

1.fak.ZH

A

Név:..... NEPTUN kód:.....

Alapszak:.....**MEGOLDÁS**.....

Aláírás:.....ÜLŐHELY sorszám: KM34/.....

PONTSZÁM:

**1.FELADAT (ELMÉLET, max.5pont = 5 × 1pont. Csak a tökéletesen jó válasz ér 1 pontot)**

1.1) Karikázza be (jelölje egyértelműen) az összes helyes megállapítás betűjelét!

- A) Az ideális közeg inkompresszibilis, míg a valós közeg összenyomható.
- B) A valós közeg sűrűdéses, míg az ideális közeg sűrűdésmentes.
- C) Az ideális közeg homogén és kontinuum, míg a valós közeg molekuláris szerkezetű és inhomogén.
- D) A valós közeg instacioner, míg az ideális közeg stacioner.
- E) Az ideális közeg folytonos, míg a valós közeg kontinuum.

1.2) Karikázza be (jelölje egyértelműen) az összes helyes válasz betűjelét! Egy elemi folyadék rész teljes gyorsulása ( $\underline{a}_{teljes}$ ) az alábbi összefüggéssel írható fel:

- A)  $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$       B)  $\frac{\partial \underline{v}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t}$       C)  $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{D} \underline{v}$       D)  $\frac{d \underline{v}}{dt}$       E)  $\frac{\partial \underline{v}}{\partial r}$

1.3) Karikázza be (jelölje egyértelműen) az összes helyes válasz betűjelét! A kontinuitás tételének általános alakja az alábbi:

- A)  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \underline{v} = 0$       B)  $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0$       C)  $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{div}(\underline{v}) = 0$       D)  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0$       E)  $\frac{d \rho}{dt} = 0$

1.4) Karikázza be (jelölje egyértelműen) az összes helyes válasz betűjelét! Az Euler-egyenlet levezetése során használt egyetlen feltétel az alábbi:

- A)  $\rho = \text{állandó}$       B)  $\rho \neq \text{állandó}$       C)  $\mu = \text{állandó}$       D)  $\mu \neq \text{állandó}$       E)  $\mu = 0$

1.5) Karikázza be (jelölje egyértelműen) az összes helyes válasz betűjelét! A hidrosztatika alapegyenletének helyes alakja az alábbi:

- A)  $\frac{p}{\rho} = \text{állandó}$       B)  $\underline{\rho g} = \text{grad} p$       C)  $\underline{g} = -\text{grad} U$       D)  $\underline{g} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p$       E)  $\frac{p}{g} = \text{állandó}$

**2.FELADAT**

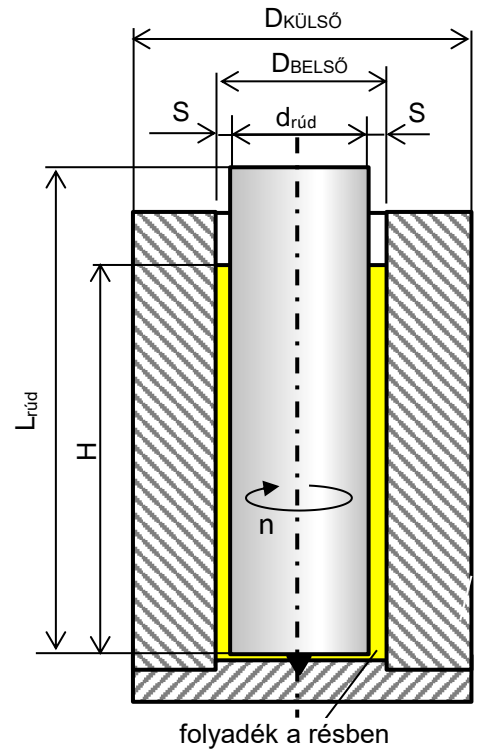
**(15pont)**

Folyadékok ismeretlen viszkozitását határozhatjuk meg úgy, hogy folyadékban forgatunk rudat és a rést kitöltő folyadékban ébredő súrlódás miatti veszteségnomatékokat mérjük. A henger belső fala és a forgó rúd közötti  $S=0,05\text{mm}$  vékony rést ismert sűrűségű ( $\rho=1260\text{kg/m}^3$ ) de ismeretlen viszkozitású newtoni folyadék tölti ki. A  $\varnothing d_{\text{rúd}}=10\text{mm}$  átmérőjű és  $L_{\text{rúd}}=70\text{mm}$  hosszú rudat állandó  $n=1910$  fordulat/perc fordulatszámmal forgatjuk. A tartályban ( $\varnothing D_{\text{BELSŐ}}=10,1\text{mm}$ ,  $\varnothing D_{\text{KÜLSŐ}}=30\text{mm}$ ) a folyadék szintje  $H=50\text{mm}$ . A mért veszteségnomaték ekkor  $M_{\text{veszt}}=0,238\text{Nm}$  értékű.

**FELTÉTELEK:** koncentrikus tengelyek; állandó résméret; résben lineáris sebességprofil; newtoni folyadék; a folyadék sűrűsége és viszkozitása egy mérés során állandónak vehető; a rúd súlytalanak tekinthető; a rúd alatti résben ébredő súrlódási veszteség elhanyagolható.

**KÉRDÉSEK:**

- A) Számítsa ki a folyadék dinamikai viszkozitását!
- B) Számítsa ki a résben ébredő csúsztatófeszültség és a súrlódási veszteségteljesítmény értékét!
- C) Ha túl sokáig mérünk, akkor a folyadék felmelegszik. Nagyobb vagy kisebb lesz a mért  $M_{\text{veszt}}$  veszteségnomaték? (A többi paramétert tekintse állandónak.) Válaszát indokolja!
- D) Hogyan változik a  $M_{\text{veszt}}$  veszteségnomaték, ha fele ekkora fordulatszámmal forgatjuk a rudat? (A többi paramétert tekintse állandónak.) Válaszát indokolja!



**MEGOLDÁS** (A lap túloldalán is folytathatja a megoldást)

**A) A résbeli folyadék súrlódási veszteségnomatékára mért érték ismert:**

$$M_{\text{veszt}} = F_{\text{veszt}} \cdot R_{\text{közép}} = 0,238 \text{ Nm}$$

Ismert a rés középsugara:

$$R_{\text{közép}} = \frac{d_{\text{rúd}} + S}{2} = \frac{10\text{mm} + 0,05\text{mm}}{2} = \frac{0,01005 \text{ m}}{2} = 0,005025 \text{ m}$$

Ezzel kapjuk a súrlódási veszteségek okozta kerületi erőt:

$$F_{\text{veszt}} = \frac{M_{\text{veszt}}}{R_{\text{közép}}} = \frac{0,238 \text{ Nm}}{0,005025 \text{ m}} = 47,36318 \text{ N}$$

A kerületi erő a csúsztatófeszültség és a résbeli nyírt folyadék középs henger palástjának a szorzata:

$$F_{\text{veszt}} = \tau \cdot A_{\text{középpalást}} = 47,36318 \text{ N}$$

A résben a nyírt folyadék középpalást felülete egy hengerfelület:

$$A_{\text{középpalást}} = (2 \cdot R_{\text{közép}} \cdot \pi) \cdot H = 0,00157865031 \text{ m}^2$$

Ezzel kapjuk a csúsztatófeszültséget:

$$\tau = \frac{F_{\text{veszt}}}{A_{\text{középpalást}}} = \frac{47,36318 \text{ N}}{0,00157865031 \text{ m}^2} = 30002,33 \text{ Pa}$$

A csúsztatófeszültség:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial v_{\text{ker}}}{\partial r} = \mu \cdot \frac{r_{\text{rúd}} \cdot \omega}{S} = \mu \cdot \frac{r_{\text{rúd}} \cdot 2\pi n}{S}$$

A keresett dinamikai viszkozitás ezzel:

$$\mu = \frac{\tau \cdot S}{r_{\text{rúd}} \cdot 2\pi n} = \frac{30002,33 \cdot 0,00005}{0,005 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1910/60} = 1,5 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

**B) A csúsztatófeszültség:** lásd A) kérdésben kiszámoltuk. A súrlódási veszteségteljesítmény pedig:

$$P_{\text{veszt}} = M_{\text{veszt}} \cdot \omega = M_{\text{veszt}} \cdot (2\pi n) = 0,238 \text{ Nm} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1910}{60} = 47,6035 \text{ W}$$

**C) A veszteségnomaték kisebb lesz,** mivel cseppfolyós közeg viszkozitása a hőmérséklet emelkedésével csökken.

**D) A felére csökken,** mivel a nyomaték és a fordulatszám egyenesen arányos  $M_{\text{veszt}} \sim n$ .

*Megjegyzés: a megoldásban közölt sok tizedesjegyű eredménykijelzés helyett kerekítés szükséges, itt csak az ellenőrzést szolgálja.*

### 3.FELADAT

(15pont)

Egy hőcserélőt tartalmazó függőleges füstgázvezeték  $\varnothing D_1=2500\text{mm}$  átmérőről  $\varnothing D_2=3500\text{mm}$  átmérőre bővül. A füstgáz a hőcserélő előtt  $t_1=140^\circ\text{C}$ , utána  $t_2=70^\circ\text{C}$  hőmérsékletű. A hőcserélő utáni diffúzorban lévő  $\varnothing D_{\text{MINTA}}=300\text{mm}$  gázmintavevő csövön keresztül állandó  $q_{m,\text{MINTA}}=5400\text{kg/h}$  mennyiségű füstgázminta áramlik ki folyamatosan. A füstgázvezeték alsó („1”) és felső („2”) keresztmetszetein a sebességprofil ismert  $n=2$  (másodfokú) forgáspároloid alakúnak tekinthető és ismert a „2” keresztmetszeti csőtengelyben a maximális áramlási sebesség értéke:  $v_{2,\text{max}}=15\text{m/s}$ .

**FELTÉTELEK:** stacioner áramlás; túlnyomásos rendszer: a csőben a sűrűségszámítás szempontjából a nyomás mindenhol  $p=1,1\text{bar}$  állandó értékűnek vehető.

**ADATOK:** A füstgázra  $R=287\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  érték vehető.

Jel:	„1”	„2”	„MINTA”	Mértékegység
$\varnothing D$	2500	3500	300	mm
t	140	70	70	$^\circ\text{C}$
p	1,1	1,1	1,1	bar

**KÉRDÉSEK:** Határozza meg, a füstgázvezeték „1” és „2” csőkeresztmetszeteiben az átlagsebességeket, a térfogatáramokat és a tömegáramokat!

**MEGOLDÁS** (A lap túloldalán is folytathatja a megoldást)

A folytonosság tételét kell alkalmaznunk változó sűrűségű közeg stacioner áramlására:

$$q_{m,BE} = q_{m,KI}$$

A mellékelt ábra szerint az „1” keresztmetszeten beáramló közeg a mintavevő csövön és a „2” keresztmetszeteiken áramlik ki. Ez egy áramcső, más be- vagy kiáramlás nincs.

$$q_{m,1} = q_{m,\text{MINTA}} + q_{m,2}$$

azaz

$$\rho_1 \bar{v}_1 A_1 = q_{m,\text{MINTA}} + \rho_2 \bar{v}_2 A_2$$

Felhasználjuk az ismert geometriai és egyéb adatok alapján, hogy

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R \cdot T_1} = 0,92803\text{kg}/\text{m}^3; \rho_2 = \frac{p_2}{R \cdot T_2} = 1,11742\text{kg}/\text{m}^3; A_1 = \frac{D_1^2 \pi}{4} = 4,9087\text{m}^2; A_2 = \frac{D_2^2 \pi}{4} = 9,6211\text{m}^2;$$

Ismert a mintavevő csövön elvett tömegáram:

$$q_{m,\text{MINTA}} = 5400\text{kg}/\text{h} = 1,5\text{kg}/\text{s}$$

Valamint ismert a 2. pontban a sebességprofilra megadottak alapján az ottani átlagsebesség:

$$\bar{v}_2 = v_{2,\text{max}} \frac{n}{n+2} = 15 \frac{2}{2+2} = 7,5\text{m}/\text{s}$$

A „2” keresztmetszetben a tömegáram ezzel kiszámítható:

$$q_{m,2} = \rho_2 \bar{v}_2 A_2 = 80,6313\text{kg}/\text{s}$$

Az egyetlen ismeretlen a folytonosság tételében így az „1” keresztmetszetbeli átlagsebesség, melyre kapjuk:

$$\bar{v}_1 = \frac{q_{m,\text{MINTA}} + q_{m,2}}{\rho_1 A_1} = 18,03\text{m}/\text{s}$$

Az „1” és „2” keresztmetszetbeli térfogatáramok ezzel már számíthatók:

$$q_{V,1} = \bar{v}_1 A_1 = 88,5010\text{m}^3/\text{s}$$

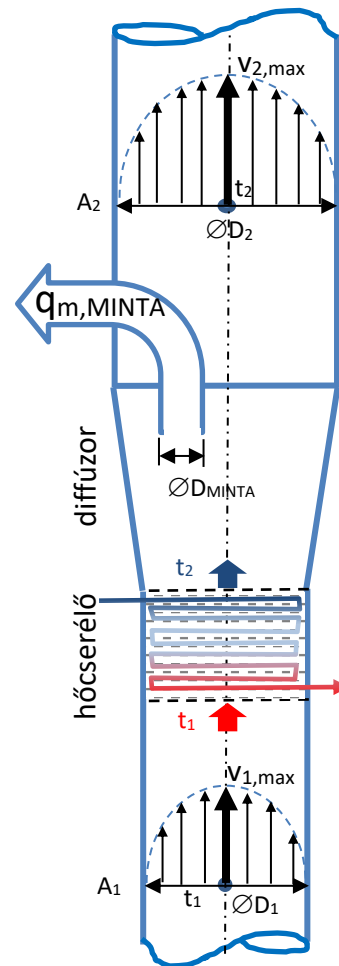
$$q_{V,2} = \bar{v}_2 A_2 = 72,1585\text{m}^3/\text{s}$$

Az „1” és „2” keresztmetszetbeli tömegáramok ezzel már számíthatók:

$$q_{m,1} = \rho_1 \bar{v}_1 A_1 = 82,1313\text{kg}/\text{s}$$

$$q_{m,2} = \rho_2 \bar{v}_2 A_2 = 80,6313\text{kg}/\text{s}$$

*Megjegyzés: a megoldásban közölt sok tizedesjegyű eredménykijelzés helyett kerekítés szükséges, itt csak az ellenőrzést szolgálja.*



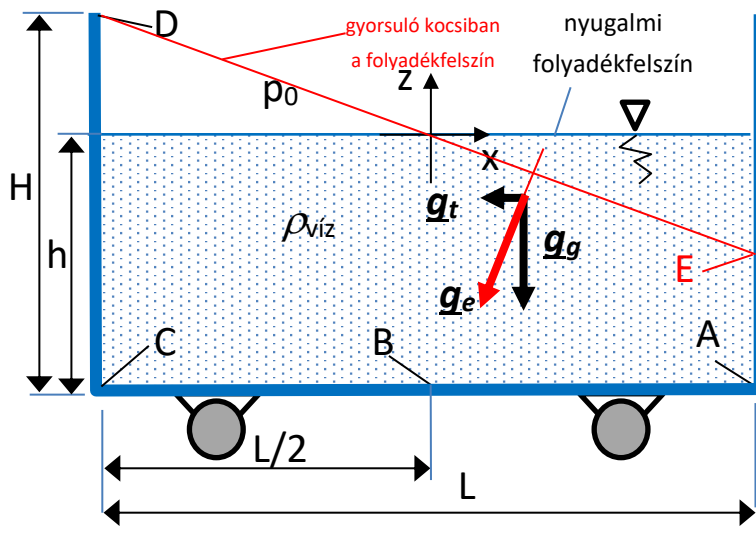
**4.FELADAT (10pont)**

Egy  $L=3\text{m}$  hosszú,  $H=1,6\text{m}$  magas, felül nyitott tartálykocsit  $h=1\text{m}$  magasságig vízzel tölttünk fel. A nyugalmi folyadékfelszín vízszintes, lásd ábra.

**ADATOK:**  $g_g=10\text{N/kg}$ ;  $p_0=10^5\text{Pa}$ ;  $\rho_{\text{víz}}=10^3\text{kg/m}^3$

**KÉRDÉSEK:**

- 1) Mekkora gyorsulással kell mozgatni a kocsit vízszintesen  $x$  irányban, hogy a gyorsuló kocsiban a folyadékfelszín pont elérje a „D” pontot?
- 2) Rajzolja be az gyorsuló folyadékfelszín alakját és a nyomásgradiens vektort az ábrába! Mekkora és hol van a legnagyobb túlnyomás a tartályban?
- 3) Számítsa ki ekkor az „A” pontbeli túlnyomást!
- 4) Számítsa ki ekkor a „B” pontbeli nyomást!



**MEGOLDÁS** (A lap túloldalán is folytathatja a megoldást)

1) Gyorsuló rendszerhez rögzített  $(x, z)$  koordináta-rendszerben felírva a hidrosztatika alapegyenletét bármely két, azonos sűrűségű folyadék-pont között kapjuk:

$$p_1 + \rho U_{e,1} = p_2 + \rho U_{e,2}$$

Itt a nehézségi és a tehetetlenségi erőter potenciálja adja az  $U_e$  eredő potenciált.  $U_e=0$  értékű az  $(x=0\text{m}; z=0\text{m})$  pontban.

$$U_e = U_g + U_t = g_g \cdot z + a_x \cdot x$$

Súrlódásmentes esetben a folyadékfelszín  $(0,0)$  pont körül „fordul el” az adott  $a_x$  gyorsulás esetén úgy, hogy a vízfelszín a tartály baloldalán „D” pontig felemelkedik  $z_D = \Delta z = H - h = 0,6\text{m}$ -t, a jobboldalán pedig ugyanennyit lesüllyed a bejelölt 'E' pontig:  $z_E = -0,6\text{m}$ . A vízfelszín egyben szintvonal is: azaz  $p = \text{állandó}$  (izobár), vagy  $U_e = \text{állandó}$  szintvonal (ekvipotenciál). Legyen az „1” pont az  $(x, z)$  koordináta-rendszer origója és „2” pont a „D” pont, akkor a

$$p_1 + \rho U_{e,1} = p_2 + \rho U_{e,2}$$

alakú hidrosztatika alapegyenletből kapjuk:

$$p_0 + \rho(g_g \cdot z_1 + a_x \cdot x_1) = p_0 + \rho(g_g \cdot z_2 + a_x \cdot x_2)$$

Mivel az origóban  $(x_1=0\text{m}; z_1=0\text{m})$  pontban az eredő potenciál  $U_{e,1}=0$ , így a vízfelszínen a D  $(-1,5\text{m}; 0,6\text{m})$  pontban az alábbi egyenletet kapjuk, mely alkalmas a keresett gyorsulás meghatározására:

$$0 = g_g \cdot z_2 + a_x \cdot x_2$$

A keresett gyorsulás:

$$a_x = -g_g \frac{z_2}{x_2} = -10 \frac{0,6}{-1,5} = 4 \text{ m/s}^2$$

A folyadékfelszín egyenlete is így kapható a fentiek alapján:

$$0 = g_g \cdot z + a_x \cdot x$$

azaz:

$$z = -\frac{a_x}{g_g} x = -\frac{4}{10} x$$

2) Lásd ábra. A két erőter  $g_e = g_g + g_t$  eredő térerősségvektorával párhuzamos a gradp vektor, a vízfelszínre merőleges. A gyorsuló tartályban a legnagyobb túlnyomás a vízfelszín  $p_0 = \text{áll}$  nyomású vízfelszínétől merőlegesen gradp irányában haladva a legtávolabbi folyadék-pontban van, azaz a „C” pontban. A „C” pontbeli túlnyomás értéke akármelyik  $p_0$  nyomású vízfelszín ponthoz képest megkapható, de célszerű (legegyszerűbb) egy  $z$  irányban „felette” lévő, például az „D” ponthoz számolni, mert akkor csak az egyik ( $g_g$ ) erőter irányában „mozdulunk el”, és csak a nehézségi erőterből adódik a nyomáskülönbség, mert a ( $g_t$ ) tehetetlenségi erőterre C és D között merőlegesen mozdulunk el ( $x_D = x_C$ ).

$$(p_C - p_0) = \rho (g_g \cdot (z_D - z_C) + a_x \cdot (x_D - x_C)) = \rho \cdot g_g \cdot (z_D - z_C) = 1000 \cdot 10 \cdot (0,6 - (-1))$$

$$(p_C - p_0) = 1000 \cdot 10 \cdot (0,6 - (-1)) = 1000 \cdot 10 \cdot 1,6 = 16000\text{Pa}$$

3) Fentivel analóg módon az „A” pontbeli túlnyomás (= a felette lévő vízoszlop nyomásával):

$$(p_A - p_0) = \rho \cdot g_g \cdot (z_E - z_A) = 1000 \cdot 10 \cdot (-0,6 - (-1)) = 1000 \cdot 10 \cdot 0,4 = 4000\text{Pa}$$

4) Fentivel analóg módon a „B” pontbeli nyomás (=  $p_0$  + a felette lévő vízoszlop nyomásával):

$$p_B = p_0 + \rho \cdot g_g \cdot (z_0 - z_B) = 100000 + 1000 \cdot 10 \cdot (0 - (-1)) = 100000 + 1000 \cdot 10 \cdot 1 = 110000\text{Pa}$$