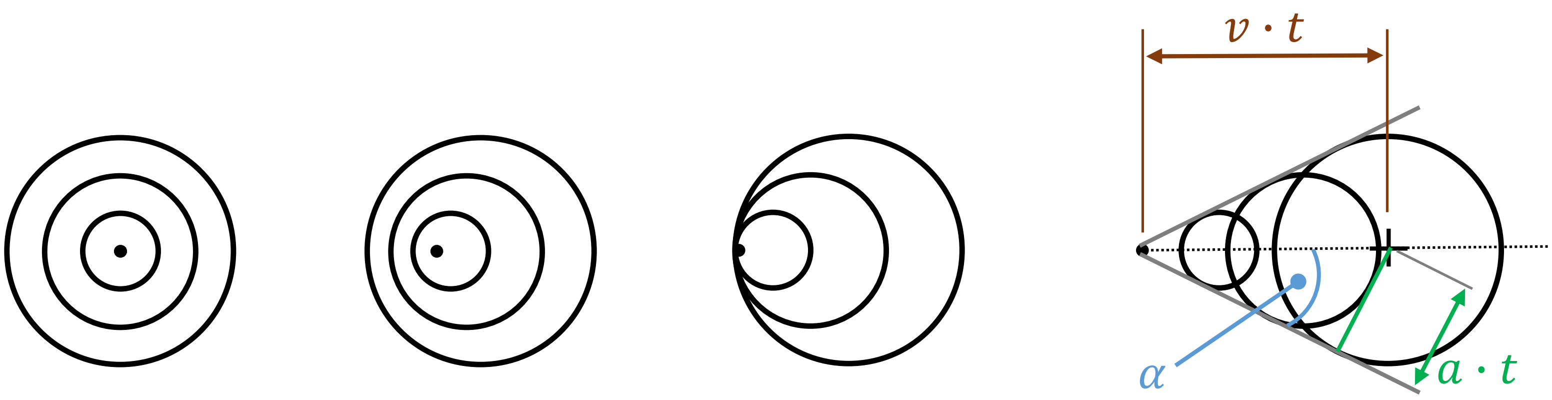
Mivel $\frac{c_p T_0}{v_0^2} = áll.$ és $\frac{p_0}{\rho_0\, v_0^2} = áll.$

$$\frac{\frac{p_0}{\rho_0\, v_0^2}}{\frac{c_p T_0}{v_0^2}} = áll. = \frac{p_0}{\rho_0\, v_0^2} \cdot \frac{v_0^2}{c_p T_0} = \frac{R\, T_0}{c_p T_0} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = 1 - \frac{c_v}{c_p} = 1 - \frac{1}{\kappa} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} = áll.$$

$$R = c_p - c_v$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa$$

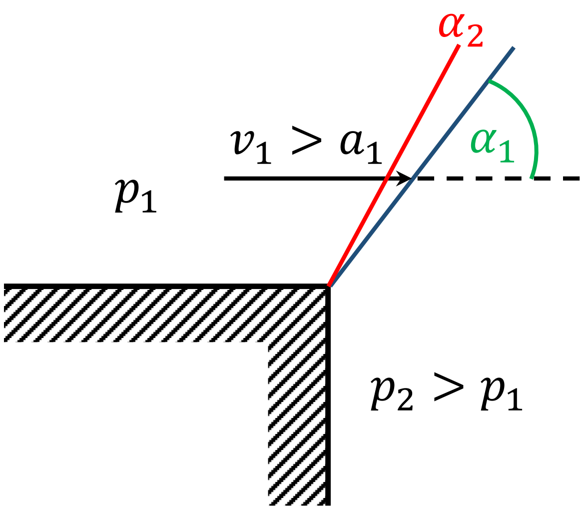
Hullámterjedés



$v = 0$ $v < a$ $v = a$ $v > a$

$$\sin \alpha = \frac{a \cdot t}{v \cdot t} = \frac{1}{Ma}$$

Hullám kialakulása sarok környezetében



$$p_2 > p_1$$

$$v_2 < v_1$$

$$T_2 > T_1$$

$$a_2 > a_1$$

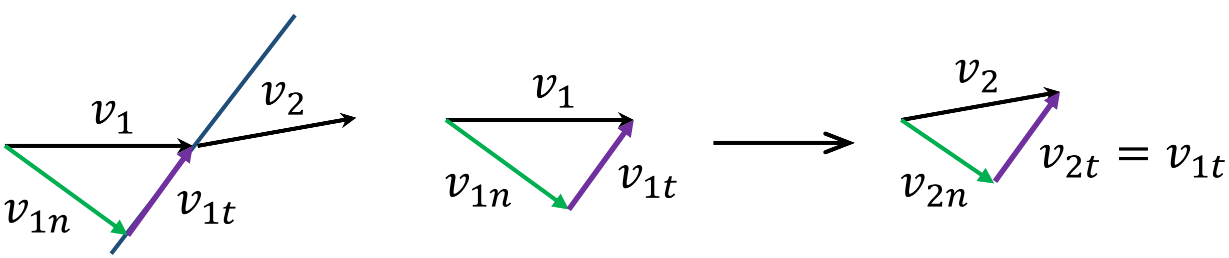
$$Ma_2 < Ma_1$$

$$\frac{1}{Ma_2} > \frac{1}{Ma_1}$$

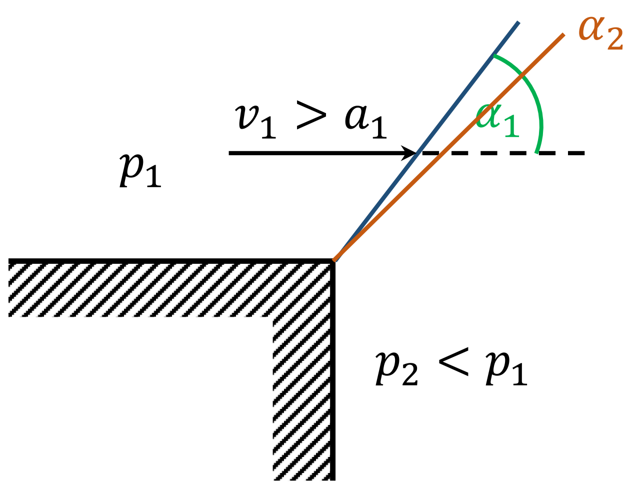
$$\alpha_2 > \alpha_1 \rightarrow ???$$

Egy vékony kompressziós hullám: lökéshullám.

A hullámra merőleges sebességkomponenst lassítja.



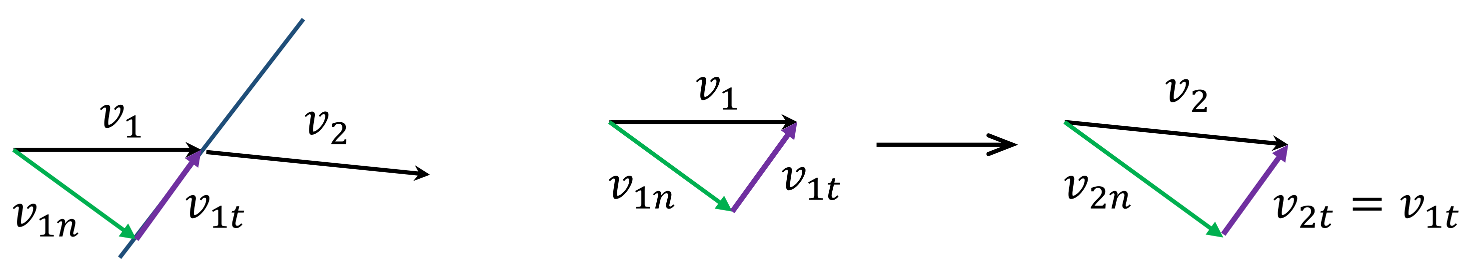
Hullám kialakulása sarok környezetében



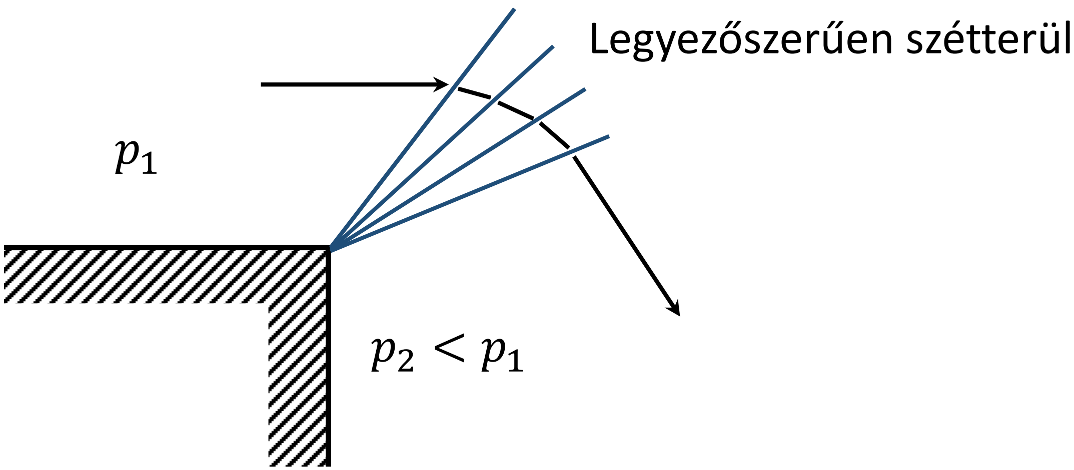
$$p_2 < p_1$$
$$v_2 > v_1$$
$$T_2 < T_1$$
$$a_2 < a_1$$
$$Ma_2 > Ma_1$$
$$\frac{1}{Ma_2} < \frac{1}{Ma_1}$$
$$\alpha_2 < \alpha_1$$

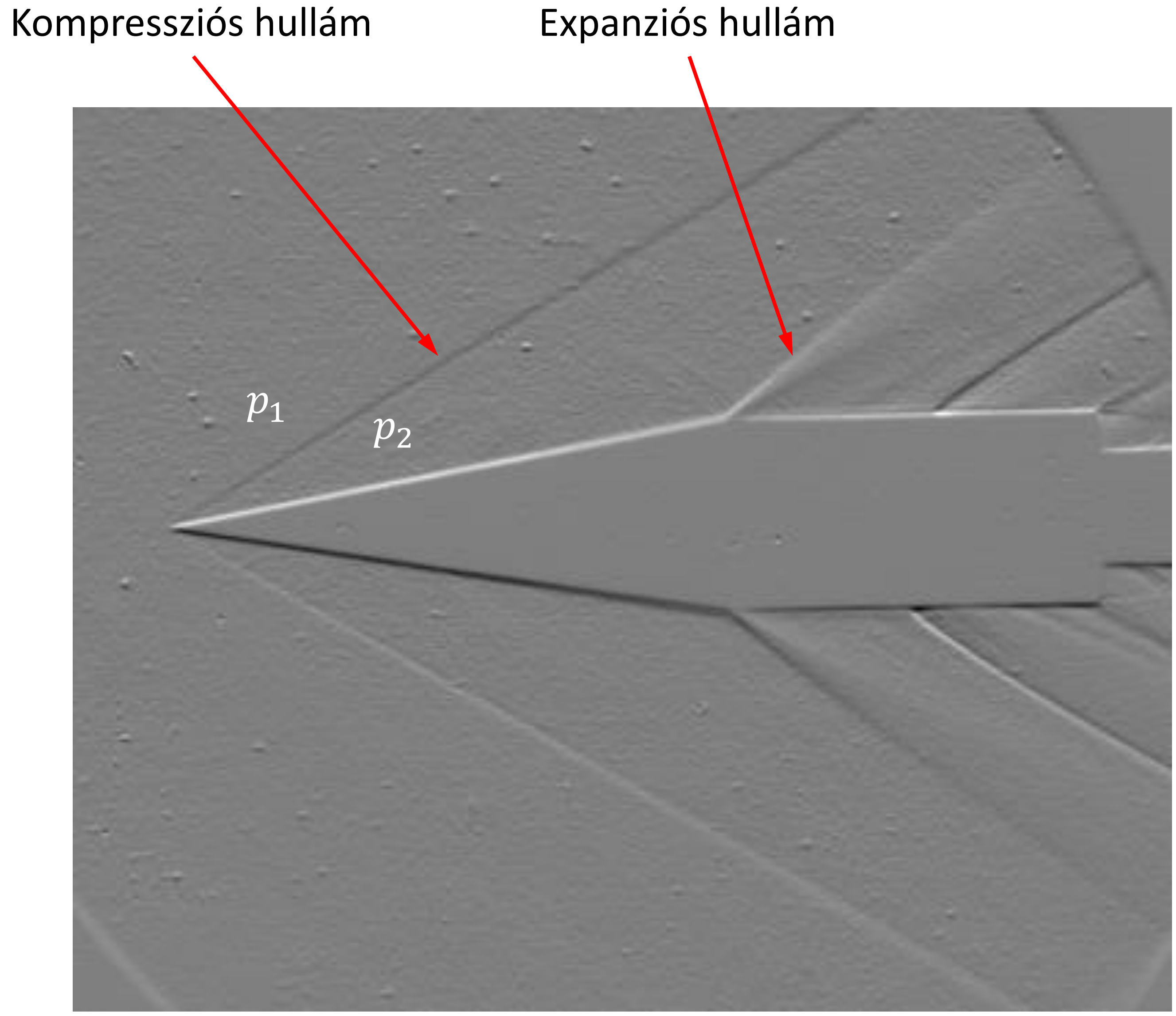
Legyezőszerűen szétterül: expanziós hullám.

A hullámra merőleges sebességkomponenst gyorsítja.



Hullám kialakulása sarok környezetében

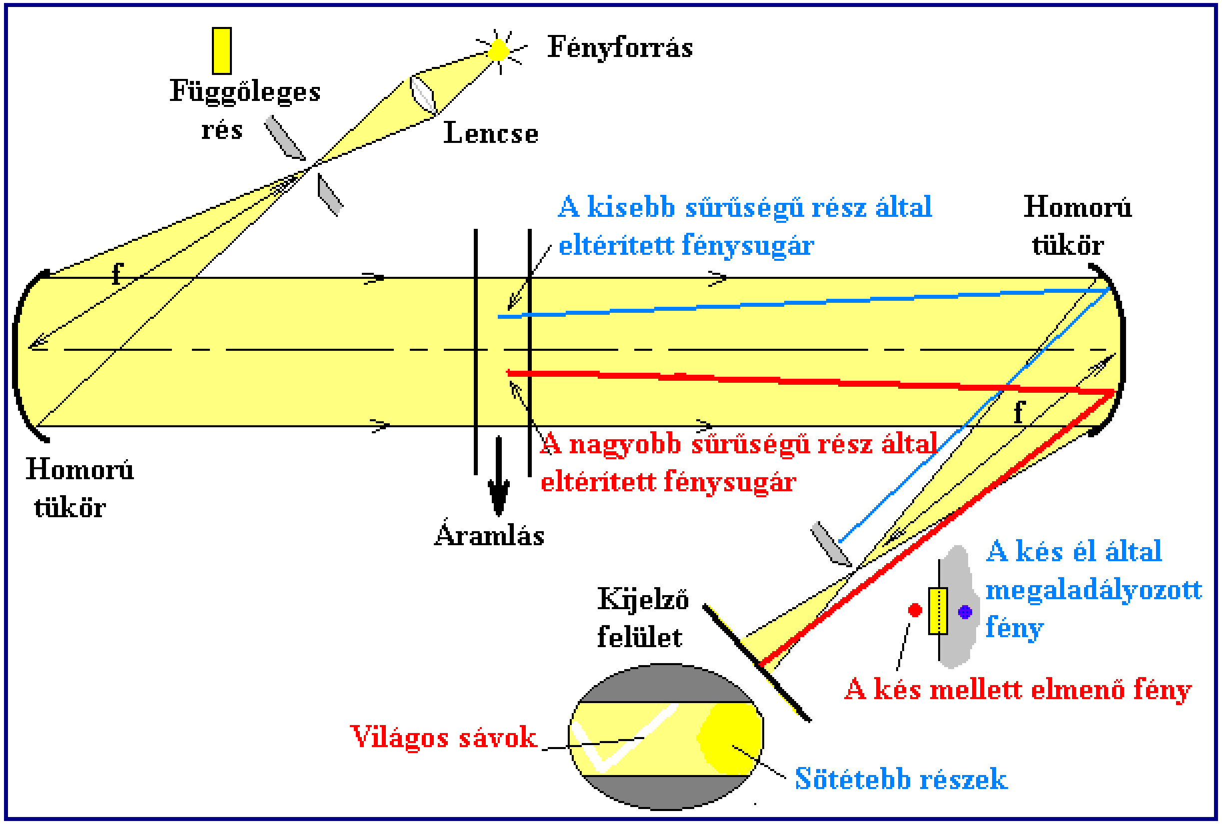


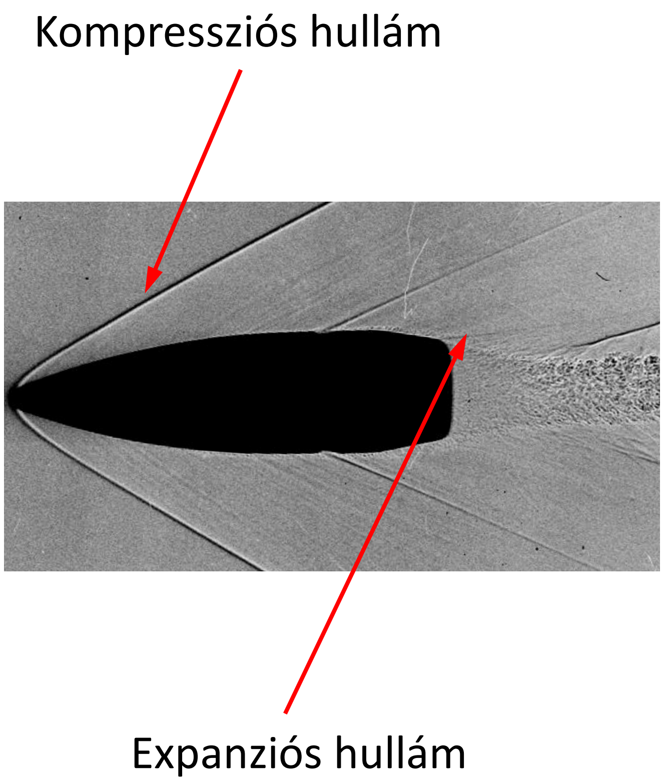


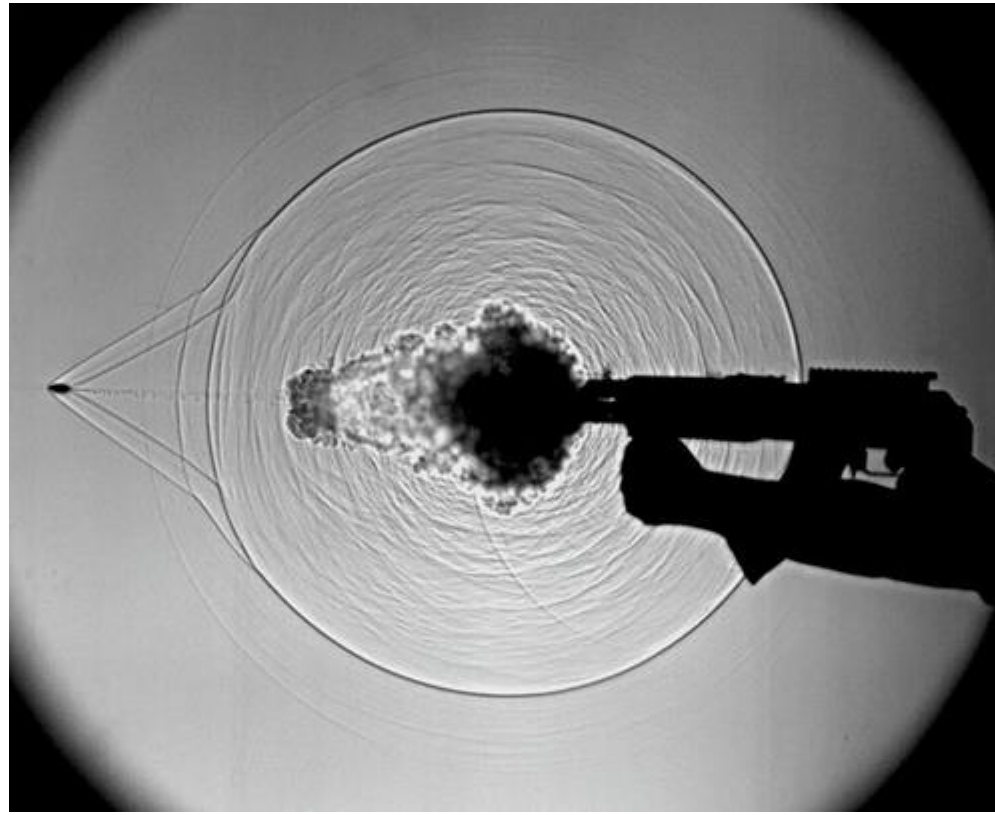
Torlópontban v = 0, tehát $p_2 > p_1$

Schlieren eljárás

http://www.ara.bme.hu/cfd/super2d/super2d.htm




Kompressziós hullám
Expanziós hullám



https://www.youtube.com/watch?v=mLp_rSBzteI

https://www.youtube.com/watch?v=px3oVGXr4mo

Laval-cső

Euler-egyenlet érintő irányú komponensegyenlete:

$$v\frac{\partial v}{\partial e} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial e} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial e} = -\frac{1}{\rho}a^2\frac{\partial \rho}{\partial e}$$

$\partial e \coloneqq de$ azaz végtelenül kicsi távolság

$$v\,dv = -a^2\frac{d\rho}{\rho}$$

$$v\,dv = a^2\left(\frac{dv}{v} + \frac{dA}{A}\right)$$

$$\frac{v}{a^2}\,dv = \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} \quad \Big/ \cdot \frac{v}{v}$$

$$\frac{v^2}{a^2}\frac{dv}{v} = \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A}$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{v^2}{a^2}\frac{dv}{v} - \frac{dv}{v} = (Ma^2 - 1)\frac{dv}{v}$$

Kontinuitás:

$$\rho\, v\, A = konst. \rightarrow d(\rho v A) = 0$$

$$d\rho\, vA + dv\,\rho A + dA\,\rho v = 0 \quad \Big/ : \rho v A$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\left(\frac{dv}{v} + \frac{dA}{A}\right)$$

Laval-cső

$$\frac{dA}{A} = (Ma^2 - 1)\frac{dv}{v}$$

$Ma < 1$:

ha $\frac{dv}{v}$ $\oplus$ azaz *v* nő, akkor $\frac{dA}{A}$ $\ominus$ azaz *A* **csökken**

$Ma > 1$:

ha $\frac{dv}{v}$ $\oplus$ azaz *v* nő, akkor $\frac{dA}{A}$ $\oplus$ azaz *A* **növekszik**

ha $\frac{dA}{A} = 0$ akkor $\frac{dv}{v} = 0$: a sebesség nem változik

vagy $Ma = 1$

Vagyis: *A*-nak szélsőértéke van

Mivel *Ma*=1-ig a sebesség nő ($\frac{dv}{v}\oplus$), addig *A* csökken,

tehát *A*-nak negatív szélsőértéke van: a **legszűkebb keresztmetszet**.

Legszűkebb keresztmetszetben uralkodó viszonyok

$$T_t = T^* + \frac{v^{*2}}{2\ c_p} = T^* + \frac{a^{*2}}{2\ c_p} = T^* + \frac{\kappa\ R\ T^*}{2\ c_p} = T^* \left(1 + \frac{\frac{c_p}{c_v}(c_p - c_v)}{2\ c_p} \right) = \cdots = \frac{\kappa + 1}{2} T^*$$

vagyis:

$$T_t = \frac{\kappa + 1}{2} T^* \qquad \frac{T^*}{T_t} = \frac{2}{\kappa + 1} \cong 0.83$$

$$\frac{p^*}{p_t} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \cong 0.53$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_t} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \cong 0.63$$

Laval-cső

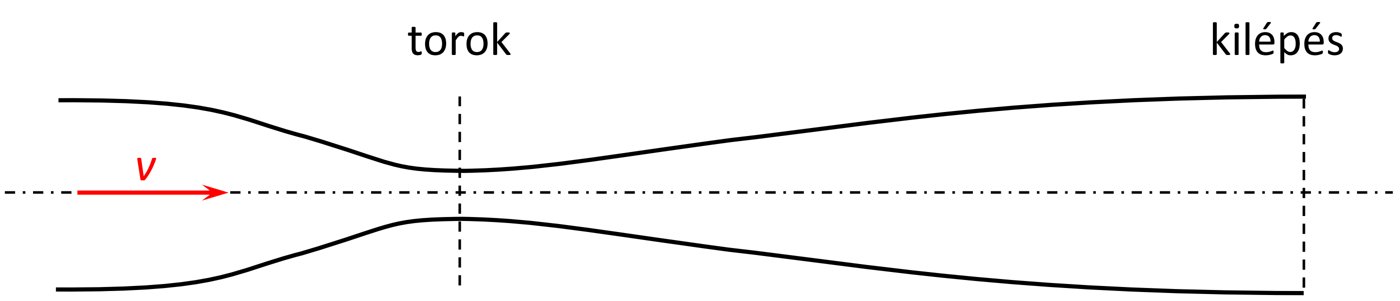
$$\frac{T^*}{T_t} = \frac{2}{\kappa+1} \qquad \frac{p^*}{p_t} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \qquad \frac{\rho^*}{\rho_t} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

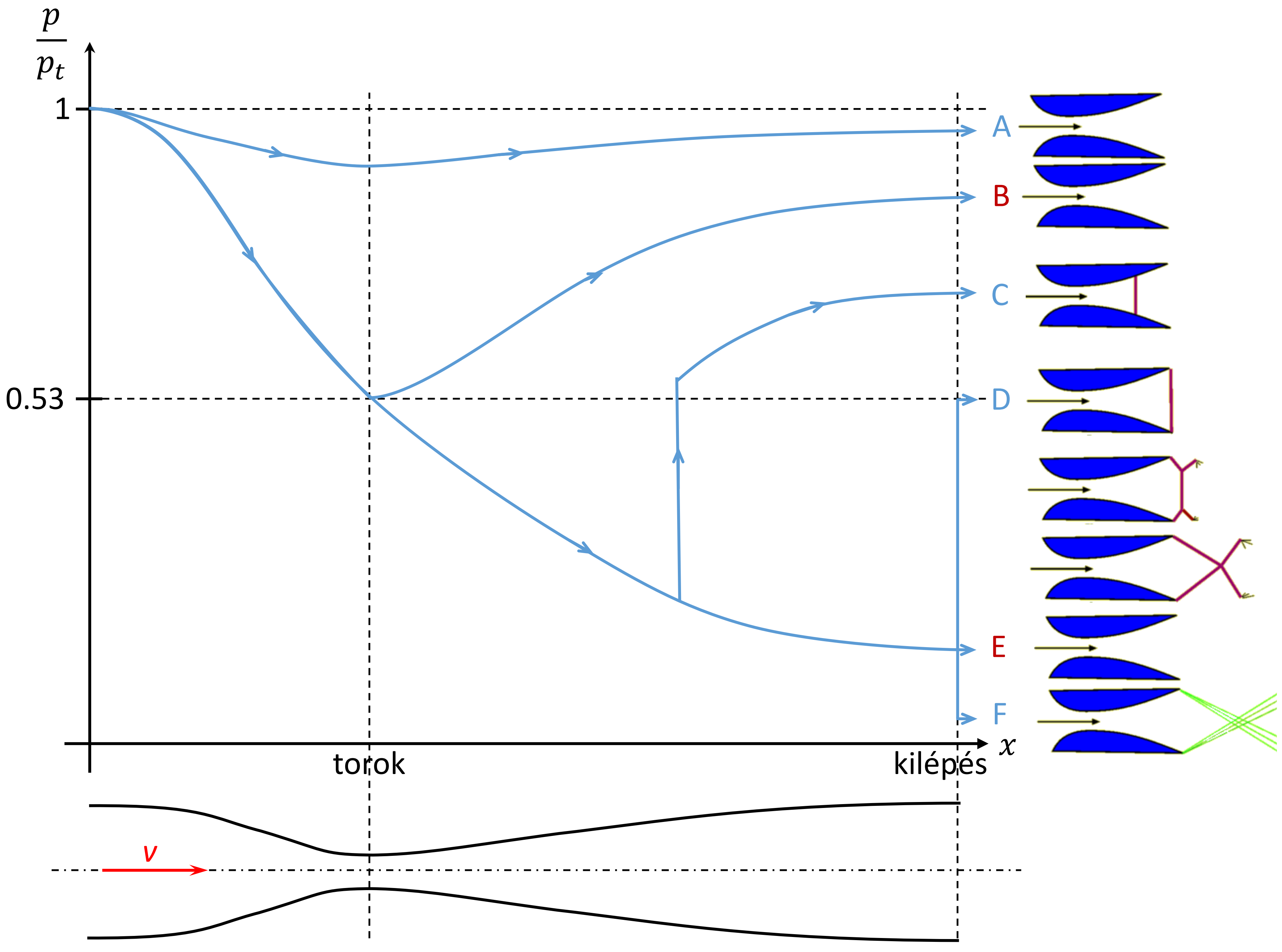
Kilépés:

$$\rho^* v^* A^* = \rho_{ki} v_{ki} A_{ki}$$

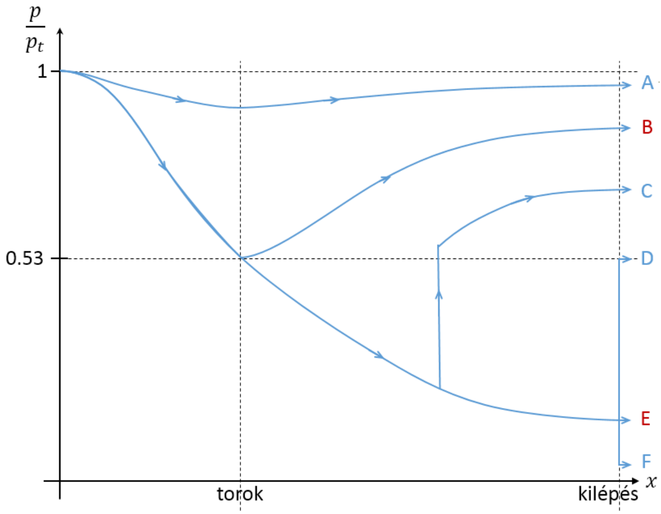
$$\underbrace{\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \rho_t}_{\rho^*} \underbrace{\sqrt{\kappa\, R \frac{2}{\kappa+1} T_t}}_{v^*} \cdot A^* = \underbrace{\rho_t \left(\frac{p_{ki}}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}}}_{\rho_{ki}} \underbrace{\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_t \left(1 - \left(\frac{p_{ki}}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}}_{v_{ki}} \cdot A_{ki}$$

$\frac{p_{ki}}{p_t}$ -re két megoldást ad.





$\frac{p}{p_t}$
1
0.53
A
B
C
D
E
F
torok
kilépés
x
v



A-B: hangsebesség alatti áramlás.

B: eléri a hangsebességet, de nem növekszik tovább.
Izentropikus megoldás N° 1.

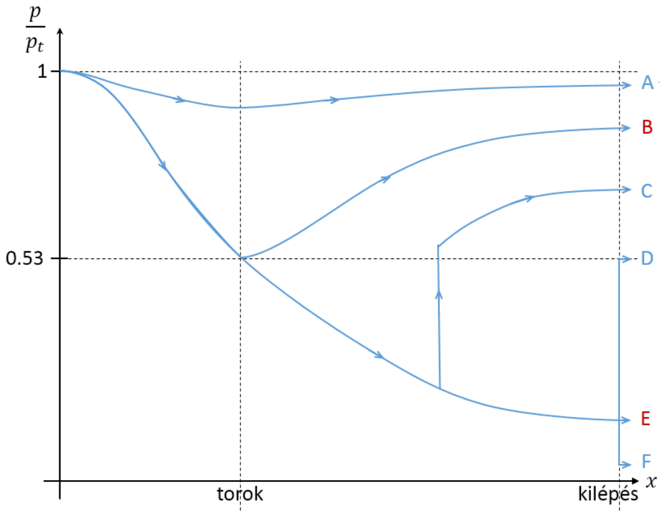
B-D: túllépi a hangsebességet, de nincsen izentropikus megoldás,
merőleges lökéshullám alakul ki a csőben, melyen keresztül lelassul a közeg.

D: túllépi a hangsebességet, de nincsen izentropikus megoldás,
merőleges lökéshullám alakul ki a cső végén, melyen keresztül lelassul a közeg.

D-E: túllépi a hangsebességet, de nincsen izentropikus megoldás,
ferde lökéshullám alakul ki a cső végén, melyen keresztül lelassul a közeg.

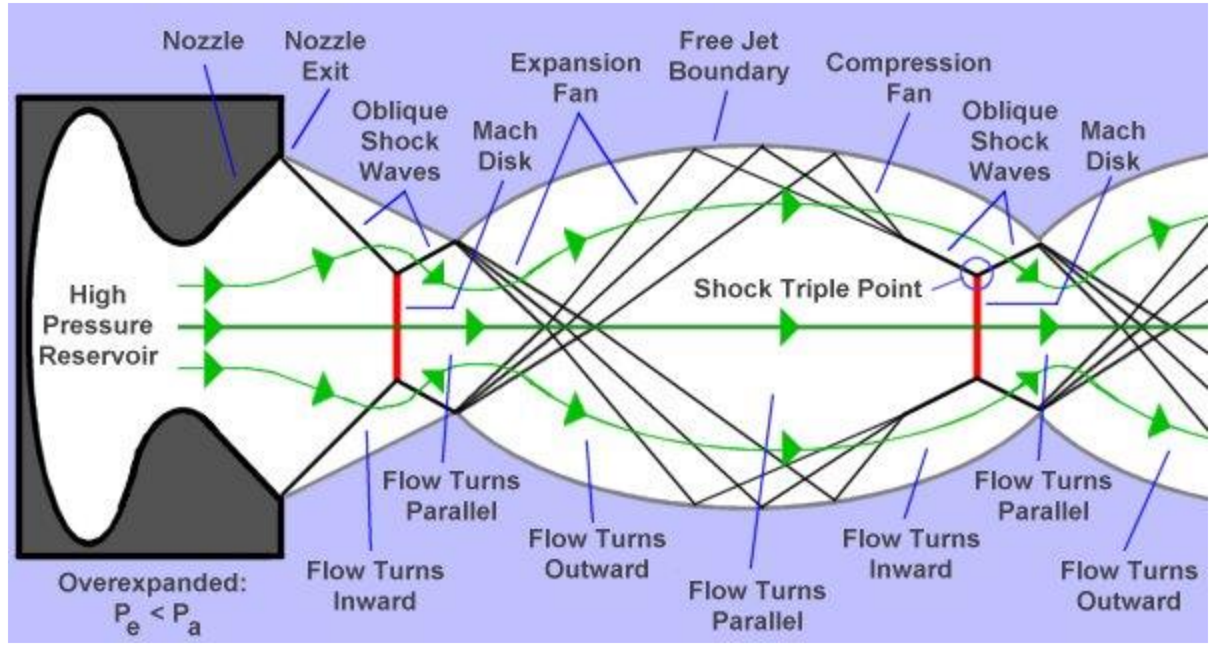
E: túllépi a hangsebességet. Izentropikus megoldás N° 2.

E-F: túllépi a hangsebességet, de nincsen izentropikus megoldás,
ferde expanziós hullámok alakulnak ki a cső végén, melyeken keresztül tovább gyorsul.



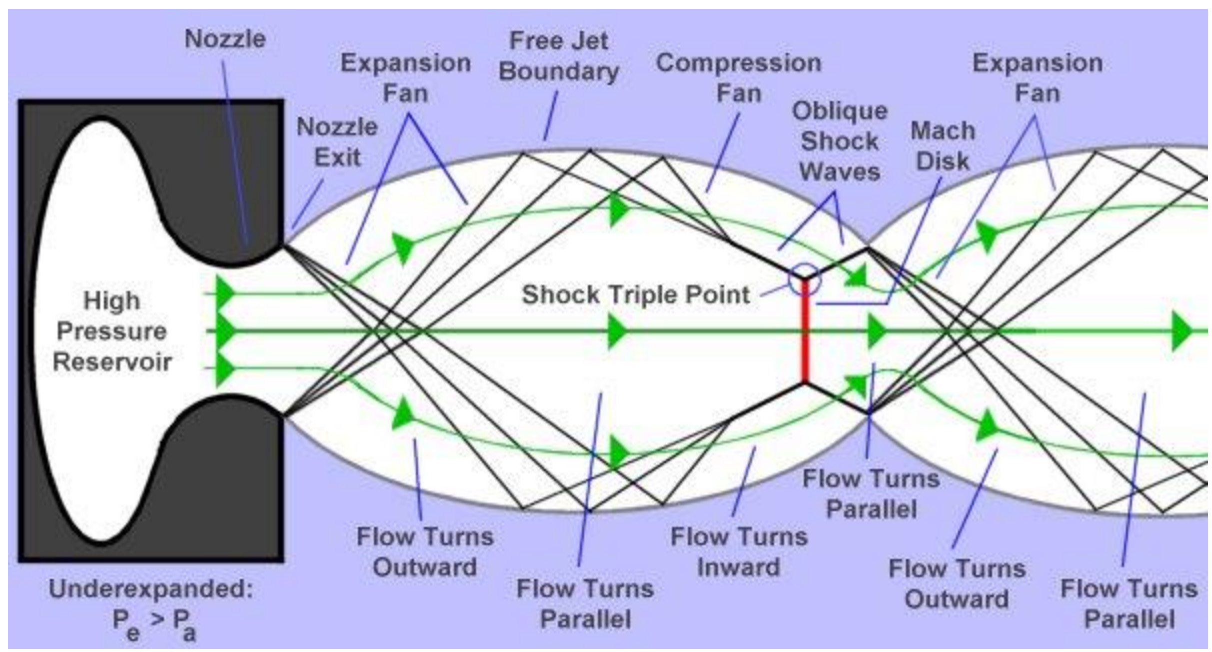
$\frac{p}{p_t}$
1
0.53
A
B
C
D
E
F
torok
kilépés
x

D-E:



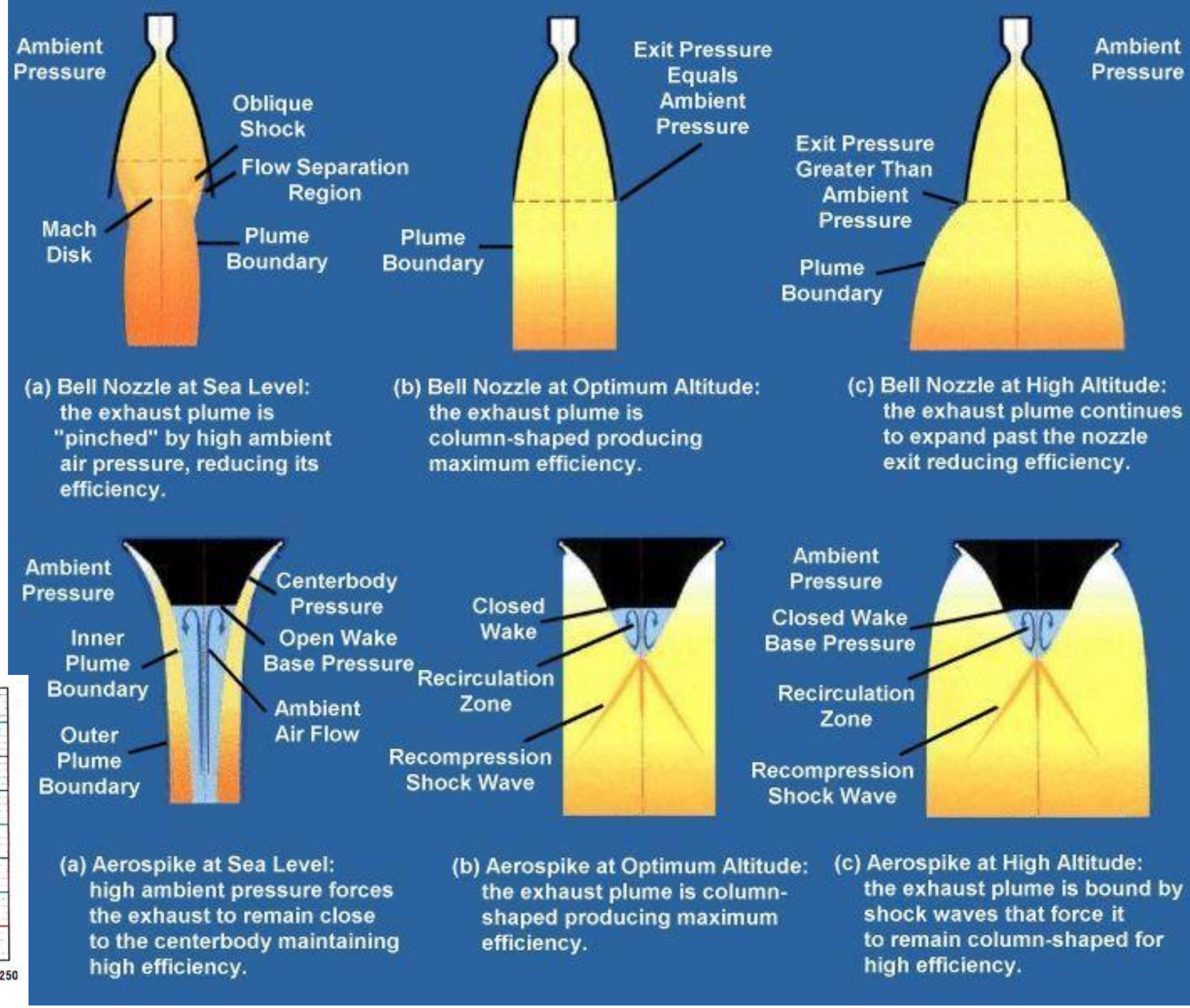
Nozzle
Nozzle Exit
Oblique Shock Waves
Mach Disk
Expansion Fan
Free Jet Boundary
Compression Fan
Oblique Shock Waves
Mach Disk
High Pressure Reservoir
Shock Triple Point
Flow Turns Parallel
Flow Turns Inward
Flow Turns Outward
Flow Turns Parallel
Flow Turns Inward
Flow Turns Parallel
Flow Turns Outward
Overexpanded:
$P_e < P_a$

E-F:

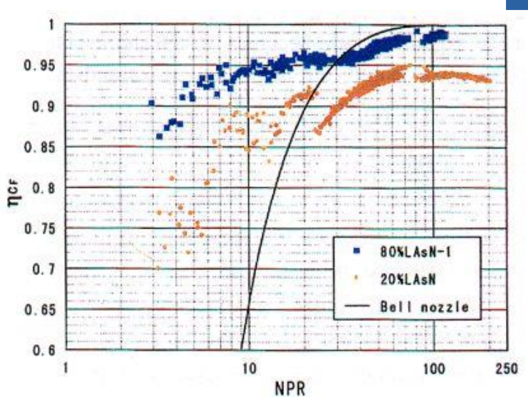


Nozzle
Expansion Fan
Free Jet Boundary
Compression Fan
Expansion Fan
Nozzle Exit
Oblique Shock Waves
Mach Disk
High Pressure Reservoir
Shock Triple Point
Flow Turns Parallel
Flow Turns Outward
Flow Turns Parallel
Flow Turns Inward
Flow Turns Outward
Flow Turns Parallel
Underexpanded:
$P_e > P_a$

"Aerospike"



Ambient Pressure
Oblique Shock
Flow Separation Region
Mach Disk
Plume Boundary
Exit Pressure Equals Ambient Pressure
Plume Boundary
Ambient Pressure
Exit Pressure Greater Than Ambient Pressure
Plume Boundary
(a) Bell Nozzle at Sea Level: the exhaust plume is "pinched" by high ambient air pressure, reducing its efficiency.
(b) Bell Nozzle at Optimum Altitude: the exhaust plume is column-shaped producing maximum efficiency.
(c) Bell Nozzle at High Altitude: the exhaust plume continues to expand past the nozzle exit reducing efficiency.
Ambient Pressure
Centerbody Pressure
Inner Plume Boundary
Open Wake Base Pressure
Ambient Air Flow
Outer Plume Boundary
Closed Wake
Recirculation Zone
Recompression Shock Wave
Ambient Pressure
Closed Wake Base Pressure
Recirculation Zone
Recompression Shock Wave
(a) Aerospike at Sea Level: high ambient pressure forces the exhaust to remain close to the centerbody maintaining high efficiency.
(b) Aerospike at Optimum Altitude: the exhaust plume is column-shaped producing maximum efficiency.
(c) Aerospike at High Altitude: the exhaust plume is bound by shock waves that force it to remain column-shaped for high efficiency.



1
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
ηcr
80%LAsN-1
20%LAsN
Bell nozzle
1
10
100
250
NPR