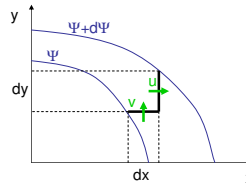


Inkompresszibilis áramlások számítása

Kristóf Gergely
2008. november 15.

Az áramfüggvény (Ψ)



Jelentése 2D-ben: térfogatáram 1 m széles tartományban.

Egy Ψ =állandó vonalon átáramlás nincs, tehát a Ψ szintvonalai **áramvonalak**.

Két, egymáshoz közeli áramvonalra az alábbi összefüggés érvényes:

$$d\Psi = u \, dy - v \, dx$$

Ugyanakkor Ψ teljes differenciálja:

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy$$

Ebből megkapjuk Ψ definícióját 2D áramlás esetére:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v \quad \text{és} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u$$

Pusztán létevel kielégíti a kontinuitási egyenletet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0$$

A nyomás-sebesség kapcsolat problémája

A diskretizációval kapott algebrai egyenletrendszer megoldására iterációs módszert fogunk alkalmazni.

Egy további egyszerűsítési lehetőség:

Szegregált iteráció: minden mezőváltozóra különálló egyenletrendszert oldunk meg, amelyben a többi mezőváltozóztó állandónak tekintjük.

Kontinuitás:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Navier-Stokes egyenlet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot (\nu \nabla u) + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (v \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla \cdot (\nu \nabla v) + g_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (w \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla \cdot (\nu \nabla w) + g_z$$

Ez az egyenletrendszer nem alkalmas szegregált iterációra. Szükségünk lenne a nyomásmező meghatározására alkalmas alapegyenletre.

3D áramlások esetében

3D-ben Ψ -t vektorként definiáljuk: $\vec{v} = \nabla \times \underline{\Psi}$
Vektorpotenciál.

Síkáramlás esetén visszahozzuk az eredeti definíciót:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

azaz síkáramlás esetén:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{és} \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

A kontinuitás 3D-ben is automatikusan kielégül: $\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \nabla \times \underline{\Psi} \equiv 0$

2D-ben további előny, hogy a mezőváltozók száma csökken (u,v \rightarrow Ψ). Sajnos ez az előny 3D-ben elvész.

Két szokásos megközelítés

• Ψ - ω módszer

Az mozgásgyenletről kiküszöböljük a nyomásmezőt. A kontinuitást egy potenciál függvény bevezetésével oldjuk meg.

• Nyomáskorrekciós módszerek

A kontinuitási egyenlet helyett a nyomásmező meghatározására alkalmas alapegyenletet oldunk meg.

Az örvényesség (ω)

Az örvényesség 3D-ben: $\underline{\omega} = \nabla \times \vec{v}$

2D-ben ω -nak csak a z komponense van:

tehát:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Az áramfüggvényrel kifejezve:

$$\omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$$

ez egy **Poisson-egyenlet az áramfüggvényre**.

Egy érdekes speciális eset: potenciális áramlásokra

$$\underline{\omega} = 0$$

Csak egy Laplace-egyenletet kell megoldani 2D esetben.

$$\Delta \Psi = 0$$

Analitikus megoldások, analógiák...

Az örvénytranszportegyenlet (ÖTE)

Képezzük a Navier-Stokes egyenlet rotációját 2D-ben:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 p / \rho_0}{\partial x \partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 p / \rho_0}{\partial x \partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (\nabla \cdot \mathbf{v}) \omega = 0$$

Az örvénytranszport egyenlet 2D alakja. (3D-ben bonyolultabb).

$$\frac{d\omega}{dt} = \nu \Delta \omega$$

A kinematikai viszkozitás az örvényesség vezetési tényezője... Pl: határrétegben.

Alkalmos-e a nyomásegyenlet a kontinuitás kiváltására?

Diszkrétizáljuk a mozgásegyenletet egyszerűség kedvéért időben elsőrendű pontosságú integrálási sémával (Euler-módszerrel):

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t (f_i^n - \tilde{\nabla} \cdot P^n)$$

A nyomásegyenlet diszkrét alakja:

$$\tilde{\Delta} P^n = \tilde{\nabla} \cdot f_i^n$$

Először oldjuk meg a nyomásegyenletet P^n -re, majd frissítjük a sebességet!

Divergenciamentes lesz az új sebességmező?

$$\tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = \tilde{\nabla} \cdot u_i^n + \Delta t \left(\underbrace{\tilde{\nabla} \cdot f_i^n - \tilde{\Delta} P^n}_{\approx 0 \text{ csak közelítőleg tudjuk megoldani!}} \right)$$

A nyomásegyenlet megoldásának hibája felhalmozódva jelentkezik a kontinuitásban.

Megoldási módszer stacionárius áramlásra

Poisson-egyenlet Ψ -re:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega$$

ÖTE-ba beírjuk a Ψ -vel kifejezett u -t és v -t:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

Szegregált megoldási módszer:

$$\Psi^0, \omega^0 \xrightarrow{\text{Poisson}} \Psi^1, \omega^0 \xrightarrow{\text{ÖTE}} \Psi^1, \omega^1 \xrightarrow{\text{Poisson}} \Psi^2, \omega^1 \dots$$

Peremfeltételek Ψ -re:

- Belépésnél és falon: elsőfajú.
- Kilépésnél másodfajú (Neuman pf.).

ω -ra:

- Belépésnél és falon: elsőfajú.
- Kilépésnél másodfajú (Neuman pf.).

Probléma: nyomás peremfeltételt nem tudunk előírni, mert p nem szerepel az egyenletekben. A nyomásmezőt utólag kell meghatározni.

A hiba felhalmozódása elkerülhető...

Nekünk nem a nyomásegyenlet fontos, hanem a kontinuitás teljesítése. Az eredeti nyomásegyenlet helyett az alábbi korrigált egyenletet kell megoldani:

$$\tilde{\Delta} P^n = \tilde{\nabla} \cdot f_i^n + \frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u_i^n$$

majd a mozgásegyenletből számoljuk az új sebességeket:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t (f_i^n - \tilde{\nabla} \cdot P^n)$$

Ellenőrizzük az új sebesség divergenciamentesességét:

$$\tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = \Delta t \left[\underbrace{\frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u_i^n + \tilde{\nabla} \cdot f_i^n - \tilde{\Delta} P^n}_{\approx 0 \text{ nyomásegyenlet}} \right]$$

Csak akkora a kontinuitás hibája, amit a korrigált nyomásegyenlet megoldásakor elkövetünk az n -edik lépésben.

Nyomás alapú megoldók A nyomásegyenlet

Kontinuitás:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Mozgásegyenlet 2D-ben, $g=0$ esetén:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla(p / \rho_0) + \nu \Delta \mathbf{u}$$

Új jelölések:

$$P = p / \rho_0 \text{ és } \mathbf{f} \text{ (értelemszerűen).}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f} - \nabla P$$

Képezzük a mozgásegyenlet divergenciáját felhasználva, hogy: $\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

$$\Delta P = \nabla \cdot \mathbf{f}$$

Ez egy Poisson-egyenlet P -re. **Nyomásegyenlet**

Ez alkalmas pl. a nyomásmező meghatározására Ψ - ω módszer esetén.

Projekciós módszer

Ugyanez a módszer a szokásosabb jelölésekkel:

1. lépés kiszámítjuk: $u_i^* = u_i^n + \Delta t f_i^n$ u^* pszeudosebesség

2. lépés **megoldjuk**: $\tilde{\Delta} P^n = \frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u_i^*$ $\rightarrow P^n$

3. lépés kiszámítjuk: $u_i^{n+1} = u_i^* - \Delta t \tilde{\nabla} \cdot P^n$

Ellenőrizzük!

$$\tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = \Delta t \left[\frac{1}{\Delta t} \tilde{\nabla} \cdot u_i^* - \tilde{\Delta} P^n \right]$$

Tényleg ezt oldjuk meg a 2. lépésben.

Stacionárius áramlás

- **Kis időlépések:**
Az előző módszer csak kis időlépésekkel tud működni.
(Feltételesen stabil séma.)
Ha az áramlás stacionárius, vagy lassan változik, akkor nagyon sok időlépést kell tenni, amíg elérjük a stacionárius állapotot.
- **Hiányzik az időbeli derivált:**
Stacionárius áramlások esetén kihagyjuk az időbeli deriváltakat és a hely szerinti deriváltakból számoljuk ki az új sebességmezőt.

P-u iteráció stacionárius áramlásra

Szeretnénk, ha az n+1-edik iterációs lépésben minél pontosabban teljesülnének:

$$A_p u_{i,p}^{n+1} + \sum A_v u_{i,\ell}^{n+1} = Q_i - \tilde{\nabla}_i P^{n+1} \quad \text{és} \quad \tilde{\nabla} \cdot u_i^{n+1} = 0$$

Csak a régi nyomást tudjuk felhasználni... (itt még nem lesz pontos a kontinuitás).
 u^* kezdőértékeként u^n -et használjuk.

$$A_p u_{i,p}^* + \sum A_v u_{i,\ell}^* = Q_i - \tilde{\nabla}_i P^n \quad \xrightarrow{\text{1.lépés}} \quad u_i^*$$

$$u_{i,p}^* = \frac{Q_i - \sum A_v u_{i,\ell}^*}{A_p} - \frac{1}{A_p} \tilde{\nabla}_i P^n$$

$$u_{i,p}^* = \tilde{u}_{i,p} - \frac{1}{A_p} \tilde{\nabla}_i P^n$$

u^{n+1} hasonló képlettel közelíthető az új nyomásgradiens alapján:

$$u_{i,p}^{n+1} = \tilde{u}_{i,p} - \frac{1}{A_p} \tilde{\nabla}_i P^{n+1} \quad \xrightarrow{\text{3.lépés}}$$

u^{n+1} elégítse ki a kontinuitást!
Képezzük a numerikus divergenciáját:

$$\tilde{\Delta} P^{n+1} = A_p \tilde{\nabla} \cdot \tilde{u}_i \quad \xrightarrow{\text{2.lépés}} \quad P^{n+1}$$

A 3. lépésben elhanyagolt szomszédok miatt most a mozgásegyenlet nem pontos, ezért 1,2,3 lépéseket ismételni kell.

Szokásos módszerek

- **Belső iteráció:**
Közelítő megoldást kell alkalmazni az 1. és 2. lépés egyenletrendszerének megoldására, azonban a belső iteráció csak 1 lépést szokott tenni.
- **Nyomáskorrekciós egyenlet:**
Nyomás helyett nyomáskorrekcióra szokásos megoldani a Poisson-egyenletet. (Numerikus előnyök.)
- **SIMPLE, SIMPLEC, SIMPLER, PISO**
- **Időfüggetlen modellek:**
Időben változó folyamatok esetén a lokális gyorsulást beletehetjük Q-ba. Időben implicit sémát alkalmazva nagy időlépéseket lehet tenni.