3.GYAKORLAT (6. oktatási hét) ÁRAMLÁSTAN BSc

6. heti előadásig elhangzott:

- erőterek ($\underline{g}_g$, $\underline{g}_t$, $\underline{g}_c$), erőtér potenciál (U_g, U_t, U_c)

- konvektív gyorsulás átalakítása, Euler-egyenlet, Bernoulli-egyenlet, $p_{össz}=p_{stat}+p_{din}$

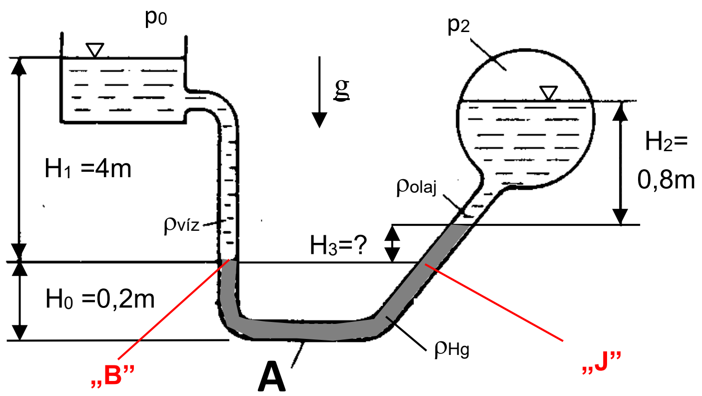
(hidrosztatika alapegyenlete és erőtér és folyadékfelszín kapcsolata még nem, Euler-egyenlet alakja természetes koordinátarendszerben még nem, izoterm atmoszféra még nem, Bernoulli-egyenlet instacioner áramlásra még nem)

Témakörök a 6. heti 3. gyakorlatra:

- hidrosztatika (erőterek: nehézségi, tehetetlenségi, forgó), manométeregyenletre példák
- hidrosztatika: eredő erőtér térerősségvektor, eredő potenciál, folyadékfelszín alakja
- Bernoulli-egyenlet alkalmazása (ideális közeg, stacioner áramlás, potenciálos erőtér, ❶->❷ áramvonal)

PÉLDA (hidrosztatika, csak $\underline{g}_g$)

A mellékelt ábrán látható rendszerben a három különböző sűrűségű, nem keveredő folyadék (víz, olaj, higany) nyugalomban van. A jobboldali tartály zárt, a nyomása (p_2) ismert értékű. A baloldali tartály p_0 nyomásra nyitott.



ADATOK: $g=10N/kg$ $p_0=10^5Pa$ $\rho_{víz}=1000kg/m^3$ $H_1=4000$ mm
$H_0=200mm$ $p_2=1{,}2bar$ $\rho_{olaj}=800kg/m^3$ $H_2=800$ mm
$\rho_{Hg}=13600kg/m^3$ $H_3=?$

KÉRDÉSEK: **A)**Határozza meg a H_3 higanyszint kitérését! H_3=? [m]
B)Határozza meg az „A" pontbeli nyomást! p_A=? [Pa]

A)Legyen az „A" pontban a „z" tengely origója: z_A=0m.
A manométeregyenlet felírható a $z=H_0$ szintre a higany baloldali („B") és jobboldali („J") ekvipotenciális pontjai között, hiszen azonos folyadékban (higany) vagyunk és a „B" és „J" pont $z_B = z_J$ miatt egy, a $\underline{g}$ térerősségvektorra merőleges vízszintesen, azaz ekvipotenciális (U=állandó) szintvonalon ($U_B=U_J$) helyezkedik el: $z_B = z_J$, tehát $U_B=U_J$.
Manométeregyenlet:

$$p_B = p_J$$

$$p_0 + \rho_{víz}\cdot g\cdot H_1 = p_2 + \rho_{olaj}\cdot g\cdot H_2 + \rho_{Hg}\cdot g\cdot H_3$$

Ebben csak a H_3 keresett higany szintkülönbség az ismeretlen, így erre rendezve kapjuk:

$$H_3 = (p_0 - p_2 + \rho_{víz}\cdot g\cdot H_1 - \rho_{olaj}\cdot g\cdot H_2) / (\rho_{Hg}\cdot g)$$

$$H_3 = (100\,000 - 120\,000 + 40\,000 - 6\,400) / 136\,000=0{,}1m$$

$$\mathbf{H_3=0{,}1m}$$

B)Az „A" pontbeli nyomás a p_0 –nál az A" pont „felett" lévő folyadékoszlopok nyomásával nagyobb. A p_A nyomást kiszámolhatjuk az „A" pont és pl. a baloldali tartályfelszín között:

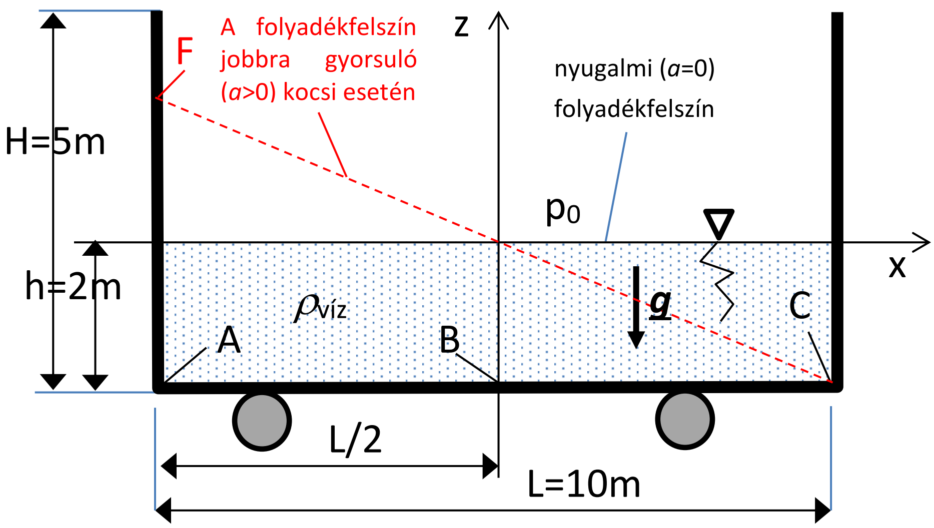
$$\mathbf{p_A} = p_0+\rho_{víz}\cdot g\cdot H_1 + \rho_{Hg}\cdot g\cdot H_0 = 100\,000Pa + 40\,000Pa + 27\,200Pa= \mathbf{167\,200Pa}$$

vagy az „A" pont és a jobboldali tartályfelszín között is, ugyanazt kell kapnunk:

$$\mathbf{p_A} = p_2+\rho_{olaj}\cdot g\cdot H_2 + \rho_{Hg}\cdot g\cdot (H_0+H_3)= 120\,000Pa + 6\,400Pa + 40\,800Pa= \mathbf{167\,200Pa}$$

PÉLDA (hidrosztatika, nehézségi és tehetetlenségi erőtér)

Egy L=10m hosszú, H=5m magas, felül nyitott ($p_0=10^5$Pa) tartálykocsit h=2m magasságig víz ($\rho_{víz}=1000$kg/m^3) tölt ki. A nyugalmi vízfelszín vízszintes.



ADATOK:
g=10N/kg
ideális közeg

KÉRDÉSEK:

A) Mekkora $\underline{a}$ gyorsulással kell mozgatni a tartálykocsit vízszintes irányban, hogy az elmozduló folyadékfelszín éppen elérje a „C" pontot? a=?

B) Rajzolja be a gyorsuló folyadék felszínének alakját az ábrába!

C) Rajzolja be az ábrába a gyorsuló folyadékban a *grad*p vektort!

D) Az ábrán látható „B" pont a tartálykocsi hossza mentén középen, a tartály alján helyezkedik el. Az A) kérdésben kiszámolt gyorsulás esetén számolja ki a „B" pontbeli nyomás értékét! p_B=? [Pa]

E) Számolja ki az „A" pontbeli nyomás értékét!

F) Számítsa ki, hogy mekkora az „A" pontbeli túlnyomás a „C" ponthoz képest! p_A-p_C=? [Pa]

A) Két erőtér van jelen a gyorsuló kocsihoz rögzített relatív rendszerben. Az eredő erőtér térerősségvektora: $\underline{g}_e=\underline{g}_g+\underline{g}_t$. Az eredő erőtér potenciál: $U_e=U_g+U_t=g_g\cdot z+a\cdot x$, a felszín egyenlete így $z=(-a/g_g)\cdot x$. Az (x,z) koordinátarendszer origójában x=0 és z=0 pontban $U_0=0$. A folyadékfelszín egyenlete a gyorsuló tartálykocsihoz rögzített (x,z) relatív koordinátarendszerben, amely origója nyugalmi és gyorsuló rendszerben is azonos. A gyorsuló folyadékfelszín egyben nyomás és potenciál szintvonal (3D –ben szintfelület) is, így $U_0=U_C$, tehát $0=g_g\cdot z_C+a\cdot x_C$. Ismertek „C" pont koordinátái x_C=5m és z_C=-2m, illetve g_g=10N/kg, így $a=-g_g\cdot z_C/x_C=(-10)\cdot(-2)/5=4$ m/s^2.

B) Lásd ábra.

C) $\underline{g}_g$ ismert; $\underline{g}_t=-a\underline{i}$; $\underline{g}_e$ merőleges a folyadékfelszínre, és $\underline{g}_e$ -vel azonos irányba mutat a gradp.

D) Az origó és a „B" pont között hidrosztatika alapegyenlete:

$p_0+\rho(g_g\cdot z_0+a\cdot x_0)=p_B+\rho(g_g\cdot z_B+a\cdot x_B)$

Mivel $x_0=0$ és $z_0=0$, valamint $x_0=x_B$, így a keresett nyomás fentit rendezve

$p_B=p_0-\rho\cdot g_g\cdot z_B=10^5-1000\cdot10\cdot(-2)=10^5+20\,000=120\,000$ Pa

(Csak a nehézségi erőtér mentén kell elmozdulni az origó és „B" pont között.)

E) Az „A" pont és a „fölötte" lévő folyadékfelszín „F" pontja között hidrosztatika alapegyenlete:

$p_A+\rho(g_g\cdot z_A+a\cdot x_A)=p_F+\rho(g_g\cdot z_F+a\cdot x_F)$

Mivel $x_A=x_F$, valamint $p_F=p_0$, így az „A" pontban a keresett nyomás fentit rendezve

$p_A=p_0+\rho\cdot g_g\cdot(z_F-z_A)=10^5+1000\cdot10\cdot(+2-(-2))=10^5+40\,000=140\,000$ Pa

(Csak a nehézségi erőtér mentén kell elmozdulni „A" és „F" pont között.)

F) Az „A" és „C" pontok között hidrosztatika alapegyenlete:

$p_A+\rho(g_g\cdot z_A+a\cdot x_A)=p_C+\rho(g_g\cdot z_C+a\cdot x_C)$

Mivel $z_A=z_C$, valamint $p_C=p_0$, így a keresett túlnyomás fentit rendezve

$p_A-p_C=\rho\cdot a\cdot(x_C-z_C)=1000\cdot4\cdot(+5-(-5))=40\,000$ Pa

(Csak a tehetetlenségi erőtér mentén kell elmozdulni „A" és „C" pont között.)

PÉLDA (hidrosztatika)

Az ábrán látható ∅D=500mm átmérőjű, H=600mm magas függőleges tengelyű, a p_0 nyomásra felül közpen nyitott hengeres tartály h=400mm magasságig vízzel van töltve. Az ábra az ω=0 nyugalmi folyadékfelszínt mutatja.

ADATOK:

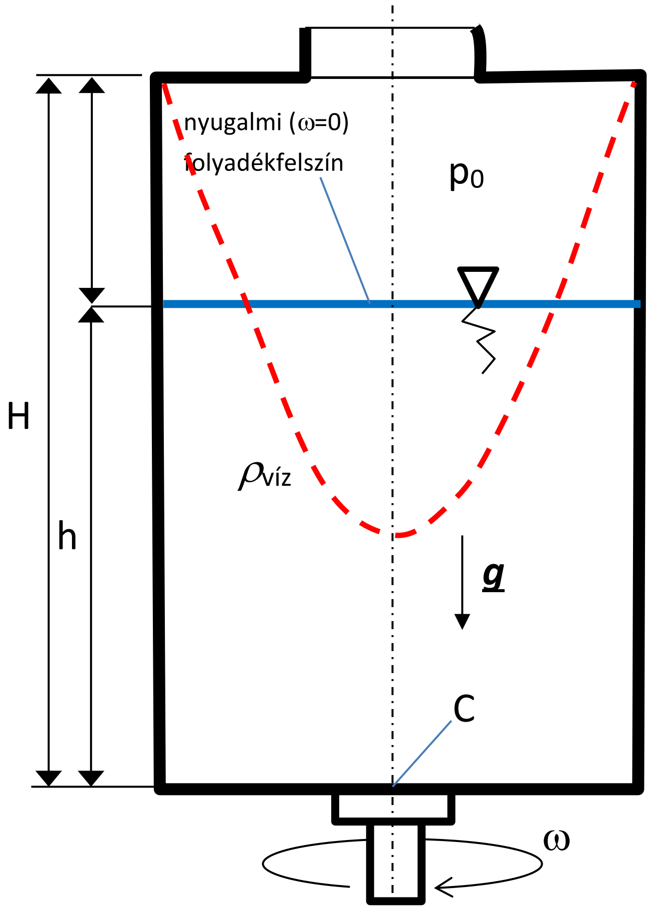
g=10N/kg; $\rho_{víz}$=1000kg/m^3; p_0=10^{5}Pa

KÉRDÉSEK:

A) Mekkora állandó ω szögsebességgel kell megforgatni a hengert, hogy a víz éppen elérje a tartály fedlapját?

B) Írja fel a forgó vízfelszín egyenletét (alakja másodfokú forgásparaboloid, lásd ábra, szaggatott vonal!), és számítsa ki a tengelybeli lesüllyedést !

C) Hol található az a pont az A) kérdésben kiszámolt ω szögsebességgel forgó folyadékban, ahol a legnagyobb a túlnyomás? (Jelölje ezt a pontot az ábrán „B”-vel!) Számítsa ki ebben a pontban a túlnyomást! p_B-p_0=? [Pa]

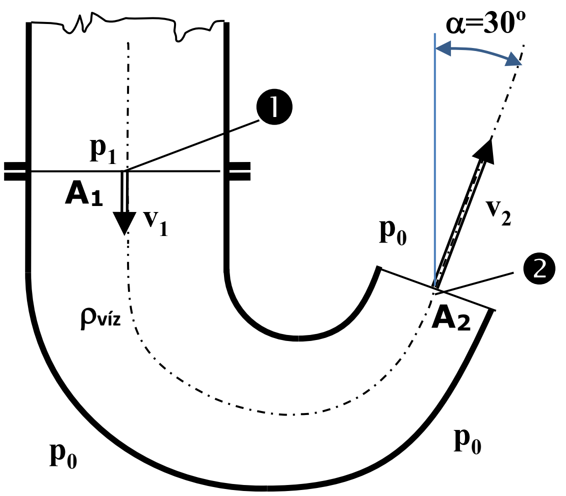


D) Mekkora ekkor a tartály alján a tengelyben (ábrán „C” pont) a nyomás értéke? p_C=? [Pa]

Felhasználandó: erőtér potenciál (nehézségi, forgó), hidrosztatika alapegyenlete

PÉLDA (Bernoulli-egyenlet, ideális közeg stacioner áramlása)

Az ábrán látható csővégi íves könyökidom A_1=500cm^2 keresztmetszetében ismert a statikus nyomás $p_{1,stat}$=250000Pa értéke. Az idom A_2=250cm^2 kilépő keresztmetszete a p_0=10^{5}Pa külső nyomásra nyitott. Az idomból víz ($\rho_{víz}$=1000kg/m^3) áramlik állandó sebességgel a szabadba. Az „1” és „2” csőtengelyek által bezárt szög (α=30°) az ábrán látható.



FELTÉTELEK: stacioner állapot; ideális közeg; az idom a vízszintes síkban fekszik: a nehézségi erőtér hatása elhanyagolható.

KÉRDÉSEK:

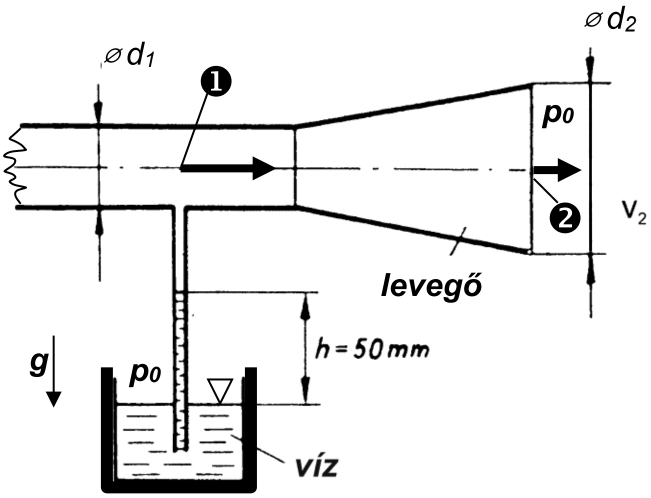
Határozza meg az „1” és „2” keresztmetszetekben az átlagsebességeket, a dinamikus nyomásokat, az össznyomást és a kilépő keresztmetszetbeli statikus nyomást!

MEGOLDÁS *(a lap túloldalán is folytathatja)*

Felhasználandó: Folytonosság tétel, Bernoulli-egyenlet

PÉLDA (Bernoulli-egyenlet, ideális közeg stacioner áramlása)

A mellékelt ábrán látható vízszintes tengelyű d_1=50mm csővezeték végén egy veszteségmentes diffúzor (d_2=100mm) található. A csővégen a levegő a szabadba (p_0) áramlik ki ismeretlen v_2 átlagsebességgel. Az alsó szabadfelszínű víztartályból a csatorna oldalfalához kapcsolódó csövön ebben az áramlási állapotban éppen *h*=50*mm* magasra jut fel a víz.



FELTÉTELEK:
stacioner állapot, súrlódásmentes közeg.

ADATOK: $\rho_{lev} = 1.2\ \mathrm{kg/m^3}$, $\rho_{víz} = 1000\mathrm{kg/m^3}$, $p_0 = 10^5\,Pa$, g=*10* N/kg

KÉRDÉS*:* Határozza meg a kilépő keresztmetszet kiáramlási sebességét! v_2=?

MEGOLDÁS *(a lap túloldalán is folytathatja)*

A stacioner esetre a Bernoulli-egyenlet alakja „1" és „2" pontok között:

$$p_1 + \frac{\rho}{2}\cdot v_1^2 + \rho\cdot g\cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}\cdot v_2^2 + \rho\cdot g\cdot z_2$$

Rendezve kapjuk:

$$p_1 - p_0 = \frac{\rho}{2}\cdot(v_2^2 - v_1^2)$$

Folytonosság tétel (vA=állandó) és kör keresztmetszet átmérők segítségével kapjuk:

$$p_1 - p_0 = \frac{\rho}{2}\cdot v_2^2\left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}\right) = \frac{\rho}{2}\cdot v_2^2\left(1 - \left(\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)^2\right)$$

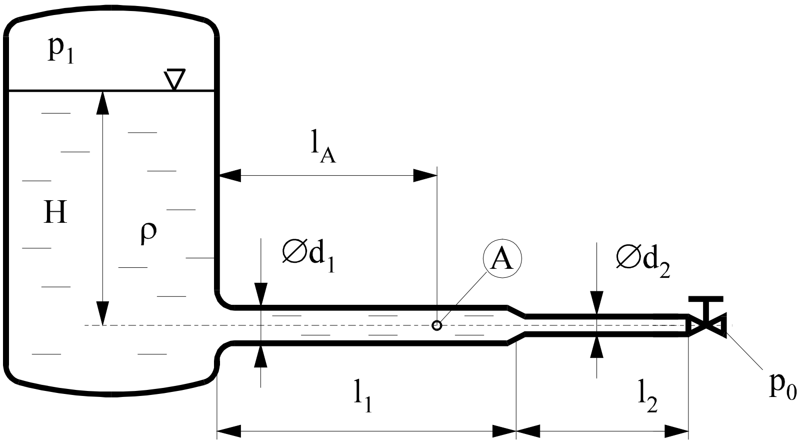
A szivornyára a manométer egyenlet felírható, hiszen a h magasra feljutó vízoszlop nyugalomban van, mint egy manométerben.

$$p_0 = p_1 + \rho_{víz} g h$$

Rendezve v_2-re:

$$v_2 = \sqrt{\frac{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}}{\left(1 - \left(\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)^2\right)}} = \sqrt{\frac{\frac{2(\rho_{víz} g h)}{\rho}}{\left(\left(\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)^2 - 1\right)}} = \sqrt{\frac{\frac{2\cdot(1000\cdot 10\cdot 0{,}05)}{1{,}2}}{(16-1)}} = 7{,}45 m/s$$

PÉLDA (Bernoulli-egyenlet, ideális közeg stacioner áramlása)



Egy $\Delta p = p_1 - p_0 = 20000$Pa túlnyomású vízzel töltött zárt fedelű tartály ismeretlen H magasságig töltött vízzel. A tartályhoz csatlakozó vízszintes tengelyű csővezeték „A" pontjában az áramló közeg dinamikus nyomása ismert $p_{din,A}=2000$Pa értékű.

FELTÉTELEK: A csővégi szelep teljesen nyitott; **stacioner kiáramlási állapot**; $\mu=0$; ρ=áll.; $A_{tartály} >> A_{cső}$; a csővégi szelep be- és kilépő keresztmetszetei a d_2 átmérőjű csőével azonosak.

ADATOK: $p_0 = 10^5\,Pa$; $\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$; g=*10* N/kg; $d_1 = 50\,mm$; $d_2 = 25\,mm$; l_1=10m; l_2=5m; l_A=7m

KÉRDÉSEK: Határozza meg az csővégi kiáramlási sebességet, az „A" pontbeli nyomást és a tartálybeli H vízfelszín-magasságot!

MEGOLDÁS *(a lap túloldalán is folytathatja)*

A stacioner esetre a Bernoulli-egyenlet alakja:

$$p_1 + \frac{\rho}{2}\cdot v_1^2 + \rho\cdot g\cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}\cdot v_2^2 + \rho\cdot g\cdot z_2$$

Ahol az áramvonal két végpontja az „1" és a „2" pont, célszerűen az egyik végpont az a pont, ahol a keresett ismeretlen mennyiség (p vagy v vagy z) van, a másikban mindent ismerünk.
A z=0m referencia szintet bárhova felvehetjük, most legyen z=0m a csőtengelyben.

	„A"	„2"=csővég, a szelep utáni kiáramlási keresztmetszet
p [Pa]	p_A=?	p_0=100 000Pa
v [m/s]	$p_{din,A} = \frac{\rho}{2}\cdot v_A^2$=2000Pa, ebből v_A=2m/s	v_2=8m/s (kiszámítható a folytonosság tételéből)
z [m]	z_A=0m	z_2=0m

Az alábbi

$$p_A + \frac{\rho}{2}\cdot v_A^2 + \rho\cdot g\cdot z_A = p_2 + \frac{\rho}{2}\cdot v_2^2 + \rho\cdot g\cdot z_2$$

A Bernoulli-egyenletet fenti adatokkal rendezve az ismeretlen p_A nyomásra kapjuk

$$p_A = p_0 + \frac{\rho}{2}\cdot(v_2^2 - v_A^2) = 100000Pa + 500(64-4) = 130000Pa$$

A H magasság kiszámításához vagy az „1"-„2", vagy az „1"-„A" pontok között felvett áramvonalon is felírhatjuk a Bernoulli-egyenletet. Legyen az utóbbi:

$$p_1 + \frac{\rho}{2}\cdot v_1^2 + \rho\cdot g\cdot z_1 = p_A + \frac{\rho}{2}\cdot v_A^2 + \rho\cdot g\cdot z_A$$

	„1"=tartály vízfelszín	„A" jelölt pont csőtengelyben
p [Pa]	120 000Pa	130 000 Pa
v [m/s]	≈0m/s	2m/s
z [m]	z_1=H=?	z_A=0m

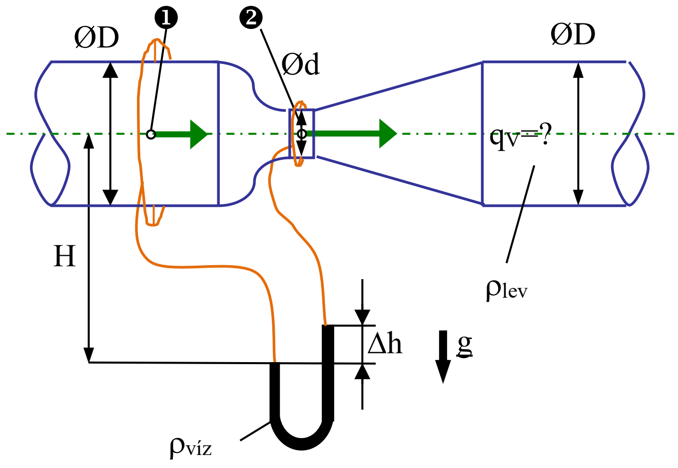
Rendezve:

$$p_1 + \rho\cdot g\cdot H = p_A + \frac{\rho}{2}\cdot v_A^2$$

$$H = \frac{p_A - p_1}{\rho\cdot g} + \frac{v_A^2}{2g} = \frac{130000-120000}{10000} + \frac{4}{20} = 1 + 0{,}2 = 1{,}2m$$

PÉLDA (Bernoulli-egyenlet, ideális közeg stacioner áramlása)

Térfogatáram-mérés céljából Venturi-csövet építünk be egy vízszintes tengelyű csővezetékbe. Az „1” és „2” keresztmetszetekben kialakított statikus nyomás megcsapolásokhoz körvezetékekkel csatlakozik a függőleges szárú, vízzel töltött U-csöves manométer. A manométerről leolvasott kitérés Δh=60mm.



Feltételek: ρ=áll., μ=0, stacioner áramlás.

ADATOK:∅D=300mm; ∅d=100mm; g=10N/kg; H=5m; $\rho_{víz}$=1000kg/m^3; ρ_{lev}=1,2kg/m^3

KÉRDÉSEK: Határozza meg a levegő térfogatáramát, és az „1” és „2” keresztmetszetek statikus nyomáskülönbségét!

MEGOLDÁS *(a lap túloldalán is folytathatja)*

A manométer egyenlet a baloldali vízfelszín szintjére:

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot H = p_2 + \rho \cdot g \cdot (H - \Delta h) + \rho_{víz} \cdot g \cdot \Delta h$$

$$p_1 - p_2 = (\rho_{víz} - \rho) \cdot g \cdot \Delta h$$

Ezzel a statikus nyomáskülönbség számítható:

$$p_1 - p_2 = (\rho_{víz} - \rho) \cdot g \cdot \Delta h = (1000 - 1{,}2) \cdot 10 \cdot 0{,}06 = 599{,}28 Pa$$

(Kihasználva, hogy $\rho_{víz} >> \rho_{lev}$, akkor ugyanerre 600Pa értéket kapunk, az is elfogadható).

A stacioner esetre a Bernoulli-egyenlet alakja:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

A z=0m referencia szintet bárhova felvehetjük, most legyen $z_1=z_2$=0m a csőtengelyben.

	„1”	„2
p [Pa]	?	?
v [m/s]	v_1=?	$v_2=v_1(A_1/A_2)= v_1 \cdot 9$
z [m]	z_1=0m	z_2=0m

Ezzel paraméteresen a statikus nyomáskülönbség

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2(81 - 1) = 80 \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = 599{,}28 Pa$$

Melyből a

sebesség v_1=3,533411949m/s (3,533m/s), így a keresett és a térfogatáram $q_{V,1}=v_1 A_1$=0,249762173m^3/s (~0,250m^3/s)

(Ha $\rho_{víz} >> \rho_{lev}$, feltétellel számoltunk, akkor minimális az eltérés:
a sebesség v_1=3,536m/s, és $q_{V,1}=v_1 A_1$=0,249912165m^3/s (~0,250m^3/s)