## Alkalmazott áramlástan és akusztika

*(önálló felkészülést segítő tananyag az akusztika részhez)*

Összeállította: Dr. Koscsó Gábor c. egyetemi docens (BME Áramlástan Tanszék)

7. előadás

**Tartalom:**

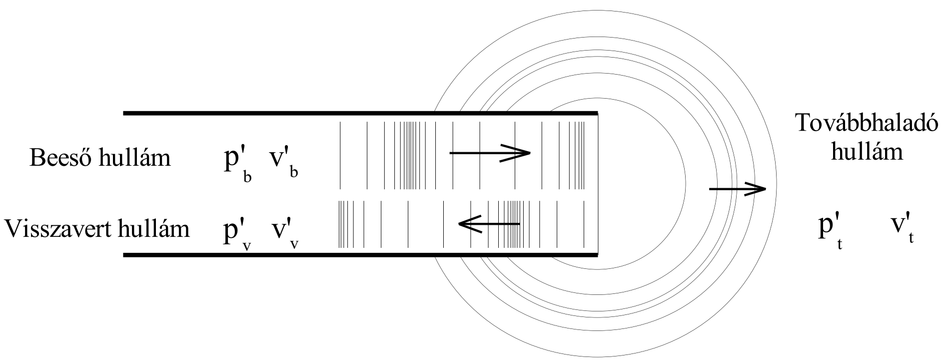


### 7.1. Hangterjedés hirtelen csővégződésen keresztül (előadásvázlat)

Hirtelen keresztmetszet változásnál a beeső hanghullám visszavert és tovább haladó részekre válik szét. Korábban bemutatott levezetés alapján a tovább haladó és a beeső hangteljesítmények hányadosa, a hangátvezetési tényező,

$$\tau = \frac{4m}{(1+m)^2}$$

ahol a keresztmetszetviszony $m=A_1/A_2$. Hirtelen csővégződésnél a hangterjedés iránya mentén a belépő oldali véges csőkeresztmetszet a tovább haladó oldalon átmenet nélkül végtelen nagyra nő, amely következtében a keresztmeszet viszony és így a hangátvezetési tényező ($\tau$) nullához tart. A számítás eredménye szerint a csőben működő hangforrás hangja a csövön kívül, közel a cső nyitott végéhez nem hallható. A gyakorlati tapasztalat szerint ez nem igaz, mert a csőben haladó hanghullám a nyitott csővégnél halkabban, megváltozott hangszínnel, de jól érzékelhető. A gyakorlatban, a csövek számos esetben zajtól védett térben végződnek (pl.: belsőégésű motor kipufogócső vége), így zajvédelmi szempontból fontos a hirtelen csővégződés hangterjedést akadályozó tulajdonságának pontos ismerete.




Hirtelen csővégződésen kialakuló hangátterjedés síkhullám beeső és visszavert összetevők, gömbhullám tovább haladó összetevő feltételezésével

A levezetés célja a hirtelen csővégződés hanggátvezetési tényezőjének meghatározása. A véges keresztmetszet ugrás korábbi levezetésénél síkhullám beeső-, visszavert- és tovább haladó összetevőket feltételeztünk. Hirtelen csővégződésnél egy nagyon nagy felületen, nagyon kicsi részecskesebességgel tovább haladó síkhullám kialakulása a fizikai szemlélettel nincs összhangban. (Nem tételezhető fel, hogy a cső végén kilépő hang a kilépő keresztmetszet síkjában közvetlenül a csővégnél és nagyon távol a csővégtől ugyan olyan zavarást hoz létre.) A csővégen megjelenő zavarás hatására onnan minden irányban, gömbfelületen tovább haladó hullám kialakulása jóval reálisabb. Ezért a feladat megoldásánál az egyszerűsített fizikai modellben a cső végére beeső és onnan visszaverődő (csőben terjedő) hanghullám összetevőket síkhullámnak, a csővégen áthaladó összetevőt gömbhullámnak feltételezzük. A magasabb hangterjedési módusok és más szempontok alapján a valóság ennél bonyolultabb, de az egyszerű geometriai alakzatok (kör- és gömbfelületek) feltételezése, kezelhető matematikai modellt és a véges keresztmetszetugrás összefüggéséhez képest pontosabb eredményt ígér. Hasonlóan a korábbi csőben kialakuló hangterjedés számításokhoz az áramlástan alapegyenletei és a lineáris akusztikában alkalmazott egyszerűsítő feltételek ebben az esetben is érvényesek. A hangátterjedés feltételezhetően a frekvencia függvényében változó módon jön létre, ezért a levezetést egy tetszőleges frekvenciájú harmonikus hanghullámra végezzük el. A levezetés során számos deriválás és integrálás művelet fordul elő, ezért a hullámfüggvények komplex exponenciális írásmódja előnyös. Első lépésben írjuk fel a három hullámösszetevő hangnyomás és részecskesebesség hullámfüggvényeit.

A csővégződésbe beeső hang hullámfüggvénye a hangnyomás változóra,

$$p'_b(x,t) = \hat{p}_b\, e^{i(\omega t - kx)}$$

A csővégződésbe beeső hang hullámfüggvényét a részecskesebesség változóra a lineáris akusztikai mozgásegyenletből számolhatjuk ki.

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}$$

A mozgásegyenletből a részecskesebesség,

$$v'_b(x,t) = -\int \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'_b}{\partial x}dt = \frac{-1}{\rho_0}\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\hat{p}_b\, e^{i(\omega t - kx)}\right)dt = \frac{ik\hat{p}_b}{\rho_0}\int e^{i(\omega t - kx)}dt$$

$$= \frac{ik\hat{p}_b}{i\omega\rho_0}e^{i(\omega t - kx)} = \frac{\hat{p}_b}{\rho_0 a}e^{i(\omega t - kx)} = \hat{v}_b e^{i(\omega t - kx)}$$

Az akusztikai mozgásegyenlet algebrai alakja, $\hat{p}_b = \rho_0 a\, \hat{v}_b$ , az „amplitúdó információ” amelyet a differenciálegyenletből levezetett összefüggés magában foglal. A határozatlan integrálásnál a hely függő állandó értéke nulla. Ennek levezetését most nem részletezzük, de fizikai szemlélet alapján belátható, a hangnyomás egyensúlyi érték körüli ingadozásával társuló részecskesebesség ingadozás nem hoz létre időben állandó konvekciós mozgást a hangtérben.

A csővégződésről visszaverődő hang hullámfüggvénye a hangnyomás változóra,

$$p'_v(x,t) = \hat{p}_v\, e^{i(\omega t + kx)}$$

Hasonló levezetéssel határozható meg a visszavert hang hullámfüggvénye a részecskesebesség változóra,

$$v'_v(x,t) = -\int \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'_v}{\partial x}dt = \frac{-1}{\rho_0}\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\hat{p}_v\, e^{i(\omega t + kx)}\right)dt = \frac{-ik\hat{p}_v}{\rho_0}\int e^{i(\omega t + kx)}dt$$

$$= -\frac{ik\hat{p}_v}{i\omega\rho_0}e^{i(\omega t - kx)} = -\frac{\hat{p}_v}{\rho_0 a}e^{i(\omega t - kx)} = -\hat{v}_b e^{i(\omega t - kx)}$$

A csővégződésen áthaladó hang hullámfüggvénye a hangnyomás változóra,

$$p'_t(r,t) = \frac{\hat{p}_t}{r}\, e^{i(\omega t - kr)}$$

A tovább haladó hullám egy gömbhullám, amelyet a gömbhullám középpontjához illesztett gömb koordinátarendszerben vizsgálunk. Egy gömbhullámban a centrumtól távolodva a mechanikai zavarások egyre nagyobb felületen oszlanak meg, így az amplitúdó a sugár növekedésével fordított arányban csökken (ld.: a sugár (r) változót az amplitúdó nevezőjében). Ennek részleteit későbbi előadás során részletesen bemutatjuk. A csővégződésen tovább haladó hang hullámfüggvényét a részecskesebesség változóra a lineáris akusztikai mozgásegyenletből számolhatjuk ki.

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial r}$$

A mozgásegyenletből a részecskesebesség,

$$v'_t(x,t) = -\int \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'_t}{\partial r}dt = \frac{-1}{\rho_0}\int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\hat{p}_t}{r}\ e^{i(\omega t-kr)}\right)dt = \frac{\hat{p}_t}{\rho_0 r}\left(\frac{1}{r}+ik\right)\int\ e^{i(\omega t-kr)}dt$$

$$= \frac{ik\hat{p}_t}{i\omega\rho_0 r}\left(1+\frac{1}{ikr}\right)e^{i(\omega t-kr)} = \frac{\hat{p}_t}{\rho_0 a r}\left(1+\frac{1}{ikr}\right)e^{i(\omega t-kr)} = \frac{\hat{v}_t}{r}\left(1+\frac{1}{ikr}\right)e^{i(\omega t-kr)}$$

A kontinuitás egyenlet a cső kilépő keresztmetszetben,

$$q_{m1} = q_{m2}$$

$$\rho_0 A_1 v'_1 = \rho_0 A_2 v'_2$$

$$A_{cs}v'_b - A_{cs}v'_v = A_g v'_t$$

A beeső és visszavert hullámok leírásához a derékszögű koordinátarendszer kezdőpontját illesszük a cső végéhez (x=0m helyettesítés). A tovább haladó hullám leírásához a gömb koordinátarendszer középpontját a kilépő keresztmetszet és a csőtengely metszéspontjába helyezzük, illetve alkalmazzuk az $r_g=r_{cs}/2$ helyettesítést, amely avval az algebrai előnnyel jár, hogy $A_{cs}=A_g$ és a felületek az egyenletből kiesnek,

$$A_{cs}\frac{\hat{p}_b}{\rho_0 a}\ e^{i(\omega t-k0)} - A_{cs}\frac{\hat{p}_v}{\rho_0 a}\ \ e^{i(\omega t+k0)} = A_g\frac{2\hat{p}_t}{r_{cs}\rho_0 a}\left(1+\frac{2}{ikr_{cs}}\right)e^{i(\omega t-kr_{cs}/2)}$$

$$\hat{p}_b - \hat{p}_v = \left(1+\frac{2}{ikr_{cs}}\right)\frac{2\hat{p}_t}{r_{cs\,2}}\ e^{-ikr_{cs}/2} \qquad (1)$$

Az energia egyenlet a kilépő keresztmetszetben,

$$P'_1 = P'_2$$

$$I'_1 A_{cs} = I'_2 A_g$$

$$p'_1 A_{cs} v'_1 = p'_2 A_g v'_2$$

A térfogatáramok egyenlősége alapján, az akusztikai hangnyomás folytonosság,

$$p'_1 = p'_2$$

$$p'_b + p'_v = p'_t$$

Behelyettesítést követően,

$$\hat{p}_b\, e^{i(\omega t-k0)} + \hat{p}_v\, e^{i(\omega t+k0)} = \frac{2\hat{p}_t}{r_{cs}} e^{i(\omega t-kr_{cs}/2)}$$

$$\hat{p}_b + \hat{p}_v = \frac{2\hat{p}_t}{r_{cs}} e^{-ikr_{cs}/2} \qquad (2)$$

Az (1)-es egyenlet jobb oldalán a zárójeles tagot követő részt cseréljük ki a (2)-es egyenlet bal oldalára.

$$\hat{p}_b - \hat{p}_v = \left(1 + \frac{2}{ikr_{cs}}\right)(\hat{p}_b + \hat{p}_v)$$

A maradék egyenletben a beeső és a visszavert összetevők maradtak, ezek síkhullámok, és a teljesítményük számítása így egyszerűbb. A visszaver és a beeső hullám amplitúdók hányadosa,

$$\frac{\hat{p}_v}{\hat{p}_b} = \frac{-\frac{2}{ikr_{cs}}}{2 + \frac{2}{ikr_{cs}}} = \frac{-1}{1 + ikr_{cs}}$$

A nevezőből a képzetes részt a komplex konjugálttal szorozva tüntetjük el,

$$= \frac{-1}{1 + ikr_{cs}} \frac{1 - ikr_{cs}}{1 - ikr_{cs}} = \frac{-1 + ikr_{cs}}{1 + k^2 r_{cs}^2}$$

A reflexiós tényező ($r_v$) a visszavert és a beeső hangteljesítmények hányadosa,

$$r_v = \frac{P_v}{P_b} = \frac{I_v A_{cs}}{I_b A_{cs}} = \frac{\frac{p_{eff\,v}^2}{\rho_0 a}}{\frac{p_{eff\,b}^2}{\rho_0 a}} = \frac{\hat{p}_v^2/2}{\hat{p}_b^2/2} = \frac{-1 + ikr_{cs}}{1 + k^2 r_{cs}^2} \frac{-1 - ikr_{cs}}{1 + k^2 r_{cs}^2} = \frac{1}{1 + k^2 r_{cs}^2}$$

Az energia egyenlet,

$$P_b = P_v + P_t$$

Osszuk el mindkét oldal a beeső hangteljesítménnyel,

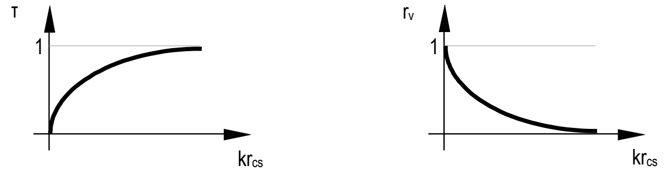
$$1 = r_v + \tau \quad \text{amelyből,} \quad \tau = 1 - r_v$$

A hirtelen csővégződés hangátvezetési tényezője,

$$\tau = 1 - \frac{1}{1 + k^2 r_{cs}^2} = \frac{k^2 r_{cs}^2}{1 + k^2 r_{cs}^2}$$

**Megjegyzések:**

- A hangátvezetési tényező ($\tau$) a cső belső sugár ($r_{cs}$) és a hullámszám (k), evvel összefüggésben a frekvencia (f) és a hangsebesség (a) függvénye.




A hangátvezetési és reflexiós tényezők függvény grafikonjai jellegre helyesen

- Kis cső sugár ($r_{cs}$) és frekvencia (f) esetén a hangátvezetési tényező (τ) kicsi, a hangterjedés erősen korlátozott. Nagy csőméret és frekvencia esetén a hangátvezetési tényező értéke az egységet közelíti, a hang gyakorlatilag akadálymentesen halad át a csővégen. A gyakorlatban a hangszín torzulását a spektrumból a kis frekvenciájú összetevők eltűnése okozza.

- A kis frekvenciájú hangok terjedésének megakadályozása a gépész zajvédelmi gyakorlatban általában nehéz feladat, ezért a hirtelen csővégződés hanggátló hatását a légtechnikában, belsőégésű motorok kipufogó rendszerében és más esetekben előnyösen alkalmazhatjuk.

### 7.2. Gyakorló feladatok

Gy.1. Vezesse le a hirtelen csővégződés hanggátlásának összefüggését, sík beeső hanghullám feltételezése esetén! A gyakorlatban hol alkalmazzuk a hirtelen csővégződés hangterjedést befolyásoló hatását?

Gy.2. Határozza meg egy 200mm átmérőjű szellőztető levegő befúvó cső végénél kialakuló hanggátlást 63Hz, 250Hz és 1000Hz frekvenciák esetén! A levegő hőmérséklete 17˚C.

$$a = \sqrt{\kappa R T_0} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot (273 + 17)} \approx 341 \ m/s$$

a. f= 63Hz

$$k = \omega/a = 2\pi f/a \approx 2\pi \cdot 63/341 \approx 1{,}16 \ \ rad/m$$

$$R = 10lg\frac{1}{\tau} = 10lg\frac{1 + k^2 r_{cs}^2}{k^2 r_{cs}^2} = 10lg\frac{1 + 1{,}16^2 \cdot 0{,}1^2}{1{,}16^2 \cdot 0{,}1^2} \approx 18{,}8 \ dB$$

b. f= 250Hz

$$k = \omega/a = 2\pi f/a \approx 2\pi \cdot 250/341 \approx 4{,}62 \ \ rad/m$$

$$R = 10lg\frac{1}{\tau} = 10lg\frac{1 + k^2 r_{cs}^2}{k^2 r_{cs}^2} = 10lg\frac{1 + 4{,}62^2 \cdot 0{,}1^2}{4{,}62^2 \cdot 0{,}1^2} \approx 7{,}5 \ dB$$

c. f= 1000Hz

$$k = \omega/a = 2\pi f/a \approx 2\pi \cdot 1000/341 \approx 18{,}48 \ \ rad/m$$

$$R = 10lg\frac{1}{\tau} = 10lg\frac{1 + k^2 r_{cs}^2}{k^2 r_{cs}^2} = 10lg\frac{1 + 18{,}48^2 \cdot 0{,}1^2}{18{,}48^2 \cdot 0{,}1^2} \approx 1{,}1 \ dB$$

63Hz-en 18dB-t meghaladó beiktatási veszteséghez több méter hosszú abszorberes hangtompító szükséges! Az 1 kHz-en számolt 1,1dB hanggátlás a hangosságkülönbségi hallásküszöb nagyságrendje.

-----