

## MEREVSÉGI MÁTRIXOK ELŐÁLLÍTÁSA

### Rúdszerkezetek merevségi mátrixa

Az elmozdulásmódszerrel való számítás azt jelenti, hogy az egyes csomópontoknál egyensúlyi egyenleteket írunk fel. A különböző csomópontoknál, a különböző elmozdulási irányokhoz tartozó egységnyi elmozdulásokból egy adott csomópont, adott elmozdulási irányába kell összegeznünk a csomópont-hoz csatlakozó rudak rúdvégi erőit.

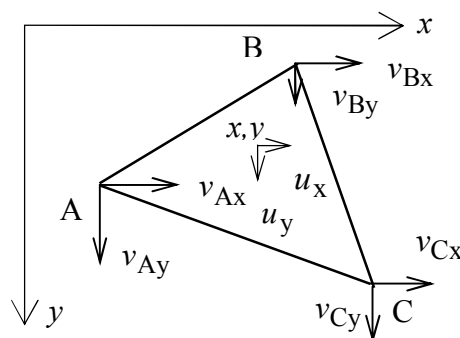


$Q_x^i$	$=$	$\frac{EA}{l}$			$-\frac{EA}{l}$			$u_x^i$
$Q_y^i$		$\frac{12EI}{l^3}$	$\frac{6EI}{l^2}$		$-\frac{12EI}{l^3}$	$\frac{6EI}{l^2}$		$u_y^i$
$W_z^i$		$\frac{6EI}{l^2}$	$\frac{4EI}{l}$		$-\frac{6EI}{l^2}$	$\frac{2EI}{l}$		$\varphi_z^i$
$Q_x^j$		$-\frac{EA}{l}$			$\frac{EA}{l}$			$u_x^j$
$Q_y^j$		$-\frac{12EI}{l^3}$	$-\frac{6EI}{l^2}$		$\frac{12EI}{l^3}$	$-\frac{6EI}{l^2}$		$u_y^j$
$W_z^j$		$\frac{6EI}{l^2}$	$\frac{2EI}{l}$		$-\frac{6EI}{l^2}$	$\frac{4EI}{l}$		$\varphi_z^j$

2.1. táblázat. Az állandó keresztmetszetű rúd elemi merevségi mátrixa saját koordinátarendszerben

### Az elemi statikai merevségi mátrix számítása végelemek módszerével

Vizsgáljuk a továbbiakban a 3.1-es ábrán látható háromszög alakú tárcsaelemet. Ha a 3.1-es ábrán látható háromszög alakú tárcsaelemnél szeretnénk megismerni valamelyik sarokpont  $x$  tengely irányú egységnyi elmozdulásához tartozó elemvégi erőket, azokat nem tudjuk pontosan meghatározni, a tárcsaelemenetet adott kerületi feltételek mellett pontosan megoldani nem tudjuk.



3.1. ábra

$$\underline{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, \quad \underline{\varepsilon}(x, y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad \underline{\sigma}(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}.$$

Írjuk le az elmozdulások és alakváltozások közötti összefüggéseket az  $\underline{L}$  operátor, míg feszültségek és alakváltozások közötti összefüggéseket a  $\underline{D}$  mátrix segítségével

$$\underline{\varepsilon}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \underline{L} \underline{u},$$

$$\underline{\sigma}(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \\ & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underline{D} \underline{\varepsilon}(x, y).$$

Az elem belső pontjának elmozdulásai és az elemvégi elmozdulások közötti összefüggést leíró elmozdulásfüggvényeket tartalmazó,  $\underline{N}(x, y)$ -nal jelölt mátrix most 2 sorból és 6 oszlopból fog állni. A mátrix elemei egyelőre ismeretlen függvények.

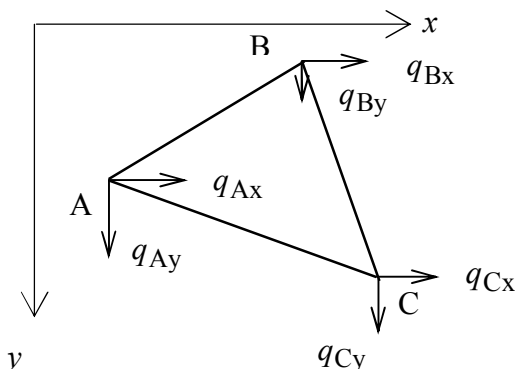
$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \\ v_{Bx} \\ v_{By} \\ v_{Cx} \\ v_{Cy} \end{bmatrix}, \quad \underline{N}(x, y) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline N_{11}(x, y) & N_{12}(x, y) & N_{13}(x, y) & N_{14}(x, y) & N_{15}(x, y) & N_{16}(x, y) \\ \hline N_{21}(x, y) & N_{22}(x, y) & N_{23}(x, y) & N_{24}(x, y) & N_{25}(x, y) & N_{26}(x, y) \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{u}(x, y) = \underline{N}(x, y) \underline{v}.$$

Az alakváltozások felírhatók az elemvégi elmozdulások segítségével:

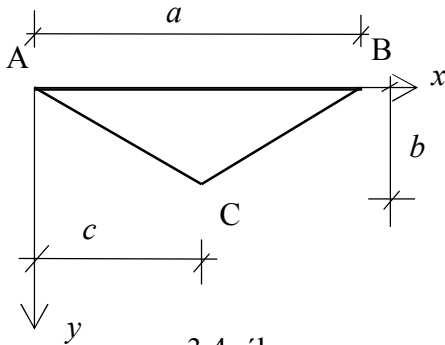
$$\underline{\varepsilon}(x, y) = \underline{L} \underline{u}(x, y) = \underline{L} \underline{N}(x, y) \underline{v} = \underline{B}(x, y) \underline{v}.$$

A fentiek szerint az alakváltozások a  $\underline{B}(x, y)$  mátrix ismeretében közvetlenül számíthatók az elemvégi elmozdulásokból. Működjenek az elem sarokpontjaira az ábrán látható erők.



Ezen erőket gyűjtjük egy  $\underline{q}$  vektorba. Az erőrendszerhez tartozó sarokponti elmozdulások a  $\underline{v}$  vektorban vannak, az elemben ébredő feszültségeket pedig a  $\underline{\sigma}$  vektor tartalmazza.

$$\underline{K} = \int_{(V)} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV .$$



3.4. ábra

Pl. a 3.4-es ábrán lévő  $h$  vastagságú háromszög alakú tárcsaelemnél az egyik elterjedt elmozdulásmátrixot látjuk a (3.9) alatt. Itt

$$N_1(x, y) = 1 - \frac{x}{a} + \frac{c-a}{ab} y ,$$

$$N_2(x, y) = \frac{x}{a} - \frac{c}{ab} y ,$$

$$N_3(x, y) = \frac{y}{b} .$$

$$\underline{N}(x, y) = \begin{matrix} N_1(x, y) & & N_2(x, y) & & N_3(x, y) \\ & N_1(x, y) & & N_2(x, y) & & N_3(x, y) \end{matrix} \quad (3.9)$$

A  $\underline{B}$  mátrixot az  $\underline{L}$  operátor segítségével számíthatjuk. Láthatjuk, hogy a  $\underline{B}$  mátrix elemei nem lesznek függvényei az  $x$ -nek és  $y$ -nak.

$$\underline{B} = \underline{L} \underline{N} = \begin{matrix} -\frac{1}{a} & & \frac{1}{a} & & & \\ & \frac{c-a}{ab} & & -\frac{c}{ab} & & \frac{1}{b} \\ \frac{c-a}{ab} & -\frac{1}{a} & -\frac{c}{ab} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \end{matrix}$$

Az elemi merevségi mátrix a  $\underline{B}$  mátrix és a  $\underline{D}$  mátrix segítségével számítható. A számítást megkönnyíti, hogy a hármasszorzat eredménye is konstansokat tartalmaz, így az integrál jel elé kiemelhető:

$$\underline{K} = \int_{(V)} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \int dV = \frac{abh}{2} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} .$$

Az elemi merevségi mátrix most is szimmetrikus lesz. (A  $\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}$  hármasszorzatot transzponálva, ugyanazt kapjuk eredményül.) Az elemi merevségi mátrix három blokksorral és három blokk oszloppal bír. Az AB blokk elemei jelentik például a B sarok pont mozgásából az A sarokponti erőket.

$$\underline{\underline{K}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \underline{\underline{K}}_{AA} & \underline{\underline{K}}_{AB} & \underline{\underline{K}}_{AC} \\ \hline \underline{\underline{K}}_{BA} & \underline{\underline{K}}_{BB} & \underline{\underline{K}}_{BC} \\ \hline \underline{\underline{K}}_{CA} & \underline{\underline{K}}_{CB} & \underline{\underline{K}}_{CC} \\ \hline \end{array}$$

Az elemi merevségi mátrixot a saját koordináta-rendszerben kaptuk meg. Ahhoz, hogy az elemi merevségi mátrixot fel tudjuk használni a szerkezet merevségi mátrixának előállításához, azt a globális koordináta-rendszerbe kell transzformálni. A transzformálást a rúdszerkezeteknél látottaknak megfelelően most is blokkonként végezzük el. A transzformáló mátrix most  $2 \times 2$ -es mátrix lesz és a sarokponti eltolódásoknak megfelelő sorokból és oszlopokból áll.

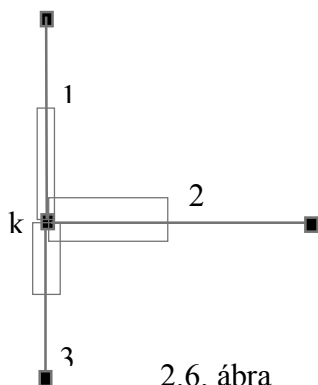
## A TÖMEGMÁTRIX ELŐÁLLÍTÁSA

### Diagonál tömegmátrix

Amint korábban láttuk - a súlytalan szerkezetnél - a diagonál tömegmátrix előállítása azt jelenti, hogy az adott csomópont-hoz rendelt elmozdulási irányoknak megfelelő helyre, a diagonál tömegmátrixba beírjuk a csomópontnál lévő tömeget. A jelen esetben a csomópontnak elfordulása is van, így az elfordulásnak megfelelő helyre a tömegnek a síkra merőleges (a korábbiakban  $z$ -vel jelölt) tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékát kell szerepeltetni.

Ha a szerkezet rúd-jainak tömege nem hanyagolható el, akkor a jelen pontban tárgyalt koncentrált tömegpontos vizsgálatnál az a feladatunk, hogy a rúdtömegeket szétosszuk a rúdvégi csomópontokra. Ez egyszerűen azt jelenti, hogy egy adott rúd fél tömege a kezdőpontonál lévő csomópont-ra, a másik fél tömege pedig a végpontonál lévő csomópont-ra kerül. Ami egy adott csomópontnál beírandó tehetetlenségi nyomatékot illeti, azt az egyes fél tömegeknek a csatlakozó csomópontokon átmenő tengelyre való számításával, és azok összegzésével lehet meghatározni.

Legyen a 2.6-os ábrán látható  $k$ -edik csomópont-hoz csatlakozó rudak tömege rendre  $p_1, p_2, p_3$  és hossza  $l_1, l_2, l_3$ . Feladatunk a diagonál tömegmátrix  $3k-2, 3k-1, 3k$  helyen lévő elemeinek a számítása.



2.6. ábra

$$m_{3k-2,3k-2} = \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2} + \frac{p_3}{2} = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{2} = M_k,$$

$$m_{3k-1,3k-1} = M_k,$$

$$\begin{aligned} m_{3k,3k} &= \frac{p_1}{2} \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 \frac{1}{3} + \frac{p_2}{2} \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \frac{1}{3} + \frac{p_3}{2} \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 \frac{1}{3} = \\ &= \frac{p_1 l_1^2 + p_2 l_2^2 + p_3 l_3^2}{24} = \Theta_k. \end{aligned}$$

Az M tömegmátrix pedig:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \dots & & & & & & \\ & \dots & & & & & \\ & & \dots & & & & \\ & & & M_k & & & \\ & & & & M_k & & \\ & & & & & \Theta_k & \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & & \dots \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

A végelemek alkalmazása esetén az adott elem tömegét kell szétosztani az elemvégi csomópontokra

A tömegmátrix diagonál volta nagy előny a számítási időt illetően. Ugyanakkor igaz, hogy ha a fél tömegekből álló rendszer súlypontja nem esik egybe a csomóponttal, akkor a csomópont eltolódásából nem csak tehetetlenségi erők, hanem tehetetlenségi nyomatékok is ébrednek. Ez azzal jár, hogy a tömegmátrixban megjelennek a diagonálon kívüli elemek is, amelynek következtében megszűnik a diagonálmátrix adta előny. A diagonizálhatóság érdekében ilyenkor közelítésként elhanyagolják a diagonálon kívüli elemeket.

### Konzisztens tömegmátrix

Ha a szerkezet valamilyen harmonikus rezgést végez, akkor az elemvégi erők és mozgások, valamint a belső pontok elmozdulásai is harmonikusan változnak. Az elem megoszló tömegének megfelelően az elemen megjelennek a megoszló tehetetlenségi erők. Ezek intenzitása:

$$-\rho \underline{\underline{a}} = \omega^2 \rho \underline{\underline{u}} \sin \omega t.$$

Mivel  $\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{N}} \underline{\underline{v}}$  a megoszló tömeget  $\omega^2 \rho \underline{\underline{N}} \underline{\underline{v}} \sin \omega t$ . A tömeget redukálva a csomópontokra az

$$\underline{\underline{M}} = \rho \int_{(V)} \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{N}} dV$$

mátrix az elem tömegmátrixa,

Ha a tömegmátrix  $\underline{\underline{M}} = \rho \int_{(V)} \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{N}} dV$  kifejezésében az elmozdulásfüggvények frekvenciafüggetlen, ún. statikus elmozdulásfüggvények (amelyeket a statikai vizsgálatok során a merevségi mátrix előállítására is használtunk), akkor a kapott mátrix - a rudaknál látottakhoz hasonlóan - az elem ún. konzisztens tömegmátrixa lesz.

Ennek megfelelően a tárcsaelem elemi tömegmátrixa:

$$\underline{\underline{M}} = \rho h \int_{(A)} \underline{\underline{N}}^T(x, y) \underline{\underline{N}}(x, y) dA. \quad (3.19)$$

$$\underline{\underline{M}} = \rho h \int_{(A)} \begin{bmatrix} N_1 & & & \\ & N_1 & & \\ N_2 & & & \\ & N_2 & & \\ N_3 & & & \\ & & & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & & & \\ & N_1 & & \\ & & N_2 & \\ & & & N_2 \\ & & & & N_3 \\ & & & & & N_3 \end{bmatrix} dA.$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \underline{\underline{M}}_{AA} & \underline{\underline{M}}_{AB} & \underline{\underline{M}}_{AC} \\ \hline \underline{\underline{M}}_{BA} & \underline{\underline{M}}_{BB} & \underline{\underline{M}}_{BC} \\ \hline \underline{\underline{M}}_{CA} & \underline{\underline{M}}_{CB} & \underline{\underline{M}}_{CC} \\ \hline \end{array}$$

A 3.4-es ábrán látható tárcsaelemnél a tömegmátrix a merevségi mátrixszal megegyező struktúrájú lesz. A tömegmátrix 6,6-os eleme pl.

$$\underline{\underline{M}}_{6,6} = \rho h \int_{(A)} N_3 N_3 dA = \rho h \int_{(A)} \frac{y}{b} \frac{y}{b} dA = \frac{\rho h}{b^2} \int_{(A)} y^2 dA.$$

Látható, hogy szükség lesz a terület szerinti integrálásra. Az  $\int_{(A)} y^2 dA$  kifejezés azonban jól ismert,

nem más, mint a síkidom  $x$  tengelyre számított inercianyomatéka:  $\int_{(A)} y^2 dA = \frac{ab^3}{12}$ . Ezt behelyettesítve

és  $m$ -el jelölve az elem tömegét:

$$\underline{\underline{M}}_{6,6} = \frac{\rho h ab^3}{b^2 12} = \frac{\rho h ab}{12} = \frac{m}{6}.$$

Hasonlóan számítható a tömegmátrix többi eleme is. Egy állandó keresztmetszetű rúd konzisztens tömegmátrixa:

$$\underline{\underline{M}} = \mu l \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \frac{1}{3} & & & \frac{1}{6} & & \\ \hline & \frac{13}{35} & \frac{11l}{210} & & \frac{9}{70} & -\frac{13l}{420} \\ \hline & \frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} & & \frac{13l}{420} & -\frac{l^2}{140} \\ \hline \frac{1}{6} & & & \frac{1}{3} & & \\ \hline & \frac{9}{70} & \frac{13l}{420} & & \frac{13}{35} & -\frac{11l}{210} \\ \hline & -\frac{13l}{420} & -\frac{l^2}{140} & & -\frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} \\ \hline \end{array}$$

A konzisztens tömegmátrixnak a dinamikus tömegmátrix helyett történő alkalmazásával elkövetett hiba az elem méretek csökkentésével (a végeselemes hálózat sűrítésével) csökkenthető.

magántanár

Alapelveként kimondhatjuk, hogy a dinamikai vizsgálatoknál a szerkezet még fontos legmagasabb sajátkörfrekvenciájánál nagyobb kellene, hogy legyen az adott elem legkisebb sajátkörfrekvenciája, ami az elem merevségének növelésével (elemméret csökkentésével) érhető el.

### 3.5. Kiegészítő tömegek figyelembevétele

A szerkezeten számos egyéb tömeg (burkolatok, technológiai teher stb.) is van. Az ezekhez a tömegekhez tartozó tömegeket a számításokban figyelembe kell venni, és erről külön gondoskodni kell. Az eljárás a kiegészítő tömegek jellegétől függ.

#### 3.5.1. Koncentrált tömegpontok

Ha a tömegpont helyzete állandó, célszerű a hálózatot úgy kialakítani, hogy a tömegpontnak megfelelő helyre kerüljön hálózati csomópont. Ebben az esetben a tömegmátrix adott (k-adik) csomópontnak megfelelő blokkjához egy diagonál blokkot adunk hozzá. Ebben a blokkban az eltolódásoknak megfelelő helyekre a tömegpont tömege, az elfordulásoknak megfelelő helyekre az elemi tömeg tehetetlenségi nyomatékai kerülnek. Pl. síkbeli keretnél a beillesztendő diagonál blokk:

$$\underline{\underline{M}}_k = \begin{bmatrix} M_k & & \\ & M_k & \\ & & \Theta_k \end{bmatrix}.$$

#### 3.5.2. Megoszló tömegek

Ha a szerkezet adott felületén (rúdnál a rúd mentén) megoszló tömeg van, akkor a legegyszerűbb eljárás, ha a hálózatot úgy alakítjuk ki, hogy a teherfelületet (szakaszt) lefedje egy vagy több hálózati elem. Ezeknél az elemeknél a merevségi viszonyok nem változnak, viszont egy ekvivalens anyagsűrűséggel figyelembevehető a kiegészítő tömeg. Legyen az adott (j-edik) elem térfogata  $V_j$ , anyagának sűrűsége  $\rho_j$ , az elemen lévő kiegészítő tömeg  $m_j^{\text{kieg}}$ . Ekkor az ekvivalens sűrűség:

$$\rho_j^{\text{kieg}} = \frac{V_j \rho_j + m_j^{\text{kieg}}}{V_j} = \rho_j + \frac{m_j^{\text{kieg}}}{V_j}.$$

A feladat bemenő adataként az adott (j-edik) elemnél az ekvivalens sűrűséget kell megadni, és ezzel a kiegészítő tömeg figyelembevétele automatikusan megtörténik.

#### 3.5.3. Elemen belüli koncentrált tömeg

Ha a szerkezeten egy adott tömegpont helyzete változhat, a hálózatot általában (a helyzetváltozás folytonosan történik) nem lehet úgy kialakítani, hogy a tömegpontnak megfelelő helyre mindig kerüljön hálózati csomópont. Ehhez folytonosan változtatni kellene a hálózati osztást. Az ilyen esetben azt mondhatjuk, hogy a tömegpont, egy adott (j-edik) elem saját koordinátarendszerbeli  $x_0, y_0, z_0$  pontjában helyezkedik el. Ekkor a kiegészítő tömegmátrix:

$$m_k \underline{\underline{N}}^T(x_0, y_0, z_0) \underline{\underline{N}}(x_0, y_0, z_0) = \underline{\underline{M}}_K$$

kifejezés egy mátrix, amelyet az elem kiegészítő tömegmátrixának nevezhetünk

### 3.5. Többszabadságfokú rendszer szabad rezgései

#### 3.5.1. A rezgésegyenlet közvetlen megoldása

Feladatunk az 
$$\underline{M}\ddot{\underline{x}}(t) + \underline{K}\underline{x}(t) = \underline{0}$$

mátrix-differenciálegyenlet adott  $\underline{x}_0$ ,  $\dot{\underline{x}}_0 = \underline{v}_0$  kezdeti feltételek melletti megoldása. Keressük a megoldást

$$\underline{x}(t) = \tilde{c}\underline{v} e^{i\omega_0 t}$$

alakban. Behelyettesítés és egyszerűsítés után

$$\left(\underline{K} - \omega_0^2 \underline{M}\right)\underline{v} = \underline{0}.$$

Vagyis az  $\omega_0^2$ -nek és a  $\underline{v}$  vektornak ki kell elégítenie a homogén lineáris egyenletrendszert. A homogén lineáris egyenletrendszernek akkor van triviálistól különböző megoldása, ha az együtttható mátrix determinánsa zérus, azaz

$$\left|\underline{K} - \omega_0^2 \underline{M}\right| = 0.$$

A megoldásból adódó pozitív  $\omega_{0r}$  értékek a rendszer sajátkörfrekvenciái. Közülük a legkisebbet az  $\omega_{01}$ -et a rendszer **alap sajátkörfrekvenciájának** nevezzük. A különböző  $\omega_{0r}^2$  értékekhez a homogén egyenletrendszer megoldásaként különböző  $\underline{v}_r$  sajátvektorok adódnak.

A mátrix-differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása ezek után:

Az 
$$\underline{x}(t) = \sum_{r=1}^n \underline{v}_r \left( a_r \cos \omega_{0r} t + b_r \sin \omega_{0r} t \right)$$

megoldásban szereplő konstansok konstansok a kezdeti feltételek alapján - egy  $2n$  rendszámú lineáris egyenletrendszer megoldásával - számíthatók.

#### 3.5.2. A rezgésegyenlet megoldása a sajátvektorok ismeretében

A  $\left(\underline{K} - \omega_0^2 \underline{M}\right)\underline{v} = \underline{0}$  egyenlet felírható  $\underline{K}\underline{v} = \omega_0^2 \underline{M}\underline{v}$

általánosított sajátérték-feladat alakjában is. Ezen feladatok megoldására megfelelő számítógépi programok állnak rendelkezésre, amelyek szolgáltatják az  $\omega_{0r}^2$  **sajátértékeket** és a hozzájuk tartozó  $\underline{v}_r$  **sajátvektorokat**. Ezen sajátvektorok a továbbiakban jól hasznosítható sajátosságokkal rendelkeznek.

$$\underline{v}_r^T \underline{M} \underline{v}_s = 0. \quad \underline{v}_r^T \underline{K} \underline{v}_s = 0.$$

Vagyis a sajátvektorok a merevségi és tömegmátrixra ortogonálisak.



Normáljuk a különböző sajátvektorokat úgy, hogy a  $\underline{v}_r^T \underline{M} \underline{v}_r$  szorzat értéke egységnyi legyen. Ekkor  $\underline{v}_r^T \underline{K} \underline{v}_r = \omega_{0r}^2$ . Egy  $\underline{V}$  mátrixba foglalva az összes sajátvektort (a mátrix r-edik oszlopa  $\underline{v}_r$  és  $\underline{V}^T$  mátrixba a sajátvektorok transzponáltjai kerülnek, így annak r-edik sora  $\underline{v}_r^T$ ) az ortonormalitás miatt a  $\underline{V}^T \underline{M} \underline{V} = \underline{E}$  szorzat egységmátrix lesz, míg a  $\underline{V}^T \underline{K} \underline{V}$  szorzat egy olyan diagonális mátrix lesz, amelynek elemei az  $\omega_{0r}^2$  sajátértékek. Azaz

$$\underline{V}^T \underline{M} \underline{V} = \underline{E}, \quad \underline{V}^T \underline{K} \underline{V} = \begin{pmatrix} \omega_{01}^2 & & & \\ & \dots & & \\ & & \omega_{0r}^2 & \\ & & & \dots & \\ & & & & \omega_{0n}^2 \end{pmatrix}.$$

Az  $\underline{M} \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{K} \underline{x}(t) = \underline{0}$  mátrix-differenciálegyenlet adott  $\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0 = \underline{v}_0$  kezdeti feltételek melletti megoldásakor, ha bevezetünk egy új ismeretlent az

$$\underline{x}(t) = \underline{V} \underline{y}(t)$$

összefüggésnek megfelelően a mátrixegyenlet egyszabadságfokú rendszerekre esik szét, ahol az egyszabadságfokú egyenlet megoldása:

$$\underline{y}_r(t) = \underline{v}_r^T \underline{M} \underline{x}_0 \cos \omega_{0r} t + \frac{1}{\omega_{0r}} \underline{v}_r^T \underline{M} \dot{\underline{x}}_0 \sin \omega_{0r} t.$$

Az  $\underline{x}(t) = \underline{V} \underline{y}(t)$  összefüggésnek megfelelően:

$$\underline{x}(t) = \sum_{r=1}^n \underline{v}_r \underline{v}_r^T \underline{M} \left( \underline{x}_0 \cos \omega_{0r} t + \frac{1}{\omega_{0r}} \dot{\underline{x}}_0 \sin \omega_{0r} t \right).$$

A kifejezés felírható az  $\underline{x}(t) = \sum_{r=1}^n \underline{v}_r \left( \hat{z}_r \cos \omega_{0r} t + \hat{z}_r \sin \omega_{0r} t \right)$  formában is, Látható, hogy az elmozdulásvektor minden időpillanatban a sajátvektorok lineáris kombinációjaként adódik.

Legyen például  $\underline{x}_0 = \underline{v}_s$  és  $\dot{\underline{x}}_0 = 0$ . Mint láttuk  $r \neq s$  esetén  $\underline{v}_r^T \underline{M} \underline{v}_s = 0$ , így a megoldásban csak a  $\underline{v}_s$  vektor fog megjelenni és  $\underline{x}(t) = \underline{v}_s \cos \omega_{0s} t$  lesz az elmozdulás. A rendszer tehát a sajátvektornak megfelelő amplitúdókkal rezeg. Ez indokolja, hogy a sajátvektorokat sajátrezgésalakoknak is nevezzük. A legkisebb sajátkőrfrekvenciához tartozik az alap rezgésalak. A fentiekben ismertetett eljárást, amely a sajátvektorok bázisában írja fel a rezgésegyenlet megoldását, **modálanalízisnek** nevezzük.

### 3.5.3. A szerkezeti csillapítás hatása többszabadságfokú szabad rezgésnél

Ha a belső súrlódási tényező minden rugóelemnél azonos, a csillapítatlan esetre kapott megoldások egyszerűen kiegészíthetők a csillapítás figyelembevétele érdekében. Ebben az esetben a  $\gamma$  csillapítási jellemző minden rezgésalaknál azonosra vehető fel. A sajátkőrfrekvencia módosítása az

$\omega_{0r}^* = \omega_{0r} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}$  összefüggés alapján történik. Az egyes rezgésösszetevőknél az amplitúdó

csökkenés az  $e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_{0r}^* t}$  szorzó alkalmazásával érhető el. Ezek alapján az elmozdulásvektor az alábbiak szerint alakul:

$$\underline{x}(t) = \sum_{r=1}^n e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_{0r}^* t} \underline{v}_r \underline{v}_r^T \underline{M} \left( \underline{x}_0 \cos \omega_{0r}^* t + \frac{1}{\omega_{0r}^*} \left( \frac{\gamma}{2} \omega_{0r}^* \underline{x}_0 + \dot{\underline{x}}_0 \right) \sin \omega_{0r}^* t \right).$$

### 3.6. Többszabadságfokú rendszer gerjesztett rezgései

#### 3.6.1. Az állandósult rezgés számítása harmonikus gerjesztésnél

##### 3.6.1.1. A rezgésegyenlet közvetlen megoldása

Abban az esetben, ha a csillapítással nem kívánunk számolni, a rezgés mátrix-differenciálegyenlete egy - a  $\sin \omega t$  szerint változó - harmonikus erővel való gerjesztésnél

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{K}}\underline{x}(t) = \underline{q} \sin \omega t$$

alakú lesz. Amint korábban az egyszabadságfokú rendszerek vizsgálatánál láttuk, az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása alkotja a rezgés állandósult részét. Keressük a partikuláris megoldást

$$\underline{x}_g(t) = \underline{x}_{g0} \sin \omega t$$

alakban. Behelyettesítve az egyenletbe:  $(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}})\underline{x}_{g0} = \underline{q}$ .

Feltéve, hogy az együttható mátrix nem szinguláris (ami azt jelenti, hogy determinánsa nem zérus, azaz  $\omega$  nem sajátkörfrekvencia) az amplitúdóvektor:

$$\underline{x}_{g0} = (\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}})^{-1} \underline{q}.$$

##### 3.6.1.2. A rezgésegyenlet megoldása a sajátvektorok ismeretében

Az ortonormált sajátvektorok és a hozzájuk tartozó sajátértékek ismeretében vizsgáljuk ismét az

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{K}}\underline{x}(t) = \underline{q} \sin \omega t$$

mátrix-differenciálegyenletet. Ha bevezetünk egy új ismeretlent az  $\underline{x}(t) = \underline{\underline{V}}\underline{y}(t)$  összefüggésnek megfelelően, akkor a mátrix-differenciálegyenlet most is N számú független - egyszabadságfokú rezgésnek megfelelő - differenciálegyenletre esik szét, ahol az r-edik egyenlet:

$$\ddot{y}_r(t) + \omega_{0r}^2 y_r(t) = f_r \sin \omega t.$$

Az egyszabadságfokú rendszer inhomogén differenciálegyenletének partikuláris megoldása

$$y_{gr}(t) = \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\omega_{0r}^2} v_r^T \cdot \underline{q} \sin \omega t.$$

Az  $\underline{x}(t) = \underline{\underline{V}}\underline{y}(t)$  összefüggés ismeretében:

$$\underline{x}_g(t) = \sum_{r=1}^n \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\omega_{0r}^2} v_r v_r^T \underline{q} \sin \omega t.$$

Az eredményből látszik, hogy minden sajátkörfekvenciához tartozik egy

$$\mu_r = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}}$$

rezonanciatényező. Ennek nagysága a gerjesztő frekvencia és az adott sajátkörfekvencia arányától függ. Ha a gerjesztő frekvencia bármelyik sajátkörfekvenciával egybeesik végtelen nagy amplitúdót kapunk. A valóságban a mindig meglévő szerkezeti csillapítás miatt erről nem lehet szó. A szerkezeti csillapítás hatására a rezonanciatényezők:

$$\mu_r = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}}}$$

Az állandósult rezgésrész pedig:

$$\underline{x}_g(t) = \sum_{r=1}^n \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}}} \frac{1}{\omega_{0r}^2} \underline{v}_r \underline{v}_r^T \underline{q} \sin(\omega t - \varphi_r)$$

### 3.6.2. Általános gerjesztés

#### 3.6.2.1. Gerjesztés az időtől tetszőlegesen függő erővel

$$\underline{x}(t) = \sum_{r=1}^n \frac{1}{\omega_{0r}} \underline{v}_r \underline{v}_r^T \int_0^t \underline{q}(\tau) \sin \omega_{0r}(t - \tau) d\tau$$

A szerkezeti csillapítás esetén az alábbiakat kapjuk:

$$\underline{x}(t) = \sum_{r=1}^n \frac{1}{\omega_{0r}^*} \underline{v}_r \underline{v}_r^T \int_0^t \underline{q}(\tau) e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_{0r}^*(t-\tau)} \sin \omega_{0r}^*(t - \tau) d\tau$$

## 5.5. A modálanalízis alkalmazása részleges sajátérték-feladat megoldásával

Mivel  $\underline{V}^T \underline{M} \underline{V} = \underline{E}$  ezért  $\underline{V}^T \underline{M} = \underline{V}^{-1}$  és  $\underline{V} \underline{V}^T \underline{M} = \underline{E}$ . Tetszőleges  $\underline{s}$  vektor esetén igaz, hogy

$$\underline{s} = \underline{V} \underline{V}^T \underline{M} \underline{s} = \sum_{r=1}^n \underline{v}_r \underline{v}_r^T \underline{M} \underline{s}$$

Ha nem számolunk az összes sajátvektorral ( $m < n$ ), nem fogjuk pontosan visszakapni az  $\underline{s}$  vektort.

$$\hat{\underline{s}} = \sum_{r=1}^m \underline{v}_r \underline{v}_r^T \underline{M} \underline{s} \neq \underline{s}$$

Az  $\underline{s}$  vektor és az  $\hat{\underline{s}}$  vektor összehasonlítása után dönthetünk arról, hogy elegendő sajátvektort vettünk-e figyelembe a vizsgálatok során.

### 5.5.1. Szabad rezgés

Az ismert összefüggés: 
$$\underline{x}(t) = \sum_{r=1}^n \underline{v}_r \underline{v}_r^T \underline{M} \left( \underline{x}_0 \cos \omega_{0r} t + \frac{1}{\omega_{0r}} \dot{\underline{x}}_0 \sin \omega_{0r} t \right).$$

Az ismertettét eljárást egy adott feladatnál alkalmazhatjuk a  $t=0$  behelyettesítéssel kapható kezdeti elmozdulásokra és a kezdeti sebességekre is:

$$\hat{\underline{x}}_0 = \sum_{r=1}^m \underline{v}_r \underline{v}_r^T \underline{M} \underline{x}_0 \neq \underline{x}_0, \quad \hat{\dot{\underline{x}}}_0 = \sum_{r=1}^m \underline{v}_r \underline{v}_r^T \underline{M} \dot{\underline{x}}_0 \neq \dot{\underline{x}}_0.$$

Az összehasonlításnál tényleges fizikai mennyiségeket hasonlítunk össze, és a sajátvektorok száma akkor elegendő, ha az eltérés nem nagy.

### 5.5.2. Harmonikus erővel való gerjesztés

Legyen a gerjesztő erő  $\underline{q}(t) = \underline{q} \cos \omega t$ . Ekkor az állandósult rezgés:

$$\underline{x}_g(t) = \sum_{r=1}^n \underline{v}_r \underline{v}_r^T \underline{q} \frac{1}{\omega_{0r}^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}\right)^2 + \gamma^2}} \cos(\omega t - \alpha_r).$$

Ez esetben is első kérdés, a  $\hat{\underline{q}} = \sum_{r=1}^m \underline{v}_r \underline{v}_r^T \underline{M} \underline{q} \neq \underline{q}$  összehasonlítás elvégzése, a  $\Delta \underline{q} = \hat{\underline{q}} - \underline{q}$  hibavektor számítása.

Külön vizsgálatot igényel azonban a rezonancia jelenség miatt a harmonikus erővel való gerjesztés.

Ha egy adott gerjesztő frekvenciáról van szó, akkor elvárható, hogy a számított legnagyobb sajátkörfrekvencia kétszeresen meghaladja a gerjesztő frekvenciát. Ekkor a rezonanciatényező már 1,3 körüli értékre csökken, és nem várható, hogy az elhanyagolt - és még nagyobb sajátkörfrekvenciához tartozó - sajátvektorok jelentős szerepet játszanak a megoldásban.

Ha a gerjesztő frekvencia meghaladja a legnagyobb számított sajátkörfrekvenciát, azaz  $\omega > \omega_{0m}$ , akkor nem lehet kizárni egy esetleges rezonanciát. Ekkor  $\omega = \omega_{0r}$  esetén a rezonanciatényező maximális értéke:

$$p = \frac{1}{\gamma}.$$

A tehervektorban számított  $\Delta \underline{q} = \hat{\underline{q}} - \underline{q}$  hibavektort ezzel a  $p$  súlyszámmal megszorozva nagyobb biztonsággal tudunk következtetni a sajátérték-feladat részleges megoldása miatti hibára.

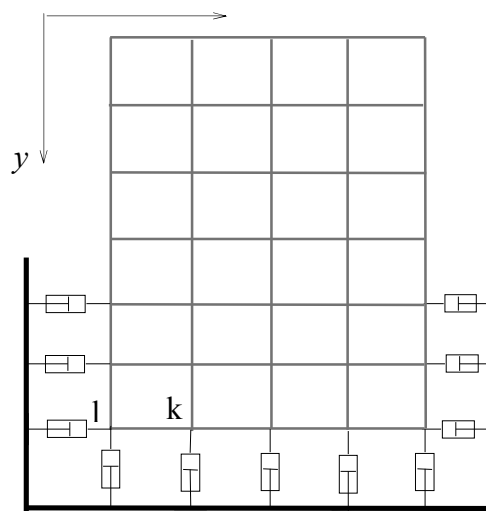
### 5.5.3. Gerjesztés az időtől tetszőlegesen függő erő esetén

Ez esetben levezethető az  $\underline{\underline{M}} = \sum_{r=1}^n \underline{\underline{M}}_r \underline{\underline{v}}_r \underline{\underline{v}}_r^T \underline{\underline{M}} = \sum_{r=1}^n \underline{\underline{M}}_r$  összefüggés, vagyis az  $\underline{\underline{M}}$  mátrix a sajátvektoroknak megfelelő részmatrixok összegeként is előállítható. Ha nem számolunk az összes sajátvektorral ( $m < n$ ), nem fogjuk pontosan visszakapni az  $\underline{\underline{M}}$  mátrixot:

$$\sum_{r=1}^m \underline{\underline{M}}_r = \hat{\underline{\underline{M}}} \neq \underline{\underline{M}}.$$

Az  $\hat{\underline{\underline{M}}}$  mátrixnak az eredeti  $\underline{\underline{M}}$  mátrixtól való eltérése alapján dönthetünk arról, hogy elegendő számú sajátvektort vontunk-e be a számításokba. A különböző szabályzatok foglalkoznak ezzel a kérdéssel.

### 4.3. A szerkezet csillapítatott rezgéseinek mátrix-differenciálegyenlete



Többszabadságfokú rendszerek esetén a feladat mátrix-differenciálegyenlete:

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{C}}\dot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{K}}\underline{x}(t) = \underline{q}(t). \quad (4.18)$$

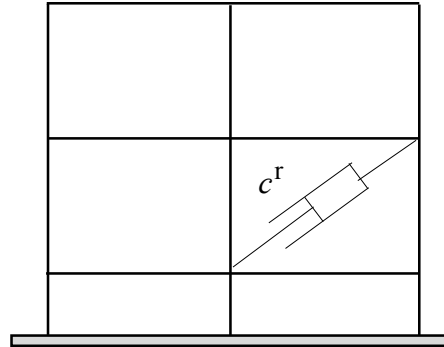
Az egyenletben a csillapítási mátrix az adott modell esetén diagonálmátrix, ahol az egyes csomópontoknak megfelelő helyeken abban az irányban lesz zérustól különböző érték, amelyik irányba a csillapító elemet elhelyeztük. A csillapítási mátrix elemének értékét az adott irányba elhelyezett csillapító elem csillapítási jellemzője adja. A szerkezet csillapítási mátrixa formálisan a merevségi mátrixszal és a tömegmátrixszal azonos méretű, de csak néhány zérustól eltérő elemet találunk a diagonálban.

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \dots & & & & & & & & \\ & c_{lx} & & & & & & & \\ & & c_{ly} & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & & c_{ky} & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \dots & \end{bmatrix}.$$

## Összekötő csillapító elemek

A 4.3-as ábrán egy olyan csillapító elemet látunk, amely két csomópontot köt össze. Ez esetben a csillapító rúd csillapítási mátrixának felépítése azonos egy rácsos tartó rúdja merevségi mátrixának felépítésével.

$$\underline{\underline{C}}_r^\xi = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline c^r & & & -c^r & & \\ \hline & & & & & \\ \hline -c^r & & & c^r & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array}$$



4.3. ábra

A fenti csillapítási mátrix saját koordinátarendszerbeli alakját a korábban megismert módon lehet a globális rendszerbe transzformálni, így:

$$\underline{\underline{C}}_r^x = \begin{array}{|c|c|} \hline \underline{\underline{TC}}_{ii}^{\xi} T^T & \underline{\underline{TC}}_{ij}^{\xi} T^T \\ \hline \underline{\underline{TC}}_{ji}^{\xi} T^T & \underline{\underline{TC}}_{jj}^{\xi} T^T \\ \hline \end{array}$$

## A MÁTRIX-DIFFERENCIÁLEGYENLET DIREKT INTEGRÁLÁSA

Az  $\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{C}}\dot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{K}}\underline{x}(t) = \underline{q}(t)$  mátrix-differenciálegyenlet adott  $\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0 = \underline{v}_0$  kezdeti feltételek melletti megoldása modálanalízissel nem lehetséges.

Az ilyen jellegű feladatok megoldására a mátrix-differenciálegyenlet direkt integrálását szokták alkalmazni. A dinamikai feladatban az  $\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0$  kezdeti feltételek ismertek, míg az  $\ddot{\underline{x}}_0$  vektor az

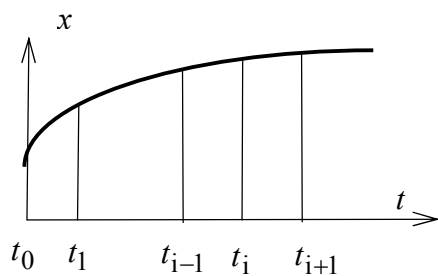
$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{x}}_0 + \underline{\underline{C}}\dot{\underline{x}}_0 + \underline{\underline{K}}\underline{x}_0 = \underline{q}_0$$

egyenletrendszerből számítható. Az eljárás során a kezdeti időpontban ismert kiindulási értékektől elindulva - és  $\Delta t$  lépésközönként haladva - diszkrét időpontokban számítjuk az elmozdulásokat. A feladat végrehajtására számos numerikus eljárást dolgoztak ki.

A numerikus eljárások alapvetően két csoportra oszthatók. Az egyik módszer az ún. explicit eljárás, amelynél a  $t_{i+1}$  időponthoz tartozó elmozdulások a  $t_i$  időpontban felírt dinamikai egyensúlyi egyenletekből számíthatók. A másik, ún. implicit eljárásnál a  $t_{i+1}$  időponthoz tartozó megoldásnak a mátrix-differenciálegyenletet a  $t_{i+1}$  időpontban kell kielégíteni.

Az eljárásoktól elvárjuk, hogy stabilak legyenek (a számításokkal az időben előrehaladva ne legyenek egyre növekvő amplitúdók) és megfelelő pontossággal szolgáltatassák az eredményeket. Az explicit módszer lényegesen egyszerűbb - és diagonál tömegmátrix esetén könnyebben programozható - mint az implicit módszer. Ugyanakkor a  $\Delta t$  integrálási időközt sokkal kisebbre kell felvennünk, mint az implicit módszer alkalmazásánál. Az implicit eljárások alkalmazásakor - bizonyos paraméterek megválasztásával - az eljárás feltétel nélkül (a  $\Delta t$  integrálási időköztől függetlenül) stabil, de a számítási algoritmus bonyolultabb.

### Centrális differenciák módszere



7.1. ábra

Ha az elmozdulások vektora elemeinek függvényét a  $t_{i-1} = (i-1)\Delta t$ ,  $t_i = i\Delta t$  és  $t_{i+1} = (i+1)\Delta t$  időpontokhoz tartozó  $\underline{x}_{i-1}$ ,  $\underline{x}_i$ ,  $\underline{x}_{i+1}$  vektorelemek értékein átmenő másodfokú parabolákkal helyettesítjük, akkor a differenciámódszernek megfelelően:

$$\dot{\underline{x}}_i = \frac{1}{2\Delta t} (\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_{i-1}),$$

$$\ddot{\underline{x}}_i = \frac{1}{(\Delta t)^2} (\underline{x}_{i+1} - 2\underline{x}_i + \underline{x}_{i-1}).$$

A differenciahányadosokat behelyettesítve a mátrix-differenciálegyenletbe a  $t_i = i\Delta t$  időponthoz tartozó dinamikai egyenlet:

$$\frac{1}{(\Delta t)^2} \underline{M} (\underline{x}_{i+1} - 2\underline{x}_i + \underline{x}_{i-1}) + \frac{1}{2\Delta t} \underline{C} (\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_{i-1}) + \underline{K} \underline{x}_i = \underline{q}_i. \quad (7.5)$$

A már ismert  $\underline{x}_i$ -vel és  $\underline{x}_{i-1}$ -gyel szorzott tagokat átvive az egyenlet jobboldalára:

$$\left( \frac{1}{(\Delta t)^2} \underline{M} + \frac{1}{2\Delta t} \underline{C} \right) \underline{x}_{i+1} = \underline{q}_i + \left( \frac{2}{(\Delta t)^2} \underline{M} - \underline{K} \right) \underline{x}_i + \left( \frac{1}{2\Delta t} \underline{C} - \frac{1}{(\Delta t)^2} \underline{M} \right) \underline{x}_{i-1}, \quad (7.6)$$

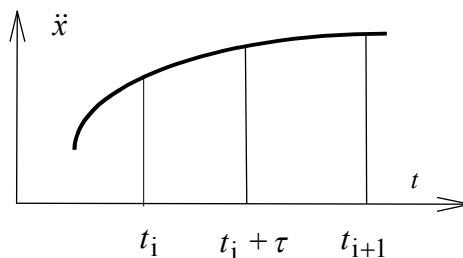
$$\underline{\hat{M}} \underline{x}_{i+1} = \underline{p}_i. \quad (7.7)$$

Érdeemes megfigyelni, hogy a (7.6)-os egyenletrendszer együtthatómátrixa a tömegmátrix és a csillapítási mátrix kombinációja. Különösen egyszerű a számítás, ha a mátrixok diagonálisok és az együtthatómátrix minden eleme különbözik zérustól. Ekkor az  $\underline{x}_{i+1}$  vektor  $j$ -edik eleme a (7.7)-es egyenletből:

$$x_{i+1}^j = \frac{1}{\hat{m}_{jj}} p_i^j. \quad (7.9)$$

A számításokhoz - amelyek során a (7.6)-os egyenlet jobboldalán látható műveletekkel a  $p_1^j$  számítható lesz - nincs szükség a teljes tömegmátrixra, a teljes csillapítási és merevségi mátrixokra, csak az adott mátrixok  $j$ -edik sorára. Többszabadságfokú rendszernél az integrálási lépésköz legfeljebb a legkisebb rezgésidő  $\pi$ -vel osztott értéke lehet. Ez a feltétele az eljárás stabilitásának.

## 7.2. A Newmark eljárás



A  $t_i$  és  $t_{i+1}$  közötti  $t_i + \tau$  időpontban legyen a gyorsulás:

$$\ddot{x}_{t_i + \tau} = \ddot{x}_i + f(\tau)(\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i). \quad (7.13)$$

Az  $f(\tau)$  értéke  $\tau = 0$ -nál zérus, míg  $\tau = \Delta t$ -nél 1.

(Az  $f(\tau)$  változónak az eljárás stabilitásában és pontosságában van szerepe).

A (7.13) segítségével integrálással felírható a sebességvektor és az elmozdulások vektora az  $i+1$ -es időpontra.

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \ddot{x}_i \Delta t + (\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i) \Delta t \alpha = \dot{x}_i + [(1 - \alpha) \ddot{x}_i + \alpha \ddot{x}_{i+1}] \Delta t. \quad (7.15)$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \ddot{x}_i \frac{\Delta t^2}{2} + (\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i) \Delta t^2 \beta = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{x}_i + \beta \ddot{x}_{i+1} \right] \Delta t^2. \quad (7.17)$$

A (7.17)-es egyenlet átrendezhető:  $\ddot{x}_{i+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} [x_{i+1} - x_i - \dot{x}_i \Delta t] - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_i$ .

Ezt behelyettesítve a (7.15)-be:  $\dot{x}_{i+1} = \frac{\alpha}{\beta \Delta t} (x_{i+1} - x_i) + \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \dot{x}_i + \left( 1 - \frac{\alpha}{2\beta} \right) \ddot{x}_i \Delta t$ .

A sebesség és gyorsulásvektorokat behelyettesítve a differenciálegyenletbe

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{M}} \left\{ \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} [x_{i+1} - x_i - \dot{x}_i \Delta t] - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_i \right\} + \\ & + \underline{\underline{C}} \left\{ \frac{\alpha}{\beta \Delta t} (x_{i+1} - x_i) + \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \dot{x}_i + \left( 1 - \frac{\alpha}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{x}_i \right\} + \underline{\underline{K}} x_{i+1} = \underline{\underline{q}}_{i+1}. \end{aligned}$$

Az egyenlet átrendezhető  $\underline{\underline{\hat{K}}} x_{i+1} = \underline{\underline{p}}_{i+1}$  alakra, ahol

$$\underline{\underline{\hat{K}}} = \underline{\underline{K}} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{\underline{M}} + \frac{\alpha}{\beta \Delta t} \underline{\underline{C}} \text{ és}$$

$$\underline{\underline{p}}_{i+1} = \underline{\underline{q}}_{i+1} + \underline{\underline{M}} \left\{ \frac{1}{\beta \Delta t^2} [x_i + \dot{x}_i \Delta t] + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_i \right\} + \underline{\underline{C}} \left\{ \frac{\alpha}{\beta \Delta t} x_i + \left( \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \dot{x}_i + \left( \frac{\alpha}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{x}_i \right\}.$$



*magántanár*

Ennél a módszernél az együtthatómátrix már nem lesz diagonálmátrix. Ugyanakkor megfigyelhető, hogy a numerikus integrálás során az együtthatómátrix nem változik, tehát az egyenletrendszer felbontását csak egyszer kell elvégezni. Az  $\underline{x}_{i+1}$  ismeretében számíthatók lesznek az  $\underline{\ddot{x}}_{i+1}$ ,  $\underline{\dot{x}}_{i+1}$  vektorok, és innen folytatható lesz a számítás.

Az eljárás stabil, ha  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ ,  $\beta \geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \alpha \right)^2$ .

### **A numerikus integrálás pontossága**

A stabilitás biztosítása azonban nem jelenti az eljárás pontosságát is. Különösen így van ez a feltétel nélkül stabil eljárásoknál, ahol a stabilitás nem függ az integrálási lépésköztől.

A modálanalízisnél láttuk, hogy általános esetben a megoldás a sajátrezgésalakokhoz tartozó harmonikus rezgések összegzéseként adódik. Ha egy rezgésalak változását ábrázolni akarjuk, akkor a hozzátartozó periódusidőt legalább tíz részre kell osztani, ahhoz, hogy a rezgés valóban harmonikus legyen.

Ebből a megfontolásból kiindulva azt mondhatjuk, hogy a  $\Delta t$  időlépés a még számításba veendő legmagasabb sajátkörfrekvenciájú rezgés periódusidejének megfelelően, legfeljebb

$$\Delta t = \frac{T_m}{10}$$

lehet.