VI. előadás

Dr. Balogh Miklós

2016. november 2.

Potenciálos örvény

Tekintsük a Stokes tétel korábban már bemutatott alakját, amely a cirkulációt adja:

$$\Gamma = \oint_G \boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A \mathrm{rot}\boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

Tekintsünk egy síkáramlás sebességterét, ahol a sebességvektor az origó körüli koncentrikus kör alakú áramvonalak mentén állandó nagyságú, azaz nincs radiális komponense. Megmutatható, hogy ha a síkáramlás sebességtere potenciálos, akkor a sebesség csak a sugár függvénye. Ebben az esetben, a Stokes tétel értelmében a sebesség nagysága ($v(r)$) a vonalintegrál kiszámításával adható meg, mint

$$\Gamma = \oint_G \boldsymbol{v} \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 2r\pi v(r) \rightarrow v(r) = \frac{\Gamma}{2r\pi}$$

Rankine örvény

A valódi örvények csak a tengelytől elég nagy távolságban viselkedhetnek potenciálosan, a potenciálos modellt tehát kis távolságok esetén érdemes módosítani. Így jutunk a Rankine-örvényhez, melynek sebességtere egy kritikus R távolságon kívül potenciálos, azon belül viszont a folyadék merev testként „forog”, és a tangenciális sebesség egyenesen arányos a távolsággal. Világosan elkülönül tehát egy belső örvénymag, melynek sugara R, és ahol a sebesség a potenciálos örvény sebességével egyezik meg:

$$v(r = R) = \frac{\Gamma}{2R\pi} \rightarrow v(r \leq R) = \frac{\Gamma r}{2R^2\pi}$$

Ezek alapján a Rankine örvényben a sebesség nagysága a következőképp írható le:

$$v(r) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma r}{2R^2\pi} & \text{if } r \leq R \\ \dfrac{\Gamma}{2r\pi} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Burgers örvény

Valóságos, viszkózus folyadékokban a Rankine örvény sebességfüggvényéhez hasonló, csak elsőrendben folytonos függvénnyel leírható sebességmegoszlás nem alakulhat ki, mivel a belső súrlódás „lekerekíti” a görbét. Ilyen esetekben az örvénylés folyamatosan lassul, végül megáll, mozgási energiája a belső súrlódás miatt hővé alakul. Valódi folyadékokban csak olyan áramlások maradhatnak fent, amelyeknél a hővé alakuló mozgási energiát valamilyen forrás folyamatosan pótolja. A mozgási energia pótlásának egyik módja, ha axiális irányban folyamatos beáramlást biztosítunk. Ekkor a kontinuitás miatt az axiális sebesség sem lehet mindenhol zérus, azaz az áramlás elveszti síkáramlás jellegét. A következő sebességvektor függvénnyel definiált örvényes áramlás a kontinuitás teljesítése mellett a Navier–Stokes egyenleteket is kielégíti:

$$\boldsymbol{v}(r,z) = \begin{bmatrix} v_t \\ v_r \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_\infty}{r}\left(1 - e^{\frac{-r^2}{R^2}}\right) & -\frac{2\nu r}{R^2} & \frac{4\nu z}{R^2} \end{bmatrix}^T$$

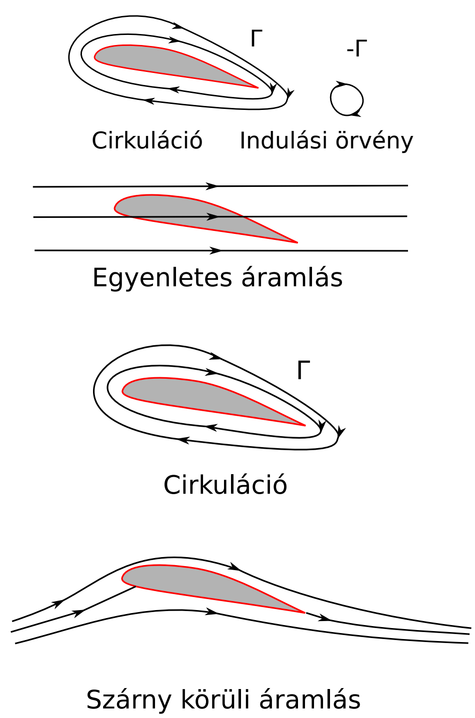
Az ilyen sebességmezővel jellemzet, úgynevezett Burgers-örvény sem univerzálisan alkalmazható, hiszen a tengelytől távolodva a radiális sebesség végtelenhez tart, de ennek ellenére a fenti örvénymodellek közül a legjobban ez utóbbi alkalmazható.

Thomson-tétel

A Thomson tétel, azaz a Lord Kelvin örvénytétel arról a tudósról kapta a nevét, akinek nevéhez többek között az abszolút hőmérsékleti skála megalkotása és a telegráf feltalálása fűződik. Kimondja, hogy ha az ideális folyadék kezdeti állapotában cirkulációmentes, akkor az is marad, illetve surlódásmentes áramlásoknál az örvények megőrzik cirkulációjukat:

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_G \boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_A \mathrm{rot}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0$$

Ennek következménye, hogy nyugvó térből származó áramlás potenciálos, ezen az elven működik a beszívótölcsér. Tudjuk, hogy a mozgó szárny körüli cirkuláció nem zérus, így a Thomson tétel értelmében a szárny körüli cirkulációval ellentétes cirkulációjú örvénynek is létre kell jönnie (ez látható a következő ábrán). Grúber József víztározó.



1. ábra. A szárny körüli cirkuláció és az indulási örvény

Helmholtz I. tétele

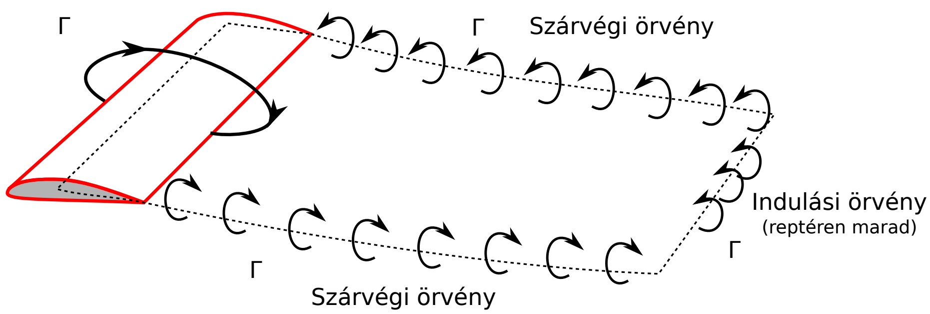
Súrlódásmentes, összenyomhatatlan, potenciális erőtérrel jellemezhető áramlásra, a Thomson tétel következményeként igaz, hogy: Folyékony örvényvonal mindíg ugyanazokból az folyadékelemekből áll, azaz folyékony örvényfelület megtartja örvényfelület jellegét. Ennek következménye, hogy az ilyen örvények szállítják a tulajdonságokat.

Helmholtz II. tétele

A folyékony örvénycső hossza mentén a sebesség rotációjának felületi integrálja bármely keresztmetszetben állandó, és időben sem változik. Ennek következménye, hogy örvénycső nem fejeződhet be az áramló közegben: vagy zárt gyűrűt alkot, vagy az áramlási tér határáig ér.

$$\int_{A_1} \mathrm{rot}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_{A_2} \mathrm{rot}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

Ennek köszönhetően a szárny ideális közegben zárt örvényrendszert indukál.



2. ábra. A szárny körüli cirkuláció és az indulási örvény