

## Műszaki akusztika és zajcsökkentés (önálló felkészülést segítő tananyag)

Összeállította: Dr. Koscsó Gábor c. egyetemi docens (BME Áramlástan Tanszék)

### 5. előadás

#### Tartalom:

- 5.1. Nevezetes összetett harmonikus hullámok (előadás vázlat)
- 5.2. Hangterek modellezése, akusztikai hasonlóság (előadás vázlat)
- 5.3. Gyakorló feladatok

#### 5.1. Nevezetes összetett harmonikus hullámok

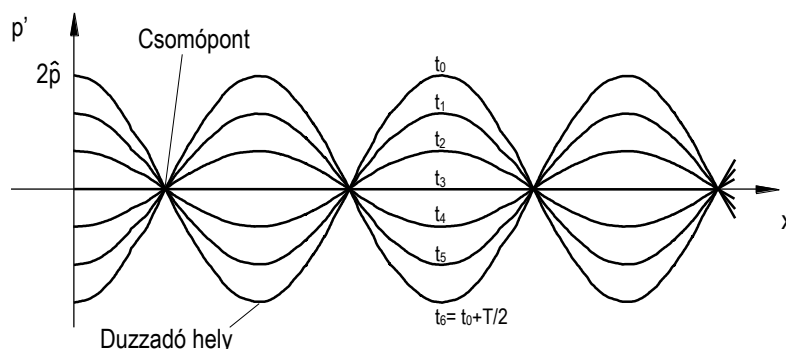
A következő részben hullámakusztikai ismereteink felhasználásával két elméleti és gyakorlati szempontból fontos összetett harmonikus hullámot, az állóhullámot és a lebegést mutatjuk be. Tudásunk bővítéséhez levezetjük az összetett hullámok matematikai modelljét, majd a megoldás vizsgálatával tovább mélyítjük ismereteinket a jelenségekkel kapcsolatban.

#### Állóhullám:

Két azonos frekvenciájú, amplitúdójú, azonos terjedési sebességgel, de ellentétes irányban haladó harmonikus hullám összetételéből állóhullám keletkezik. Az állóhullám hullámfüggvényét a lineáris szuperpozíció elv felhasználásával vezetjük le. A két hangtér eredő hangnyomását az összetevő hullám hangnyomások egyszerű algebrai összegével határozhatjuk meg. A levezetés végeredményét a szög összeg és különbség koszinuszának felbontására vonatkozó trigonometrikus azonosságok felhasználásával kaphatjuk meg,

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \hat{p} , \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega , \quad k_1 = k_2 = k , \quad |a_1| = |a_2| , \quad a_1 \rightarrow_{+x} \text{ és } a_2 \leftarrow_{-x}$$
$$p'_{ah}(x, t) = p'_1(x, t) + p'_2(x, t) = \hat{p}_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \hat{p}_2 \cos(\omega_2 t + k_2 x) =$$
$$= \hat{p} (\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)) = 2\hat{p} \cos(\omega t) \cos(kx)$$

Az állóhullám hullámfüggvény grafikonját fél periódusidő tartományon belül, különböző időpontokban a következő ábra mutatja.



Állóhullám hangnyomás változása a hossz mentén különböző időpontokban

#### **Megjegyzések:**

- A hullámegyenlet határolt téri megoldásához hasonlóan az állóhullám esetében is a megoldásfüggvény argumentumában a hely- és idő változók szeparálódnak, azaz a hullám haladó jellege megszűnik.

- Az állóhullámban az egymással szemben haladó összetevők kölcsönhatásaként bizonyos helyeken időben állandósult kioltás, illetve ezek között erősítés lép fel. A kioltási helyeken csomópontok, az erősítési helyeken duzzadó helyek alakulnak ki.
- Lényeges különbség a hullámegyenlet határolt téri megoldása és az állóhullám között, hogy a határolt téri megoldásnál az amplitúdó a kezdeti feltételtől függ és gyakorlatilag tetszőleges értékű lehet, addig az állóhullámnál legfeljebb a két (a jobbra és balra haladó) összetevő amplitúdók összege lehet.
- Az állóhullám egy egydimenziós hang interferencia jelenség.
- Az állóhullám kialakulása grafikusán is megérthető. Két azonos szinusz függvény grafikonját fektessük pontosan egymásra, majd húzzuk el egymás felett a két görbét azonos nagyságú, de ellentett irányítottágú sebességgel. Álló rendszerből nézve, ahol eredeti állapotban nulla értékek voltak, az elmozdulást követően ugyanakkora, de ellentett előjelű értékek keletkeznek, az összegük folyamatosan nulla. Negyed periódussal, 90 fokkal eltolva a maximum és minimum közötti periodikus ingadozást eredményez az előjeles szakaszok összegzése.
- A gyakorlatban állóhullám falra merőlegesen beeső tisztahang visszaverődésekor alakulhat ki. Egy vakolt téglafal, vagy betonfal a frekvenciától függően a beeső hangenergia akár 95%-t is visszaveri. Így az amplitúdók közelítőleg megegyeznek, a visszaverődés a frekvenciát és a hangsebesség abszolút értékét nem befolyásolja, így beeső és visszavert hullám állóhullámot hoz létre.
- Az állóhullámok figyelemmel kísérése mérés-technikai szempontból is fontos, mert hangvisszaverő falakkal részlegesen határolt szabadterei részen a hangforrás és a hangvisszaverő felület között a hangnyomás hely függés nem várt módosulását okozhatják (pl.: távolodva a hangforrástól lokálisan a hangnyomás növekedése alakul ki).

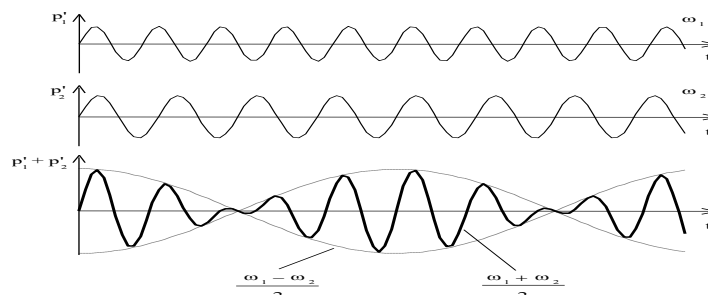
### Lebegés:

Két azonos amplitúdójú és terjedési sebességű, egy irányban haladó, kis mértékben eltérő frekvenciájú harmonikus hullám összetétele esetén lebegés alakul ki. A lebegés hullámfüggvényének meghatározásánál szintén a lineáris szuperpozíció elvéből indulunk ki,

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \hat{p}, \quad a_1 = a_2, \quad \omega_1 > \omega_2, \text{ de } \omega_2 \gg \omega_1 - \omega_2, \quad k_1 > k_2, \text{ de } k_2 \gg k_1 - k_2$$

$$\begin{aligned} p'_1(x, t) &= p'_1(x, t) + p'_2(x, t) = \hat{p}_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \hat{p}_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x) = \\ &= \hat{p} (\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)) = \\ &= 2\hat{p} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \end{aligned}$$

A szögek koszinuszainak összegére vonatkozó azonosság alkalmazásával nyert végeredmény, a lebegés hullámfüggvény nem egyszerűbb, mint a kiinduló kifejezés, de a változók megfelelő csoportosításával áttekinthetővé teszi a lebegés fizika szempontból lényeges tulajdonságait.



Az összetevő hullámok és a lebegés hangnyomás változása az idő függvényében az  $x = 0$  m helyen

Az előző ábra az  $x = 0$  m helyen rögzített pontban az összetevő hanghullám függvények grafikus összegzésével mutatja be a lebegés hullámfüggvény időfüggés ábráját.

### Megjegyzések:

- A hullámok összetétele miatt a hullámfüggvény átalakult (koszinuszok összege helyett azok szorzata lett), de a szorzatban mindkét koszinusz argumentumában a hely- és időváltozók egyaránt megtalálhatók, így az összetevőkhöz hasonlóan a lebegés haladó hullám marad.
- Az előző ábrán bemutatott grafikus összegzés mutatja a lebegés keletkezésének fizikai magyarázatát. A kezdetben azonos fázisból induló, egymást erősítő hullámok, a szögsebességek kicsi eltérése miatt, az alap periódushoz képest hosszabb idő elteltével ellentett fázisra változnak és kioltják egymást, majd ez ismétlődik tovább.
- Lebegés esetén egy adott pontban érzékelhető hang egy tiszta hang, frekvenciája az összetevő frekvenciák számtani átlaga, és ez az alap hanghullám a két összetevő frekvencia különbségének felével modulálódik. A moduláció során a hallásunk a felerősödéseket és elhalkulásokat érzékeli (nem tesz különbséget a burkológörbe pozitív és negatív fele között), így a szubjektív érzékelhető modulációs frekvencia épp a számolt érték kétszerese.
- Lebegés esetén a hangenergia hullám-csoportokban, a modulációs periódus kiszélesedő részeiben tejed.
- Lebegés a gyakorlatban például akkor jön létre, ha két azonos típusú, egymás mellett működő periodikus zajkeltő (pl.: szellőztető ventilátor) üzemi pontja eltér egymástól. A megegyező típus miatt a berendezések zajkeltése alapvetően egyforma, de az eltérő üzemi pont (pl.: az egyik ventilátor fojtása nagyobb) kicsit eltérő fordulatszámot (a keltett tiszta hangú zajösszetevő frekvenciája arányos a fordulatszámmal) és így kicsit eltérő kisugárzott hang frekvenciát okoz, amely lebegést hoz létre.
- A tiszta hangok szubjektív megítélése rossz. A periodikus modulálás a hangérzeti jellemzőket tovább rontja, ezért a lebegés zajvédelmi szempontból elkerülendő. Megfordítva, és kihasználva a figyelemfelkeltő, zavaró jellegét, a periodikusan modulált hang jól használható vészhelyzeti figyelmeztető hangként (pl.: megkülönböztetett járművek hangjele, légoltalmi sziréna).

## 5.2. Hangterek modellezése, akusztikai hasonlóság

Modellt akkor készítünk, ha a feladat vizsgálata eredeti méretben fizikailag nem lehetséges, veszélyes, drága, vagy túl sokáig tart. Modell lehet matematikai vagy fizikai. A matematikai modell legfontosabb tulajdonságait a „3.1. Rendhagyó matematikai bevezető” című részben foglaltuk össze. Fizikai modellezés során az eredeti jelenség tulajdonságait kísérleti módszerekkel, méréssel határozzuk meg. Kísérleti modellezésre akkor kerül sor, ha nincs a fizikai feladatra vonatkozó matematikai modell, vagy létezik matematikai leírás, de a megoldás pontossága nem egyértelmű és azt ellenőrizni kell („validálás”). A fizikai modell az eredeti jelenség egyszerűsített változata, amely a vizsgált tulajdonságok szempontjából hasonlít az eredetire, de egyéb tekintetben eltérhet attól. A kísérleti modellek homológ vagy analóg jellegűek lehetnek. Homológ modellezésnél a kísérleti vizsgálatnál alkalmazott fizikai jelenség megegyezik az eredeti jelenséggel (pl.: autó karosszéria körül kialakuló áramlás vizsgálata szélcsatornában kisebb méretarányú modellen), ez a „kisminta” kísérlet. Vannak esetek, amikor az eredeti fizikai jelenség nehezen mérhető, ilyen például víz szivárgás porózus talajban. Ebben az esetben a jelenséget egy olyan, az eredetitől eltérő fizikai jelenséggel vizsgáljuk, amelynél a fizikai változókat leíró függvények alakja megegyezik az eredeti jelenséggel, és a mérés könnyen megvalósítható. Az ilyen vizsgálatot analóg modellezésnek nevezzük. Analóg modellezés például a víz szivárgás vizsgálata homokban elektromos potenciál kád modellel. Akusztikában modellezést általában hangterek vizsgálatánál, „kisminta” kísérlettel végzünk.

A modellvizsgálatok során alapvető fontosságú, hogy az eredeti jelenség és a modell jelenség a kiszemelt változó szempontjából hasonlóan viselkedjen. Például ha egy hangversenytér eredeti kivitelében a hangnyomáseloszlás a tér egy bizonyos részén nem kívánt növekedést mutat, akkor az a kicsinyített modellben is kimutatható legyen. A hasonlóságot egymástól függetlenül matematikai és fizikai alapú feltétellel

határozhatjuk meg. A matematikai alapú feltétel esetén két jelenség akkor hasonló, ha jelenségekre vonatkozó, dimenziótlan változókkal felírt differenciálegyenletek és a kapcsolódó dimenziótlan perem és kezdetiérték feltételek egymással egyenlők. „Kisminta” kísérletek esetén a hasonlósághoz elegendő a dimenziótlan differenciálegyenlet együtthatók, illetve a dimenziótlan perem- és kezdetiérték feltételek egyezése. A fizikai alapú feltétel esetén a jelenséget meghatározó fizikai változók hányadosa az eredeti és a modell jelenségek esetében egyaránt állandó. Meghatározó változók hányadosa például viszkózus folyadék mozgás esetén a tehetetlenségi erő és súrlódó erő hányadosa (Reynolds-szám), vagy összenyomható közegáramlás esetén a rendezett és rendezetlen mozgási energiák hányadosa (Mach-szám).

Hangterek modellezésénél a hasonlósági feltétel matematikai alapú meghatározásánál a homogén akusztika hullámegyenletből indulunk ki,

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0$$

Az egyenletben szereplő változók dimenziótlanítása érdekében az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg a hangtérre jellemző geometriai méret ( $L_0$ ) négyzetével, és osszuk el hangtérre jellemző vonatkoztatási hangnyomással ( $p'_0$ ). Majd az egyenlet bal oldalán az első tag számlálóját és nevezőjét bővítjük a hangtérre jellemző idő ( $T_0$ ) négyzetével. A dimenziótlan hullámegyenlet,

$$\frac{L_0^2}{a^2 T_0^2} \frac{\partial^2 \left( \frac{p'}{p'_0} \right)}{\partial \left( \frac{t^2}{T_0^2} \right)} - \frac{\partial^2 \left( \frac{p'}{p'_0} \right)}{\partial \left( \frac{x^2}{L_0^2} \right)} = 0$$

A homológ modellezés miatt az eredeti és a modell hangterek dimenziótlan leíró egyenletei alakra megegyeznek. Így a hangterek hasonlóságának feltétele az eredeti és a modell egyenletben a bal oldalon az első tagban az együtthatók megegyezése. Ha a hányados állandó, szükségszerűen a négyzetgyöke is állandó, továbbá szűkítsük vizsgálatainkat a harmonikus hullámokra, ahol a hangtérre jellemző idő a periódusidő ( $T_0$ ). A periódusidő és a hangsebesség szorzata a hullámhossz ( $\lambda$ ), amely alapján két hangtér hasonlóságának a feltétele, a Helmholtz-szám ( $He$ ),

$$He = \frac{L_0}{a T_0} = \frac{L_0}{\lambda_0}$$

a hangtérre jellemző geometriai méret és hullámhossz hányadosának állandósága.

### Megjegyzés:

- Akusztikában a költségek csökkentése érdekében a modellek általában kisebbek, mint az eredeti méret. A hasonlósági feltétel a jellemző méret és a hullámhossz között egyenes arányos kapcsolat, illetve a jellemző méret és a frekvencia között fordított arányos kapcsolat, tehát minél kisebb a méret, annal nagyobb a frekvencia. A gépészeti zajvédelemben, fokozott mértékben a teremakusztikában az eredeti méretnél vizsgált frekvenciatartomány felső értéke elérheti a több kHz, akár 10 kHz értéket is. Reálisan 1:10, de gyakran még ennél is kisebb modellek esetén a mikrofonok frekvencia sáv szélességének elvárt felső értéke jóval a hallható tartomány fölé, több tíz kHz-es tartományba kerül. Emiatt a mikrofonok érzékenysége csökken, és a műszer beszerzési költsége növekszik.

- További probléma a modell vizsgálatánál alkalmazott nagy mérőhang frekvencia miatt megnövekednek a hangterjedés során fellépő disszipatív veszteségek. A hangok disszipáció miatti csillapodása levegőben 1...2 kHz frekvenciáig párszor 10 m távolságban gyakorlatilag elhanyagolható (a beeső hangteljesítmény néhány százaléka), 10 kHz feletti tartományban a disszipáció miatti csillapodás igen jelentőssé válik és nem hanyagolható el. A hangterjedés során fellépő disszipatív veszteségek a modell vizsgálat pontatlanságát okozhatják.

- Ne felejtsük a léghangok áramlási természetét. Ennek alapján az áramlásokra meghatározott hasonlósági számok, alkalmas megválasztással az akusztikában is alkalmazhatóak. A hang áramlási természetét az időben változó jelleg, az összenyomhatóság és a kis amplitúdók jellemzik. A két első jellemzőhöz rendre a Strouhal- és Mach-szám áramlástanai hasonlósági számok rendelhetők. A hasonlósági számítások skálatörvények, ezért az eredő meghatározásához a két hasonlósági szám szorzatát kell venni,

$$Sh Ma = \frac{f_0 L_0}{v_0} \frac{v_0}{a_0} = \frac{L_0}{T_0 a_0} = \frac{L_0}{\lambda_0} = He$$

Az eredmény ugyanaz, a Helmholtz-szám. A Helmholtz-szám ilyen származtatása tanulságos abból a szempontból, mert alkalmazható lehet más esetekben is. Ha egy összetett jelenségnél nem ismerjük a hasonlóság feltételét, de az összetevőket igen, egyes esetekben az összetett jelenség hasonlóságának feltétele az összetevő jelenségekre vonatkozó hasonlósági számok szorzata.

### 5.3. Gyakorló feladatok

Gy.1. Mi az állóhullám, vezesse le a hangnyomás hely- és idő függését megadó kifejezést tetszőleges állóhullám esetére!

Gy.2. Egy 0,001 sec periódusidejű, 0,5 Pa hangnyomás amplitúdójú harmonikus hullám tökéletesen visszaverődik az útjában merőlegesen elhelyezett sík falról. Nevezze meg a kialakuló hangtani jelenséget, határozza meg két szomszédos csomópont közti távolságot és a duzzadó helyen a legnagyobb hangnyomás értékét, ha a hangsebesség 340m/s!

Megoldás: A kialakuló akusztikai jelenség az állóhullám.

$$\lambda = a \cdot T = 340 \cdot 0,001 = 0,34 \text{ m}$$

$$\text{Két szomszédos duzzadó hely között a távolság: } \Delta l_{\text{áh}} = \lambda/2 = 0,34/2 = 0,17 \text{ m}$$

$$\text{A duzzadó helyen mérhető hangnyomás amplitúdó: } \hat{p}_{\text{áh}} = 2\hat{p} = 1 \text{ Pa}$$

Gy.3. Mi a lebegés, vezesse le a hangnyomás hely- és idő függését megadó kifejezést tetszőleges lebegés esetére!

Gy.4. Mit jelent két hangtér hasonlósága, és adja meg a hangterek hasonlóságának feltételét!

Gy.5. Színházterem 1:10 méretarányban elkészített modelljén végzett vizsgálattal szándékozunk megállapítani az eredeti teremben a 250, 500 és 1000 Hz frekvenciájú tisztahang gerjesztés hatására kialakuló hangterek tulajdonságait. Határozza meg a modell vizsgálatokhoz szükséges mérőhang frekvenciákat, ha az eredeti és a modell hangtérben a vivőközeg egyaránt technikai normál állapotú ( $p_0 = 1 \text{ bar}$ ,  $t_0 = 20^\circ \text{C}$ ) levegő!

Megoldás:

$$He_m = He_0, \quad l_m/\lambda_m = l_0/\lambda_0, \quad l_m f_m/a_m = l_0 f_0/a_0, \quad \text{de } (a_m = a_0) \text{ ezért, } f_m = f_0 l_0/l_m, \text{ amelyek rendre 2,5k, 5k és 10kHz}$$

-----