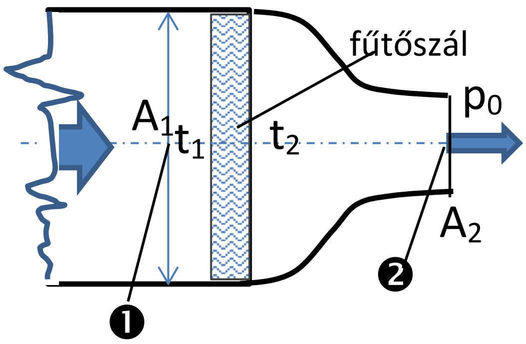
# 4.GYAKORLAT (4. oktatási hét) ÁRAMLÁSTAN BSc

**Téma:** Folytonosság (kontinuitás) tétele (további gyakorlás)

## Folytonosság (kontinuitás) tétele

### PÉLDA (folytonosság tétele)

Egy $A_1$=2m×2m négyzet keresztmetszetű légcsatorna egy konfúzoron keresztül $A_2$=1m×1m keresztmetszetre szűkül. Egy villamos fűtőszál a $t_1$=17°C hőmérsékletű levegőt $t_2$=47°C hőmérsékletűre melegíti fel. A levegő térfogatárama $q_{V,2}=10m^3/s$ állandó. A közeg sűrűségének számításánál mindenhol $p_0$ vehető. **ADATOK**: R=287J/kgK, $p_0=10^5$Pa




**KÉRDÉSEK:** Számítással határozza meg

a) az $A_1$ és $A_2$ keresztmetszetbeli átlagsebességeket,

b) az $A_1$ keresztmetszetbeli térfogatáramot, és

c) az áramló levegő tömegáramát!

---

**MEGOLDÁS** *(a lap túloldalán is folytathatja)*

A légcsatorna áramcsőnek tekinthető, ahol a $q_m$=állandó az áramcső bármely keresztmetszetében.

A folytonosság tétele stacioner esetben: $\rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2$

$\rho_1 \cdot q_{V,1} = \rho_2 \cdot q_{V,2}$

Ahol a térfogatáramok: $q_{V,1} = v_1 \cdot A_1$

$q_{V,2} = v_2 \cdot A_2$

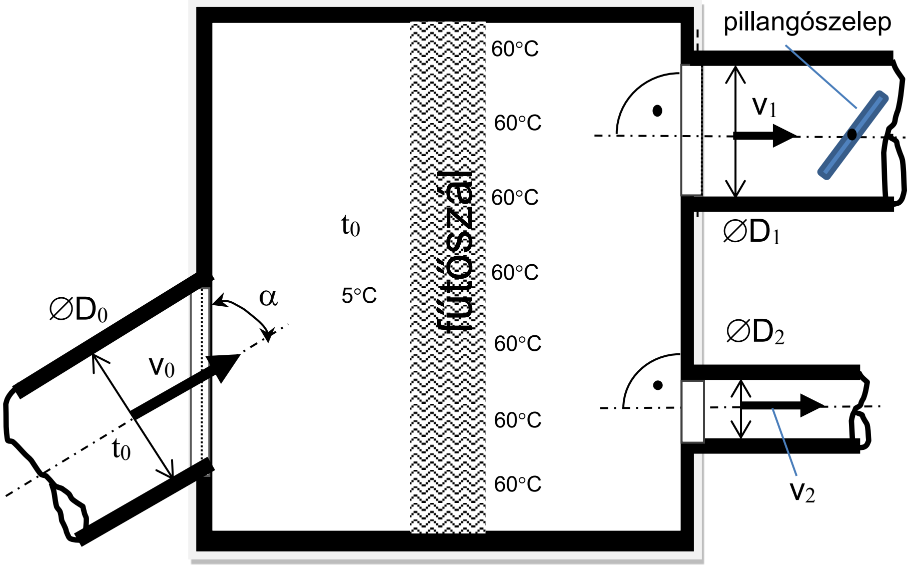
A levegő sűrűsége gáztörvénnyel számítható: $\rho_1 = p_1/(R \cdot T_1) \approx p_0/(R \cdot T_1) = 1{,}20149\ kg/m^3$

$\rho_2 = p_2/(R \cdot T_2) \approx p_0/(R \cdot T_2) = 1{,}08885\ kg/m^3$

A $q_{V,2}$ ismert adat, ebből $v_2$=10m/s, majd a levegő sűrűségek (lásd fent) kiszámítása után $v_1$=2,266m/s ill. $q_{V,1}=9{,}0625m^3/s$ és $q_m$=10,8885kg/s számíthatók.

## PÉLDA (folytonosság tétele)

Egy $\varnothing D_0$=500mm átmérőjű ($\alpha$=60°) betápláló csövön állandó $v_0$=5m/s átlag-sebességgel áramlik be a tartályba a hideg ($t_0$=5°C) levegő, mely a tartálybeli fűtőszálon felmelegedve (60°C) egy $\varnothing D_1$=300mm és egy $\varnothing D_2$=200mm csövön keresztül áramlik ki. A nagyobb ($\varnothing D_1$) csövön állandó $v_1$=10m/s kiáramlási átlagsebességet állítunk be egy pillangószeleppel.




**FELTÉTELEK**: stacioner állapot, a levegő sűrűség számításának szempontjából a nyomásváltozás elhanyagolható: mindenhol $p_0=10^5$Pa értékkel számolhatunk. Levegőre R=287J/(kgK).

**KÉRDÉSEK**: Határozza meg

A) a kisebb ($\varnothing D_2$=200mm) átmérőjű kivezető csőbeli átlagsebességet,
B) a kivezető csövek térfogatáramait!
C) és a tartályba beáramló levegő tömegáramát!

**MEGOLDÁS** *(a lap túloldalán is folytathatja)*

A $q_m$ =állandó az áramcső bármely keresztmetszetében.

A folytonosság tétele stacioner esetben: $\rho_0 \cdot v_0 \cdot A_0 = \rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 + \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2$

Ahol a térfogatáramok:

$q_{V,0} = v_0 \cdot A_0$
$q_{V,1} = v_1 \cdot A_1$
$q_{V,2} = v_2 \cdot A_2$

$\rho_0 \cdot q_{V,0} = \rho_1 \cdot q_{V,1} + \rho_2 \cdot q_{V,2}$

A levegő sűrűsége gáztörvénnyel számítható:

$\rho_0 = p_0/(R \cdot T_0) \approx p_0/(R \cdot T_0)$
$\rho_1 = p_1/(R \cdot T_1) \approx p_0/(R \cdot T_1)$
$\rho_2 = p_2/(R \cdot T_2) \approx p_0/(R \cdot T_2)$

A megoldás az előzőekhez hasonló, de egyre kell figyelni, hogy az $A_0$ beáramlási körkeresztmetszeten a csőtengely irányú $v_0$=5m/s sebesség adott, így $\alpha$ megadása felesleges információ jelen esetben.

## VIZSGAPÉLDA (folytonosság tétele)

Egy nagyteljesítményű radiális ventilátor kör keresztmetszetű ($ØD_{SZ}$=500mm) szívócsövén óránként 10800 $m^3$ mennyiségű, $t_{HIDEG}$=0°C hőmérsékletű hideg levegőt szív be a $p_0$ nyomású szabadból. A ventilátor nyomóoldalára csatlakozó csővezetékben a levegő először egy légkezelő egységen áramlik át, amelyben felmelegszik ($t_{MELEG}$=47°C), majd további hőmérséklet-változás nélkül a meleg levegő N=20db, egymással azonos 500mm×8mm téglalap keresztmetszetű fúvókákon áramlik ki a szabadba úgy, hogy mindegyik fúvókán egymással azonos a kiáramló közeg mennyisége.

**FELTÉTELEK:** Stacioner állapot. A sűrűség számításánál mindenhol $p_0=10^5$Pa vehető. A levegőre R = 287 J/(kg·K) érték vehető. A teljes vezetékszakaszon a résveszteség elhanyagolható.

**KÉRDÉSEK:**

**A)**Számítsa ki a ventilátor szívóoldali keresztmetszetében az átlagsebességet!

**B)**Számítsa ki az egyik fúvóka kilépő keresztmetszetében az átlagsebességet!

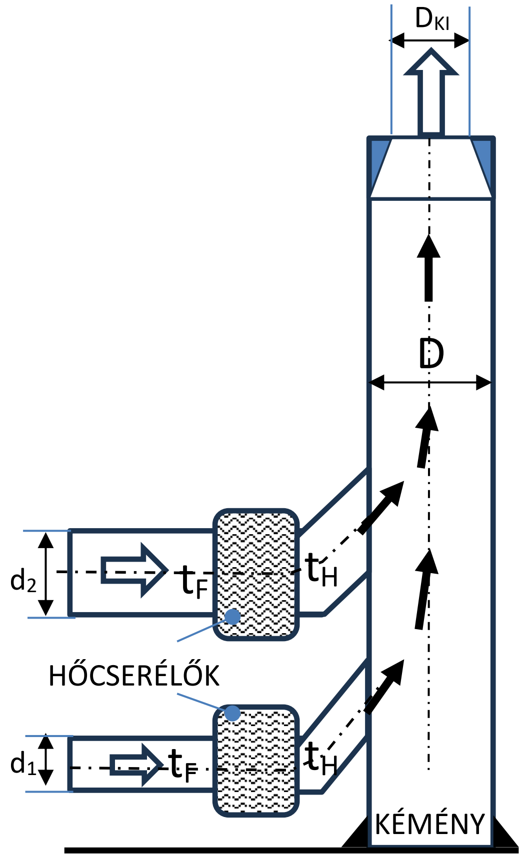
**C)**Számítsa ki a ventilátor által szállított levegő tömegáramát!

## VIZSGAPÉLDA (folytonosság tétele)

A $Ød_1$=800mm ill. $Ød_2$=1000mm belső átmérőjű csövekben áramló $t_F$=140°C füstgáz mennyisége óránként 36000$m^3$ ill. 54000$m^3$ állandó értékű. Egy-egy hőcserélőn átáramolva a gáz $t_H$=60°C-ra lehűl, majd a ØD=1600mm belső átmérőjű kéménybe jut és további hőmérsékletváltozás nélkül annak felső végén lévő konfúzor utáni $ØD_{ki}$=1200mm keresztmetszeten áramlik ki a szabadba. **FELTÉTELEK:** Stacioner állapot. A sűrűség számításánál mindenhol $p_0=10^5$Pa vehető. R=287 J/(kg·K). **KÉRDÉSEK:**

**A)**Számítsa ki a hőcserélő előtti csövekben az átlagsebességeket!

**B)**Számítsa ki a kémény kilépő keresztmetszetében érvényes átlagsebességet, a térfogatáramot és a tömegáramot!




## VIZSGAPÉLDA (folytonosság tétele)

Egy 25$m^3$ belső térfogatú üres olajtartályt egyszerre két csövön töltünk fel állandó $\rho_{olaj}$=800 kg/$m^3$ sűrűségű olajjal: az egyik cső $Ød_1$=25 mm, a másik cső $Ød_2$=50 mm belső átmérőjű. Az egyik csőben $v_1$=6 m/s, a másikban $v_2$=2 m/s állandó értékű az olaj átlagsebessége. A feltöltést azonos időpillanatban kezdtük el mindkét csővel.

**FELTÉTELEK:** Stacioner állapot.

**KÉRDÉSEK**:

**A)**Mekkora az egyes csöveken a tartályba áramló olaj térfogat- és tömegárama?

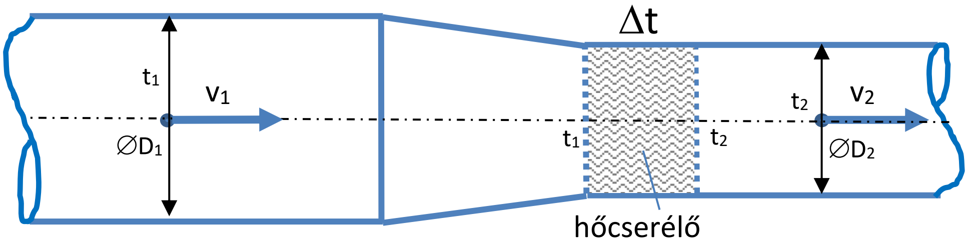
**B)**Mekkora a tartály teljes feltöltéséhez szükséges idő?

**C)**Mennyi időre lenne szükség a tartály teljes feltöltéséhez, ha vagy külön csak az egyik, vagy külön csak a másik csövet használhatnánk?

## VIZSGAPÉLDA (folytonosság tétele)

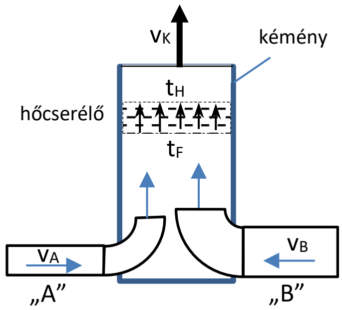
Egy előadóterembe 16db azonos $A_{BE}$=0,25m$^2$ nyíláson keresztül vezetünk be 20˚C levegőt (R=287J·kg$^{-1}$·K$^{-1}$). 10db nyílás esetén 2m/s, a többin 1m/s az átlagsebesség. Az üvegtető (napsugárzás) miatt a levegő teljes elkeveredés közben felmelegszik, ezért 40˚C hőmérsékletű meleg levegőt szívunk el 20db, azonos $A_{KI}$ keresztmetszetű mennyezeti elszívónyíláson, mindegyiken 2m/s átlagsebességgel.
**FELTÉTELEK:** Stacioner állapot. A terem a be- és kiáramlási keresztmetszeteken kívül zárt. A nyomásváltozás a sűrűségszámítás szempontjából elhanyagolható, a környezeti nyomás mindenhol 1bar értékűnek vehető.
**KÉRDÉSEK**: **A)**Mekkora a terembe összesen bevezetett levegő térfogat- és tömegárama?
**B)**Mekkora egyik $A_{KI}$ kilépő keresztmetszet mérete és az ezen átáramló levegő térfogat- és tömegárama?

## VIZSGAPÉLDA (folytonosság tétele)




A $\varnothing D_1$=4000mm átmérőjű csőben $t_1$=200°C hőmérsékletű forró füstgáz (*R*=287 J/(kg·K)) áramlik állandó 108000 m$^3$/h térfogatárammal. A konfúzor utáni hőcserélőn áthaladva a füstgáz $t_2$=100°C hőmérsékletre hűl le, majd a $\varnothing D_2$=3000mm csőszakaszon áramlik tovább. A csőben a statikus nyomás a sűrűségszámítás szempontjából mindenhol p=1,2bar állandó értékűnek vehető.
**KÉRDÉSEK**: Számítsa ki az „1” és a „2” keresztmetszetekben az átlagsebességet, a térfogatáramokat, illetve az áramló közeg tömegáramát!

## VIZSGAPÉLDA (folytonosság tétele)




Egy $\varnothing D_{KÉMÉNY}$=3m állandó átmérőjű erőművi kéménybe az „A” jelű $A_A$=7m$^2$ keresztmetszetű és a „B” jelű $A_B$=11m$^2$ keresztmetszetű légcsatornából áramlik be azonos $t_{FORRÓ}$=? ismeretlen hőmérsékletű forró füstgáz (R=287J·kg$^{-1}$·K$^{-1}$). Az „A” és „B” légcsatornákban a füstgáz átlagsebessége megegyezik: $v_A$=$v_B$=12m/s. A forró füstgáz kéményben lévő hőcserélőn áthaladva lehűl $t_{HIDEG}$=60˚C hőmérsékletűre, és a kémény kilépő keresztmetszetén $v_K$=22m/s átlagsebességgel áramlik ki a szabadba. A nyomásváltozás a sűrűségszámítás szempontjából elhanyagolható, mindenhol $p_0$=1bar értékűnek vehető. ($p_A$=$p_B$=$p_K$=$p_0$)

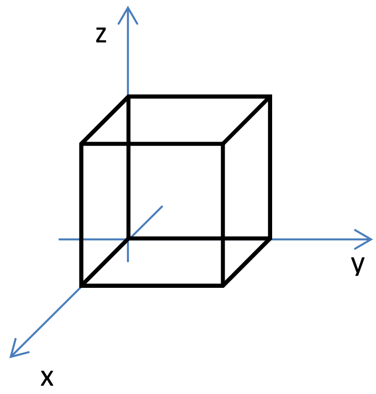
**ADATOK**: $A_A$= 7m$^2$ $t_A$ = $t_{FORRÓ}$ = ? $A_B$= 11m$^2$ $t_B$= $t_{FORRÓ}$ = ?
$D_{KÉMÉNY}$= 3m $t_{HIDEG}$ = $t_{KÉMÉNY\text{-}KI}$ = 60 °C

**KÉRDÉS**: Határozza meg a forró füstgáz hőmérsékletét, az „A” és „B” jelű csatornákban a térfogatáramot és tömegáramot, és a kéményen kiáramló füstgáz tömegáramát!

## VIZSGAPÉLDA (folytonosság tétele)

Egy nagy üzemcsarnokba összesen 8db, egyenként 1m$^2$ keresztmetszetű légcsatornán keresztül vezetünk be 15˚C hőmérsékletű levegőt (R=287J·kg$^{-1}$·K$^{-1}$). A nyolc légcsatorna közül négyben 6m/s, négyben pedig 3m/s az áramló levegő átlagsebessége. Az üzemcsarnokban a befújt hideg levegő teljes elkeveredés után, a csarnokon áthaladva felmelegszik 47˚C hőmérsékletűre. Ezt a meleg levegőt az üzemcsarnokból egyetlen, állandó keresztmetszetű kéményen vezetjük el. A kémény kilépő keresztmetszetén 20m/s az előírt átlagsebesség. **FELTÉTELEK:** Az üzemcsarnok a fentieken kívül zárt, egyéb helyen se be, se ki nem áramlik levegő. A nyomásváltozás a sűrűségszámítás szempontjából elhanyagolható, mindenhol 1bar értékűnek vehető.
**KÉRDÉS**: Mekkora a csarnokba összesen bevezetett levegő térfogat- és tömegárama, a kémény kilépő keresztmetszetének nagysága és a kéményen kiáramló levegő térfogat- és tömegárama?

## PÉLDA (folytonosság tétele, EXTRA)




Egy ρ=1000kg/m³ sűrűségű, inkompresszibilis, stacioner folyadéktérben egy, a mellékelt ábrán látható, térben rögzített, 100mm élhosszúságú, kocka alakú V térrész $\underline{v}(\underline{r},t)$ sebességterére az alábbiak ismeretesek:

*a) az áramlási sebesség x komponense 2m/s értékkel csökken x irányban méterenként;*

*b) az áramlási sebesség y komponense 3m/s értékkel csökken y irányban méterenként;*

*c) semelyik sebességkomponens nem változik saját irányától különböző irányban.*

**KÉRDÉSEK**:

A) Számítsa ki a *P*(x=0,05m;y=0,05m;z=0,05m) pontban, tehát a kocka középpontjában a lokális gyorsulás vektor komponenseit!

B) Számítsa ki a sebességtér divergenciáját!

C) Határozza meg a kocka teljes A határoló felületére, hogy mekkora a z irányú többlet tömegkiáramlás másodpercenkénti értéke!

---

**MEGOLDÁS (részletes)**

**A.)**Mivel az áramlás **stacioner**, az $\underline{a}_{lok}$ lokális gyorsulás vektor (és annak mindhárom komponense is) **zérus** a vizsgált térben, így P pontban is.

$$\underline{a}_{lok} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = 0; \quad \text{komponensek:} \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0; \ \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0; \ \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0;$$

**B.)**Az alábbi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \underline{v}) = 0$$

alakú folytonosság tétel **összenyomhatatlan** közegre vonatkozó egyszerűbb

$$div(\underline{v}) = 0$$

alakja értelmében a sebességtér **divergenciája zérus**.

**C.)**A válaszhoz tudnunk kell, hogy mekkora a $v_z$ sebességkomponens megváltozása a kiskocka alsó illetve felső felületei között. Ezt a folytonosság tétel fenti div$\underline{v}$=0 alapján a

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

alakból kaphatjuk, mivel itt az első két (x és y sebességkomponensek saját irányuk szerinti megváltozásait kifejező) tag ismertek:

$$-2\frac{\frac{m}{s}}{m} - 3\frac{\frac{m}{s}}{m} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Ebből megkapjuk a $v_z$ sebességkomponens saját (z) irányában történő megváltozásának értékét:

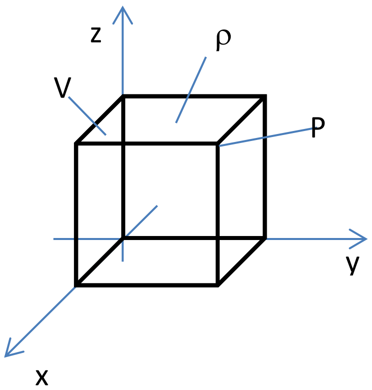
$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 5\frac{\frac{m}{s}}{m} = 5\frac{1}{s}$$

Ha a vizsgált térben a $v_z$ komponens 5m/s értékkel nő z irányban méterenként haladva mindenhol, akkor a 100mm élhosszúságú folyadékkocka $A_{z,BE}=A_{z,KI}$=dx·dy=0,1m·0,1m=0,01m² azonos nagyságú alsó ill. felső, azaz belépő ill. kilépő négyzet $A_z$ keresztmetszetek között (dz=0,1m) távolságon $\Delta v_z=\frac{\partial v_z}{\partial z}dz$ =0,5m/s értékkel változik, tehát a $v_z$ sebességkomponens 0,5m/s értékkel nagyobb sebességgel áramlik ki, mint be. A kérdéses z irányú többlet tömegkiáramlás másodpercenkénti értéke pedig a z irányú be- és kiáramlás $q_m$ tömegáramainak a különbsége:

$\Delta q_{m,z}= q_{m,z,KI} - q_{m,z,BE} = \rho \cdot v_{z,KI} \cdot A_{z,KI} - \rho \cdot v_{z,BE} \cdot A_{z,BE} = \rho \cdot \Delta v_z \cdot A_z =$**1000**kg/m³·**0,5**m/s·**0,01**m²=**5**kg/s

**Tehát *z* irányban a többlet tömegkiáramlás másodpercenkénti értéke 5kg/s.**

## PÉLDA (folytonosság tétele, EXTRA)




Egy folyadékban felvett, a mellékelt ábrán látható, térben rögzített, dx=dy=dz=100mm élhosszúságú, kocka alakú V térrészre az alábbiak ismeretesek:

I.) Inkompresszibilis folyadék, $\rho$=1000kg/m$^3$.
II.) Stacioner állapot.
III.) Egyik sebességkomponens sem változik saját irányától különböző irányban.
IV.) Az x irányú többlet tömegkiáramlás 10kg másodpercenként.
V.) Az áramlási sebesség y komponense 5m/s értékkel csökken saját irányában méterenként.
VI.) Az áramlási sebesség z komponense 5m/s értékkel csökken saját irányában méterenként.

**KÉRDÉSEK**:

A) Mekkora a lokális gyorsulás vektor x komponense a kocka egyik P csúcspontjában? 0
B) Számítsa ki a sebességtér divergenciáját! div$\underline{v}$=0
C) Mekkorák az y és z irányú többlet tömegkiáramlások másodpercenkénti értékei? -5kg/s, -5kg/s

**MEGOLDÁS**

**A.)**

Mivel az áramlás **stacioner**, az $\underline{a}_{lok}$ lokális gyorsulás vektor (és annak mindhárom komponense is) **zérus** a vizsgált térben, így P pontban is.

$$\underline{a}_{lok} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = 0; \quad \text{az x komponense is:} \quad a_{lok,x} = \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$$

**B.)**

Az alábbi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \underline{v}) = 0$$

alakú folytonosság tétel **összenyomhatatlan** közegre vonatkozó egyszerűbb

$$div(\underline{v}) = 0$$

alakja értelmében a sebességtér **divergenciája zérus**.

**C.)**

Ha a IV állítás szerint *x* irányban a többlet tömegkiáramlás másodpercenkénti értéke 10kg/s és az V. és VI. állítás szerint y és z irányban azonos a sebességváltozás méterenkénti mértéke, akkor inkompresszibilis közegben ez azt jelenti, hogy x irányon kívüli többi (y és z) irányokban összesen ugyanennyi többlet beáramlás (=negatív többet kiáramlás) szükséges. Azaz y és z irányokban külön-külön ennek a 10kg/s –nak a fele-fele mennyiségű többlet tömegbeáramlások szükségesek: egymással azonos, -5kg/s és -5kg/s értékű (negatív) többlet tömegkiáramlásnak, azaz y irányban 5kg/s és z irányban is 5 kg/s többlet tömegbeáramlásoknak kell létrejönnie.

**Egyebek:**

Az V és VI állítás szerint: A folytonosság tétel fenti div$\underline{\mathbf{v}}$=0 alapján a $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ alak szerint az y és z sebességkomponensek saját irányuk szerinti megváltozásait kifejező tagok ismertek $\frac{\partial v_x}{\partial x} - 5\frac{\frac{m}{s}}{m} - 5\frac{\frac{m}{s}}{m} = 0.$ Ebből megkapjuk a $v_x$ sebességkomponens saját (x) irányában történő megváltozásának értékét: $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 10\frac{\frac{m}{s}}{m} = 10\frac{1}{s}.$

Ez a IV állításból is megkaphatjuk: A 10kg/s-os x irányú többlet tömegkiáramlás másodpercenkénti értéke az x irányú be- és kiáramlás $q_{m,x}$ tömegáramainak a különbsége: $\Delta q_{m,x} = q_{m,x,KI} - q_{m,x,BE} = \rho \cdot v_{x,KI} \cdot A_{x,KI} - \rho \cdot v_{x,BE} \cdot A_{x,BE} = \rho \cdot \Delta v_x \cdot A_x =$**1000**kg/m$^3 \cdot \Delta v_x \cdot$**0,01**m$^2$=**10**kg/s.

Ebből: $\Delta v_x$=1m/s (0,1 méteren a sebességkomponens megváltozása), tehát 10-szeresét növekedik 1 méteren: $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 10\frac{\frac{m}{s}}{m} = 10\frac{1}{s}$. (De nem ez volt a kérdés.)