Matematikai összefoglaló

Áramlástanban használt állapothatározók 2 csoportba oszthatók annak függvényében, hogy a térbeli leírásukhoz mire van szükség

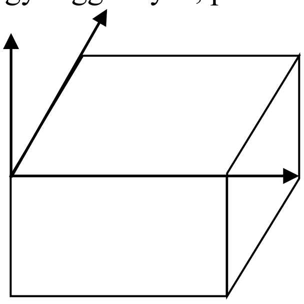
-skalár mennyiségek
sűrűség ρ, nyomás p, hőmérséklet T

- vektor mennyiségek
sebesség v, térerősség vektor g

Skalár mennyiségek

- leírható 1db skalártér segítségével $p = p(x, y, z, t)$, stac: $p = p(x, y, z)$

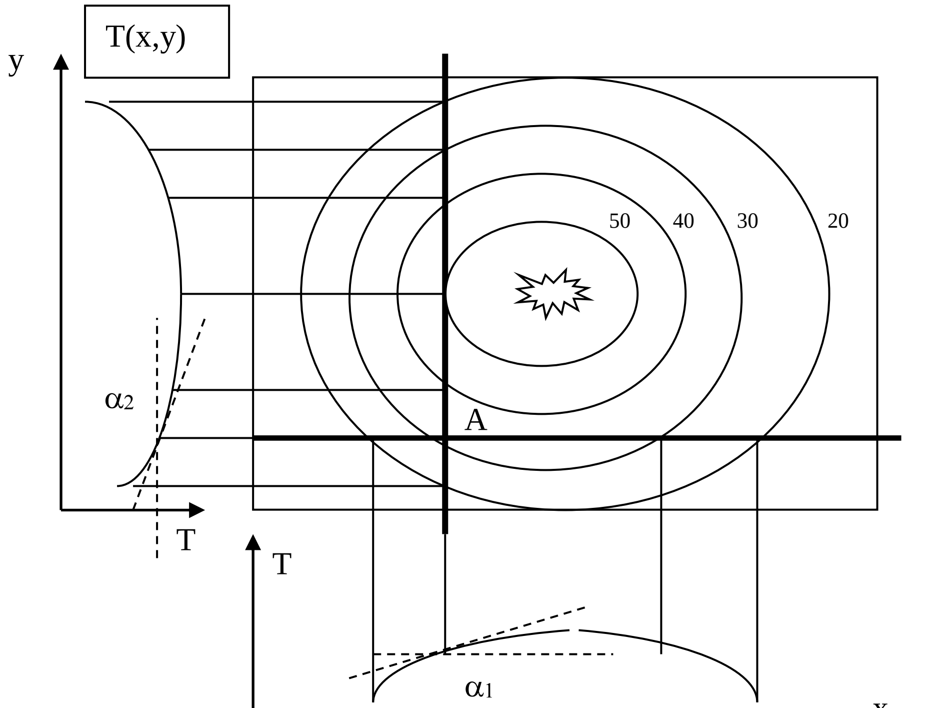
- ez lehet egy függvény is, például egy medence nyomás



$$p = p(x, y, z, t) = p_0 - z \cdot g \cdot \rho_{víz}$$

- behelyettesítési érték $T_A = T(x_A, y_A, z_A, t)$
- időbeli változékonyság $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{A,t}$
- hely szerinti változékonyság

Egy szoba hőmérséklet eloszlása h=1m magasságban



$$tg\alpha_1 = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_A$$

$$tg\alpha_2 = \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_A$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\underline{j} = gradT$$

A gradiens segítségével meghatározható két egymáshoz közel eső pont közötti hőmérsékletkülönbség (a gradiens állandó a két pont között)

$$\Delta T = \mathrm{grad}T \cdot \underline{\Delta s} = |\mathrm{grad}T| \cdot |\underline{\Delta s}| \cdot \cos\beta$$

A gradiens vektor 4 fontos tulajdonsága

Ha az elmozdulás a szintvonalon történik

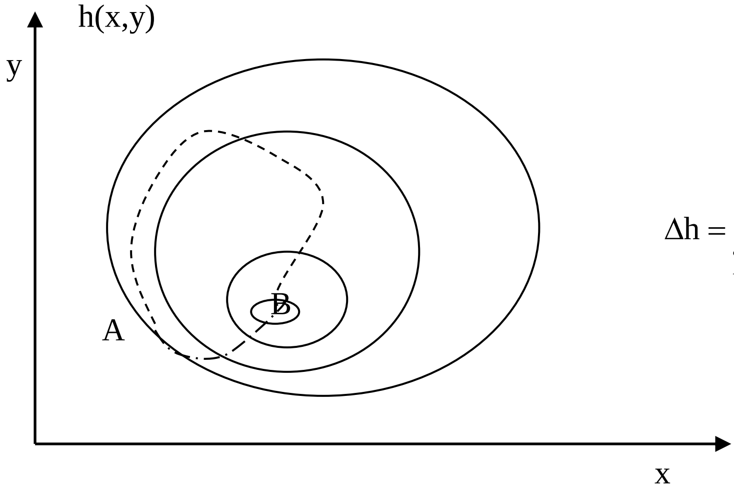
$\Delta T = 0 \Rightarrow \cos\beta = 0 \Rightarrow \beta = 90° \Rightarrow$ tehát gradT merőleges a szintvonalra

$\Delta T = \Delta T_{max} \Rightarrow \cos\beta = 1 \Rightarrow \beta = 0° \Rightarrow$ gradT || a legrohamosabb változással

- gradT a növekedés irányába mutat
- gradT nagysága arányos a növekedés mértékével

Amennyiben a gradiens változik, a meghatározás a gradiens vonal menti integrálásával történik.

Gellért-hegy tengerszint feletti magasság turistatérkép



$$\Delta h = \int_A^B \mathrm{grad}h \cdot \underline{ds} = h_B - h_A$$

5. fontos tulajdonság: a gradiens valami vonal menti integrálja A és B között, az valami behelyettesítési értékeinek a különbsége B és A pontban.

Rajzolja be 2 helyen a gradh vektort.

Vektor mennyiségek

például: sebesség, gyorsulás

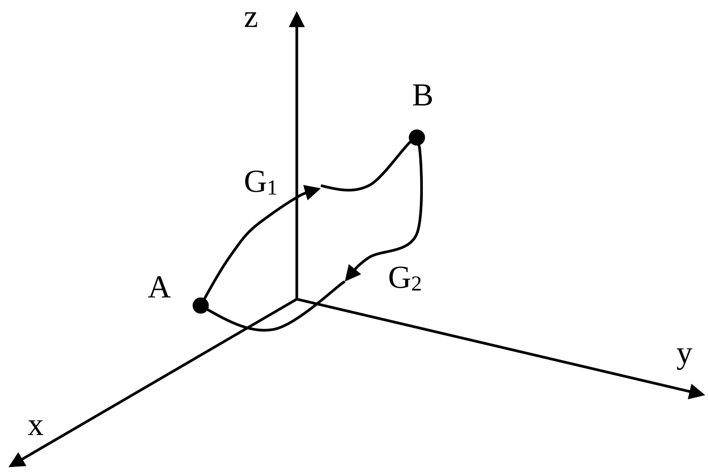
- rögzített koordináta-rendszer esetén 3D-ban leírható 3 skalártér segítségével

$$v_x = v_x(x, y, z, t)$$
$$v_y = v_y(x, y, z, t)$$
$$v_z = v_z(x, y, z, t)$$

- potenciálos áramlás esetén létezik egy ϕ skalártér, amire igaz, hogy

$$\phi = \phi(x, y, z) \quad \text{ahol} \quad \underline{v} = \operatorname{grad}\phi$$

Mi a sebességi potenciál létezésének feltétele?



$$\underset{G_1}{\int_A^B} \underline{v} \cdot \underline{ds} = \underset{G_1}{\int_A^B} \operatorname{grad}\phi \cdot \underline{ds} = \phi_B - \phi_A$$

$$\underset{G_2}{\int_B^A} \underline{v} \cdot \underline{ds} = \underset{G_2}{\int_B^A} \operatorname{grad}\phi \cdot \underline{ds} = \phi_A - \phi_B$$

$$\underset{G_1}{\int_A^B} \underline{v} \cdot \underline{ds} + \underset{G_2}{\int_B^A} \underline{v} \cdot \underline{ds} = \oint_{G_1+G_2} \underline{v} \cdot \underline{ds}$$

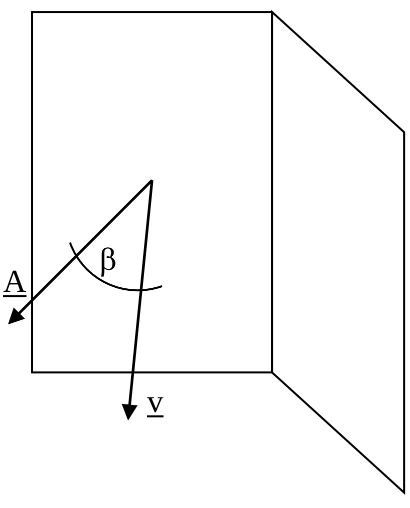
$$\oint_{G_1+G_2} \underline{v} \cdot \underline{ds} = \phi_B - \phi_A + \phi_A - \phi_B = 0$$

$$\oint_{G_1+G_2} \underline{v} \cdot \underline{ds} = 0 = \int_A \operatorname{rot}\underline{v} \cdot \underline{dA}$$

Új mennyiség: Térfogatáram

Egy adott felületen időegység alatt átlépő térfogat mennyisége:

Számítása:

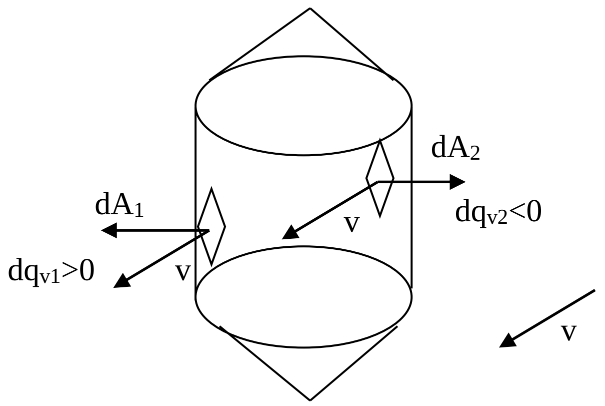


$$q_v = \underline{A} \cdot \underline{v} = |\underline{A}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\beta$$

Szélsőségek:

$$\rightarrow \beta = 0 \Rightarrow q_v = q_{v,max}$$
$$\rightarrow \beta = 90° \Rightarrow q_v = 0$$

Zárt felületre vett térfogatáram
Egy folyóba merített szák esetén



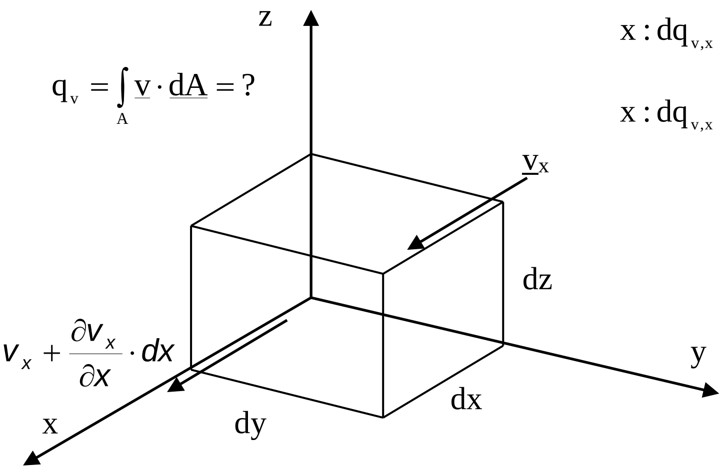
$$q_v = \int_A \underline{v} \cdot \underline{dA} = ?$$

mivel $dA_2 = dA_1$, és ρ=áll
$dq_{v1} = -dq_{v2}$

$$q_v = \int_A \underline{v} \cdot \underline{dA} = 0$$

Általános állapot:
Egységnyi kockára, mekkora a kiáramlás többlet-térfogatárama? (Ez lesz pozitív)
Minden felület normálisa párhuzamos az átáramló sebességgel.
A többi a felület síkjába esik, dq_v=0.
Példa az x normálisú síkokra

$$q_v = \int_A \underline{v} \cdot \underline{dA} = ?$$



$$x : dq_{v,x} = \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) \cdot dy \cdot dz - v_x \cdot dy \cdot dz$$

$$x : dq_{v,x} = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz$$

A többi síkokra:

$$y : dq_{v,y} = \frac{\partial v_y}{\partial y} dx \cdot dy \cdot dz \qquad z : dq_{v,z} = \frac{\partial v_z}{\partial z} dx \cdot dy \cdot dz$$

Összesen

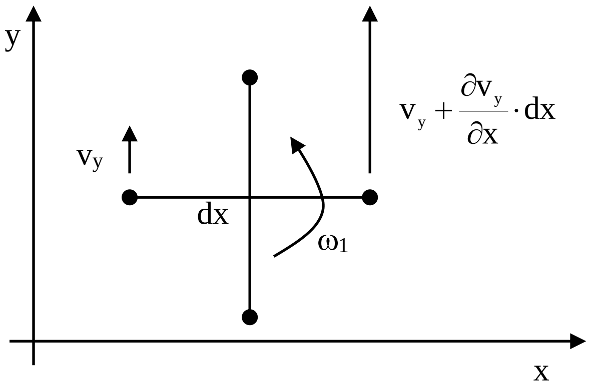
$$dq_v = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \operatorname{div} \underline{v} \cdot dV$$

Véges térfogatra integrálom:

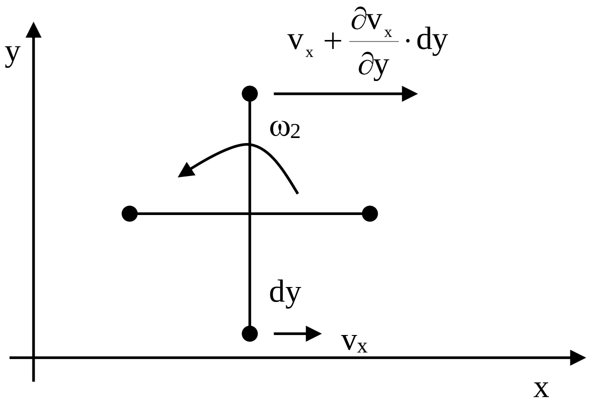
$$q_v = \int_A \underline{v} \cdot \underline{dA} = \int_V \operatorname{div} \underline{v} \cdot dV$$

A Gauss-Osztragradszkij tétel

Folyadékrészecskék forgása



$$\omega_1 = \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dx - v_y \right) \cdot \frac{1}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

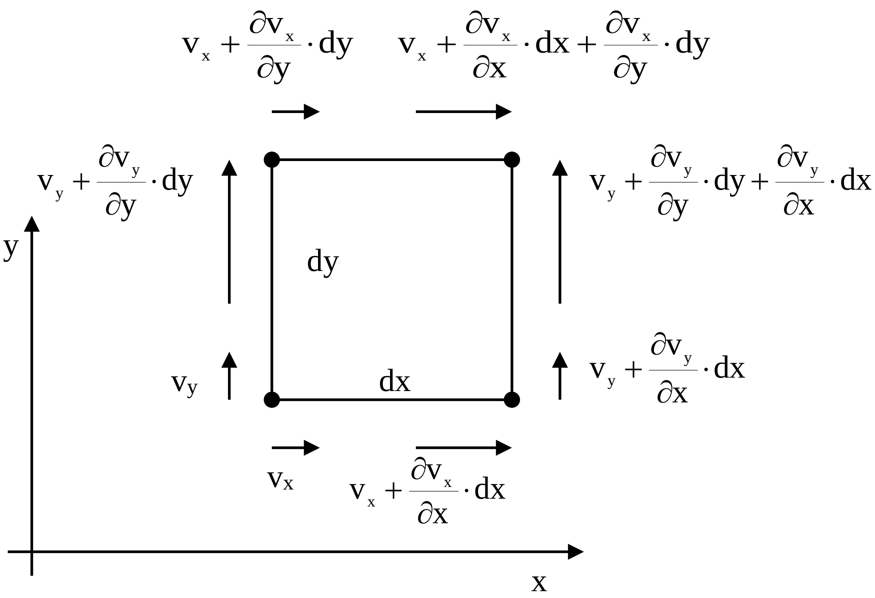


$$\omega_2 = (-1) \cdot \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dy - v_x \right) \cdot \frac{1}{dy} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\omega_z = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathrm{rot}\, \underline{v} \right)_z$$

$$\mathrm{rot}\, \underline{v} = 2 \cdot \underline{\omega}$$

Sebesség vonalmenti integrálja egységnyi négyzet élei mentén



$$\oint \underline{v} \cdot \underline{ds} = \int_A^B \underline{v} \cdot \underline{ds} + \int_B^C \underline{v} \cdot \underline{ds} + \int_C^D \underline{v} \cdot \underline{ds} + \int_D^A \underline{v} \cdot \underline{ds}$$

A vonal menti integrálás során csak az útelemmel párhuzamos sebességkomponenst kell figyelembe venni

$$\int_A^B \underline{v} \cdot \underline{ds} = \left(\frac{v_x + v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx}{2} \right) \cdot dx$$

$$\int_B^C \underline{v} \cdot \underline{ds} = \left(\frac{v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dx + v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dy}{2} \right) \cdot dy$$

$$\int_C^D \underline{v} \cdot \underline{ds} = \left(\frac{v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dy + v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dy}{2} \right) \cdot (-dx)$$

$$\int_D^A \underline{v} \cdot \underline{ds} = \left(\frac{v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dy + v_y}{2} \right) \cdot (-dy)$$

$$\oint \underline{v} \cdot \underline{ds} = \left(\frac{\frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dy}{2} \right) \cdot (-dx) + \left(\frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dx}{2} \right) \cdot (dy)$$

Stokes tétel

$$\oint \underline{v} \cdot \underline{ds} = dx \cdot dy \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = (dA) \cdot (\mathrm{rot}\,\underline{v})_z$$