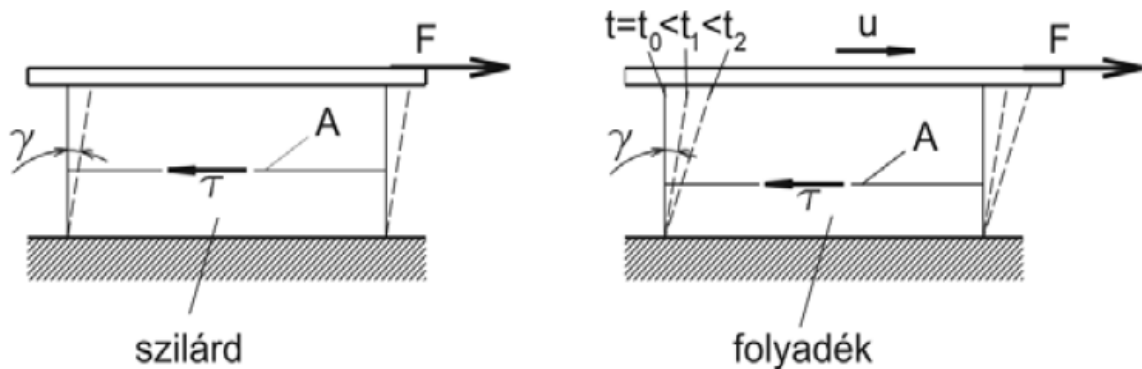


## 2.GYAKORLAT (2. oktatási hét) ÁRAMLÁSTAN BSc

Téma: Newton-féle viszkozitási törvény

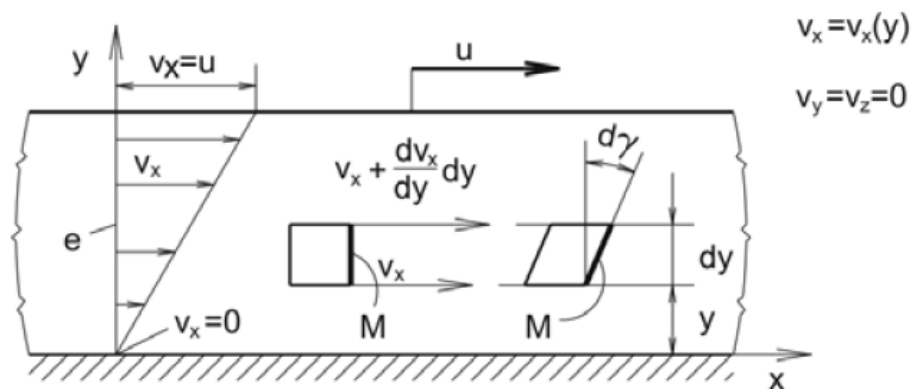
### Newton-féle viszkozitási törvény



1.1. ábra

Szilárd test és folyadékréteg deformációja

szilárd testeknél	$\gamma$ arányos $\tau$ -val
(newtoni) folyadékoknál	$d\gamma/dt$ arányos $\tau$ -val
nem-newtoni közegeknél	$d\gamma/dt$ más függvénye $\tau$ -nak



1.2. ábra

Sebességmegoszlás a folyadékrétegben

**Newton viszkozitási törvénye**

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy} = \mu \frac{d\gamma}{dt}$$

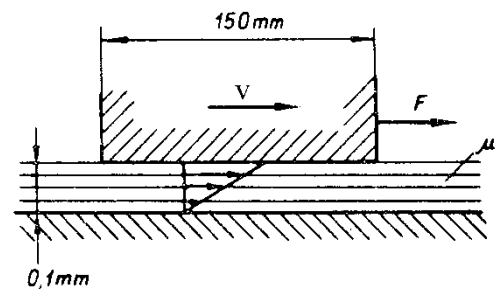
(1.2)

$\tau_{yx}$  jelentése

A  $\tau$  indexei közül az első a  $\tau$ -t tartalmazó sík normálisának irányát, a második a  $\tau$  irányát mutatja, tehát  $\tau_{yx}$  az  $y$  normálisú síkon ébredő  $x$  irányú csúsztatófeszültséget jelöli. Az **1.2. ábrán** látható esetben a  $\tau_{yx}$  az asztallappal párhuzamos síkban ébredő, az  $x$  tengellyel párhuzamos csúsztatófeszültség. A deformációsebesség és a csúsztatófeszültség közötti arányossági tényezővel, a  $\mu$  dinamikai viszkozitással később foglalkozunk.

## PÉLDA (Newton-féle viszkozitási törvény)

A mellékelt ábrán látható csúszótalpat a vízszintes, álló alaplapot borító  $\mu=0,1 \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$  dinamikai viszkozitású vékony folyadékfilm (pl. szobahőmérsékletű ismert  $\mu$  dinamikai viszkozitású olajfilm) csúsztatjuk  $v=0,5 \text{ m/s}$  állandó sebességgel. A csúszótalpat hossza  $L=150 \text{ mm}$ , szélessége (a rajz síkjára merőlegesen)  $W=100 \text{ mm}$ .



**FELTÉTELEK:** A vékony résben lineáris sebességprofil, a Newton-féle viszkozitási törvény érvényes.

**KÉRDÉS:**

**A)** Határozza meg a csúszótalpat mozgásához szükséges  $F$  [N] erőt!

**B)** Melyik esetben változik nagyobb mértékben a csúszótalpat azonos sebességgel való mozgásához szükséges erő nagysága: ha a szobahőmérsékletűnél  $20^\circ\text{C}$ -kal hidegebb vagy ha annál  $20^\circ\text{C}$ -kal melegebb olajat használunk?

## MEGOLDÁS

**A)kérdésre válasz:**

Sebesség:

$$v=0,5 \text{ m/s}$$

Csúsztatófeszültség:

$$\tau = \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} \cong \mu \frac{\partial v}{\partial y'}$$

ahol

$$\partial v = v-0 = v = 0,5 \text{ m/s} \quad \text{és} \quad \partial y = h = 10^{-4} \text{ m}$$

A dinamikai viszkozitás adott:

$$\mu=0,1 \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$$

A csúsztatófeszültségre kapjuk:

$$\tau=500 \text{ Pa}$$

A mozgatáshoz szükséges erő:

$$F = \tau \cdot A, \quad \text{ahol „A” a nyírt folyadék keresztmetszet a résben egy, a csúszótalpat alatt, annak felületével egyező nagyságú téglalap méretű felület:}$$

$$A = L \cdot W$$

$$A = 100 \text{ mm} \cdot 150 \text{ mm} = 0,10 \text{ m} \cdot 0,15 \text{ m} = 0,015 \text{ m}^2$$

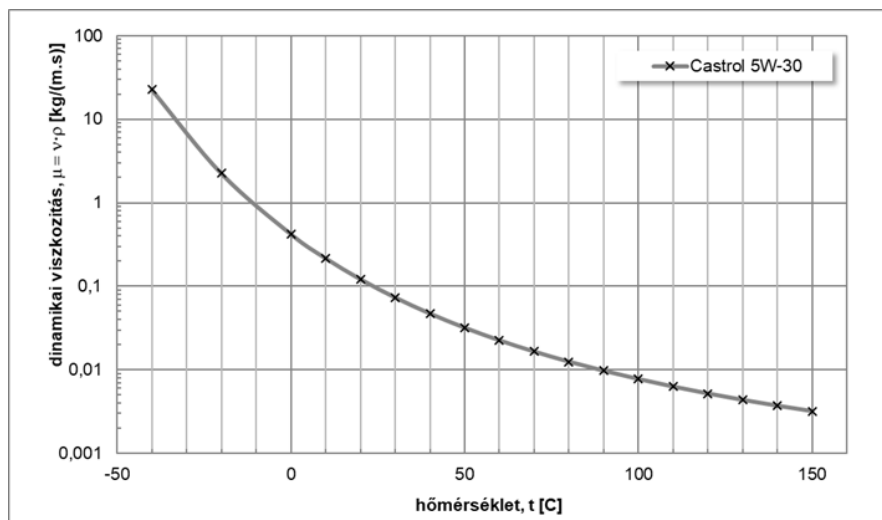
A mozgatáshoz szükséges erő:

$$F = \tau \cdot A = 500 \cdot 0,015 = 7,5 \text{ N}$$

**B)kérdésre válasz:**

A cseppfolyós közegekre, így a jelen példában szereplő olajra (lásd alábbi diagram) is elmondható, hogy viszkozitásának hőmérséklet függvénye a vízéhez jellegre hasonló alakot mutat: hőmérséklet növekedésével csökken a viszkozitás, de a csökkenés mértéke egyre kisebb.

Tehát ilyen görbe alak alapján kimondható, hogy  $20^\circ\text{C}$  olajhőmérséklet csökkenés esetén nagyobb mértékben nő az olaj viszkozitása (és így az  $F$  erő), mint amekkora mértékben csökken az olaj viszkozitása (és így az  $F$  erő)  $20^\circ\text{C}$  hőmérséklet növekedés esetén.

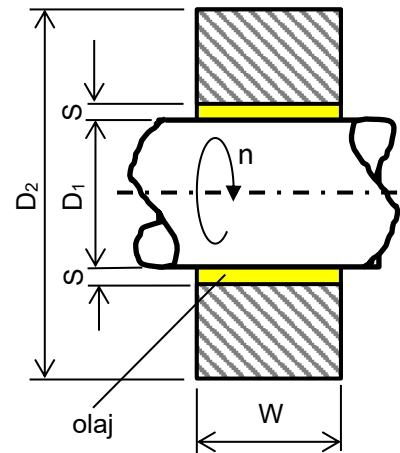


## PÉLDA (Newton-féle viszkozitási törvény)

A  $\varnothing D_1=40\text{mm}$  átmérőjű tengelyt állandó  $n=9550$  percenkénti fordulatszámmal forgatjuk. A tengelyt az ábrán látható  $W=40\text{mm}$  méretű és  $\varnothing D_2=100\text{mm}$  külső átmérőjű álló csapágyház veszi körül (koncentrikus tengelyek). A tengely és a csapágyház között lévő  $S=0,01\text{mm}$  méretű rést  $90^\circ\text{C}$  hőmérsékletű,  $800\text{kg/m}^3$  sűrűségű és  $0,0097\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$  viszkozitású forró kenőolaj tölti ki.

**FELTÉTELEK:** stacioner állapot, vékony réssben a sebességprofil lineáris, newtoni folyadék.

**KÉRDÉS:** Határozza meg a réssben ébredő csúsztatófeszültséget, az ebből adódó átlagos kerületi erőt, a veszteség-nyomatékot és -teljesítményt!



### MEGOLDÁS

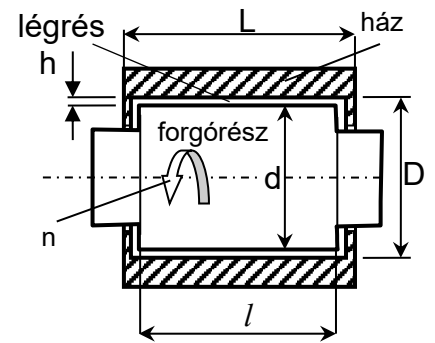
Fordulatszám:	$n=9550 \text{ ford/perc} = 159,17 \text{ ford/s}$
Szögsebesség:	$\omega=2\pi n=1000 \text{ 1/s}$ (kerekítve)
Kerületi sebesség:	$v_{\text{ker}}=R_1 \cdot \omega=20\text{m/s}$ (kerekítve),
ahol	$R_1=D_1/2=40\text{mm}/2=20\text{mm}=0,02 \text{ m}$
Csúsztatófeszültség:	$\tau = \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} \cong \mu \frac{\partial v_{\text{ker}}}{\partial r}$ ,
ahol	$\partial v_{\text{ker}}=v_{\text{ker}}-0 = v_{\text{ker}} = 20 \text{ m/s}$ ,
és	$\partial r= S= 0,01\text{mm}=10^{-5}\text{m}$
mivel a dinamikai viszkozitás:	$\mu=0,0097\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$ ,
Ezekkel a csúsztatófeszültség:	$\tau=19401\text{Pa}$
A nyírt folyadék (rés) középtátmérője	$D_{\text{közép}}=D_1+S= 40\text{mm}+0,01\text{mm}=0,04001\text{m}$ ,
azaz a középsugár	$R_{\text{közép}}=D_{\text{közép}}/2=0,020005\text{m}$
A nyírt folyadékfelszín a réssben egy hengerpalást felülete:	$A_{\text{palást}}=D_{\text{közép}} \cdot \pi \cdot W=0,005028 \text{ m}^2$
Kerületi erő:	$F_{\text{ker}}=\tau \cdot A_{\text{palást}}=97,55039 \text{ N}$ ( $\approx 97,6 \text{ N}$ )
Veszteségnyomaték:	$M_{\text{veszt}}=F_{\text{ker}} \cdot R_{\text{közép}}= 1,951495 \text{ Nm}$ ( $\approx 1,95 \text{ Nm}$ )
A csapágy veszteségteljesítménye:	$P_{\text{veszt}}=M_{\text{veszt}} \cdot \omega= 1951,639 \text{ W}$ ( $\approx 1,952 \text{ kW}$ )

## PÉLDA (Newton-féle viszkozitási törvény)

Egy fogászati fúró léghűtéses motorja 2000÷40000 percenkénti fordulatszám-tartományban működik. A motor forgórésze leegyszerűsítve (ld. felső ábra) egy hengernek ( $\varnothing d=11,9\text{mm}$ ;  $l=15\text{mm}$ ) tekinthető, amely a szintén hengeres ( $\varnothing D=12\text{mm}$ ;  $L=17\text{mm}$ ) álló házban koncentrikusan helyezkedik el. A  $h$  résméret sugár- és tengelyirányban is állandó. Üzemi állapotban a légrést meleg,  $1,1\text{kg/m}^3$  sűrűségű és  $2 \cdot 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$  viszkozitású,  $R=287\text{J}/(\text{kgK})$  gázállandójú levegő tölti ki. **KÉRDÉSEK:**

- a)  $n=36000$ ford/perc esetén – csak a forgórész hengerpalástja és ház közötti légrést figyelembe véve – határozza meg a légrésben ébredő csúsztatófeszültséget és veszteségyomatékot!
- b) Mekkora veszteségteljesítmény értéke? Hány %-a fordítódik a 120W motorteljesítménynek a légrésvesztés legyőzésére?

**Feltételek:** stacioner állapot,  $\rho=\text{áll.}$ , lineáris sebességprofil a résben, a Newton-féle viszkozitási törvény használható.



## MEGOLDÁS

Fordulatszám:  $n=36000$  ford/perc = 600 ford/sec

Szögsebesség:  $\omega=2\pi n=3769,91$  1/s

Kerületi sebesség:  $v_{\text{ker}}=r \cdot \omega=22,431$  m/s, ahol  $r=d/2=11,9\text{mm}/2=0,00595$  m

Csúsztatófeszültség:  $\tau = \mu \frac{dy}{dt} \cong \mu \frac{dv_{\text{ker}}}{dr}$ ,  
ahol  $dv_{\text{ker}}=v_{\text{ker}}-0=v_{\text{ker}}=22,431$  m/s, és  $dr=D/2-d/2=R-r=h=0,05\text{mm}=5 \cdot 10^{-5}\text{m}$

mivel a kinematikai viszkozitás adott, a közeg sűrűsége ismeretében a dinamikai viszkozitás számítható:  $\mu=v \cdot \rho=2 \cdot 10^{-5} \cdot 1,1=2,2 \cdot 10^{-5}$  kg/(m·s),

Ezzel kapjuk:  $\tau=9,86964$  Pa ( $\approx 9,9\text{Pa}$ )

A kerületi erő:  $F_{\text{ker}}=\tau \cdot A_{\text{palást}}=5,55789 \cdot 10^{-3}$  N ( $\approx 5,56$  mN)

ahol a nyírt folyadékfelszín a résben egy közép hengerpalást felület:

$$A_{\text{palást}}=D_{\text{közép}} \cdot \pi \cdot l=0,01195\text{m} \cdot \pi \cdot 0,015\text{m}=5,6313 \cdot 10^{-4}\text{m}^2$$

A nyírt folyadék (rés) középmérete  $D_{\text{közép}}=(d+D)/2=11,95\text{mm}$ , azaz  $R_{\text{közép}}=5,975\text{mm}$

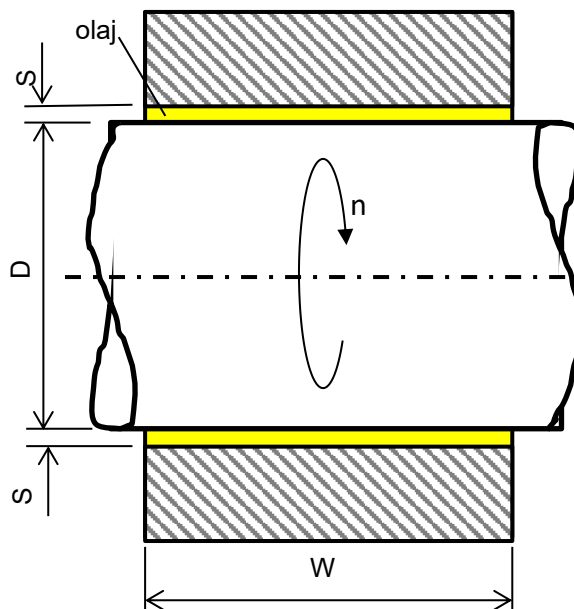
A veszteségyomaték:  $M_{\text{veszt}}=F_{\text{ker}} \cdot R_{\text{közép}}=3,3208 \cdot 10^{-5}\text{Nm}$  ( $\approx 33,2$  mNmm)

A veszteségteljesítmény:  $P_{\text{veszt}}=M_{\text{veszt}} \cdot \omega=0,125192699$  W ( $\approx 125,2$  mW)

Relatív veszteség-teljesítmény:  $\eta = \frac{P_{\text{veszt}}}{P_{\text{motor}}} = \frac{0,125192699}{120} = 0,001043272 \cong 0,1\%$

**PÉLDA (Newton-féle viszkozitási törvény)**

Egy óceánjáró hajó  
 $P=80000\text{kW}$   
 összteljesítményű  
 motorjának ábrán látható  
 $\varnothing D=900\text{mm}$  átmérőjű  
 fő tengelyét  $N=28$  db azonos  
 $W=400\text{mm}$  hosszúságú álló  
 (ábrán sraffozott) csapágyház



veszi körül koncentrikusan. A tengely és a csapágyház között lévő, sugárirányban  $S=0,4\text{mm}$  vastagságú rést ismert paraméterű ( $800\text{kg/m}^3$  sűrűségű és  $1,25 \cdot 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$  viszkozitású) kenőolaj tölti ki. A tengely  $n=100$  ford/perc értékű állandó fordulatszámmal forog. **FELTÉTELEK:**  $\rho=\text{áll.}$ ,  $\mu=\text{áll.}$ , newtoni közeg, stacioner állapot, a résben sugárirányban lineáris sebességprofil feltételezhető. **KÉRDÉSEK:**

- A)** Határozza meg először 1db csapágyat figyelembe véve a csúsztatófeszültséget, a kerületi erőt, a veszteségnyomatékot, majd adja meg az összes csapágy motorteljesítményre vonatkoztatott relatív veszteségteljesítményét is!
- B)** Indokolja számítással, hogy melyik okoz nagyobb veszteségteljesítmény-változást: ha a résméretet csökkentjük 25%-kal  $S'=0,3\text{mm}$ -re vagy ha a fordulatszámot növeljük 25%-kal  $n'=125$  ford/perc-re!

**MEGOLDÁS****A)**

fordulatszám:  $n=100$  ford/perc  $=1,66^\circ$  ford/sec

szögsebesség:  $\omega=2\pi n=10,47197\dots$  1/s

kerületi sebesség:  $v_{ker}=R \cdot \omega=4,71238898\dots\text{m/s}$ , ahol  $R=D/2=900\text{mm}/2=450\text{mm}=0,450\text{m}$

csúsztatófeszültség:  $\tau = \mu \frac{d\gamma}{dt} \cong \mu \frac{\partial v_{ker}}{\partial r} = \nu \rho \frac{v_{ker}}{S}$ ,

ahol  $\partial v_{ker} = v_{ker} - 0 = v_{ker}$  és  $\partial r = S = 0,4\text{mm} = 4 \cdot 10^{-4}\text{m}$ ;

A mértékegységből látszik, hogy az olaj kinematikai viszkozitása ( $\nu$ ) adott, így a sűrűség ismeretében a dinamikai viszkozitás:  $\mu = \nu \cdot \rho = 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 800 = 0,01 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ .

Ezzel:  $\tau = 117,8097\dots \text{Pa}$

( $\approx 117,8\text{Pa}$ )

A nyírt folyadékfelszín a résben egy közép hengerpalást felülete  $N=1$  db csapágyra egy  $W=400\text{mm}$  széles és  $D_k$  középtátmérőjű hengerpalást. A nyírt folyadék (rés)

középtátmérője:  $D_k = D + S = 900,4\text{mm} = 0,9004\text{m}$

középsugara:  $R_k = D_k/2 = 450,2\text{mm} = 0,4502\text{m}$

palástfelülete:  $A_p = D_k \cdot \pi \cdot L = 0,9004\text{m} \cdot \pi \cdot 0,4\text{m} = 1,13147601 \text{ m}^2$

( $\approx 1,13\text{m}^2$ )

kerületi erő:  $F_{ker} = \tau \cdot A_p = 133,298877\dots \text{N}$

( $\approx 133,3\text{N}$ )

veszteségnyomaték:  $M_{veszt} = F_{ker} \cdot R_k = 60,01115444\dots \text{Nm}$

( $\approx 60\text{Nm}$ )

veszteségteljesítmény:  $P_{veszt} = M_{veszt} \cdot \omega = 628,4353\dots \text{W}$

( $\approx 628,4\text{W}$ )

$N=28$  db csapágyra:  $P_{veszt} = 28 \cdot P_{veszt} = 17596,18951\dots \text{W}$

( $\approx 17,6 \text{ kW}$ )

rel. veszt-teljesítmény:  $\eta = \frac{P_{veszt}}{P_{motor}} = \frac{17,6 \text{ kW}}{80000 \text{ kW}} = 0,000219952$

( $\approx 0,022\%$ )

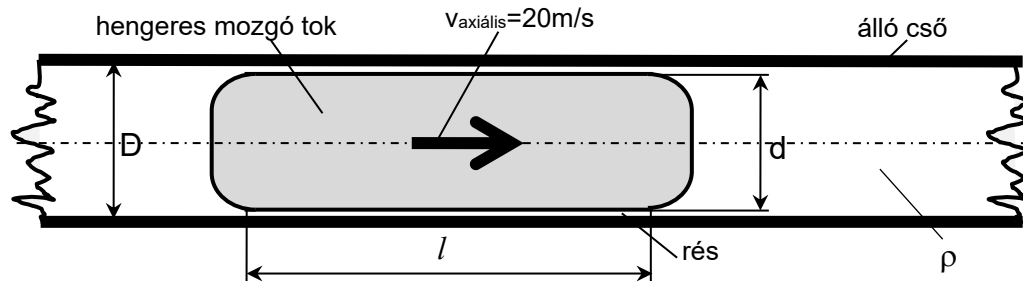
**B) A fordulatszám növelése okoz nagyobb teljesítmény-változást a kérdéses esetben.**

**Indoklás:** A  $P_{veszt}$  veszteségteljesítmény az  $S$  résméret reciprokéval közel arányos ( $P \sim S^{-1}$ ). (Azért csak kb., mivel nem csak a  $\tau$ -ban, hanem a palástfelület és a kerületi erő számításánál szükséges  $D_k$  középtátmérőben is szerepel az  $S$  értéke, de minimális változást okoz  $P$  értékében.) Ezzel szemben a  $P_{veszt}$  veszteségteljesítmény az  $n$  fordulatszám négyzetével arányos ( $P \sim n^2$ ). Tehát megállapítható, hogy ha az  $S'=0,75 \cdot S$ , akkor a  $P' \approx P \cdot 1,33$ , viszont ha az  $n'=1,25 \cdot n$ , akkor a  $P' = P \cdot (1,25)^2 = P \cdot 1,5625$ . Mivel  $1,56 > 1,33$ , tehát a fordulatszám 25%-os növelése nagyobb (kb. +56%-os) teljesítmény-növekedést eredményez, mint amekkora (kb. +33%-os) teljesítmény-növekedést az  $S$  résméret 25%-os csökkentése okozna.

## PÉLDA (Newton-féle viszkozitási törvény)

Egy áruház pneumatikus csőpostájának vizsgált szakasza egy vízszintes,  $\varnothing D=100\text{mm}$  belső átmérőjű egyenes,  $L=100\text{m}$  hosszú cső, melyben  $v_{\text{axiális}}=20\text{m/s}$  állandó sebességgel mozog a ( $\varnothing d=99,5\text{mm}$ ,  $l=200\text{mm}$ ) henger alakú tok. A csőben lévő levegő sűrűsége  $1,25\text{kg/m}^3$ , viszkozitása  $1,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $R=287\text{J/kg/K}$ . **Feltételek:** stacioner állapot,  $\rho=\text{áll.}$ , lineáris sebességprofil az  $l$  hosszú résben, ahol a Newton-féle viszkozitási törvény használható.

**KÉRDÉS:** Mekkora  $P[\text{W}]$  teljesítmény szükséges a légrésveszteség legyőzéséhez?



## MEGOLDÁS

Sebesség:  $v_{\text{axiális}}=20 \text{ m/s}$

Csúsztatófeszültség:  $\tau = \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} \cong \mu \frac{\partial v_{\text{axiális}}}{\partial r}$ ,

ahol  $\partial v_{\text{axiális}} = v_{\text{axiális}} - 0 = v_{\text{axiális}} = 20 \text{ m/s}$ , és  $\partial r = h = (D-d)/2 = 0,25\text{mm} = 2,5 \cdot 10^{-4}\text{m}$   
mivel a kinematikai viszkozitás adott, a sűrűség ismeretében a dinamikai viszkozitás számítható:  $\mu = \nu \cdot \rho = 1,25 \cdot 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ , azaz  $\mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ , ezekkel:

$$\tau = 1,6 \text{ Pa}$$

Axiális erő:  $F_{\text{axiális}} = \tau \cdot A_{\text{palást}} = 0,100279637 \text{ N} \ (\approx 0,1003 \text{ N})$

ahol a nyírt folyadékfelszín a résben egy közép hengerpalást felület:

$$A_{\text{palást}} = d_{\text{közép}} \cdot \pi \cdot l = 0,09975\text{m} \cdot \pi \cdot 0,2\text{m} = 6,2674773 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

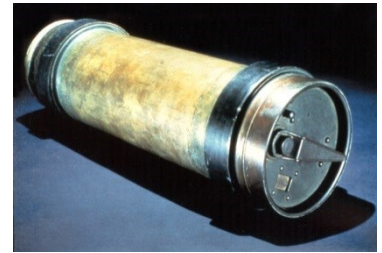
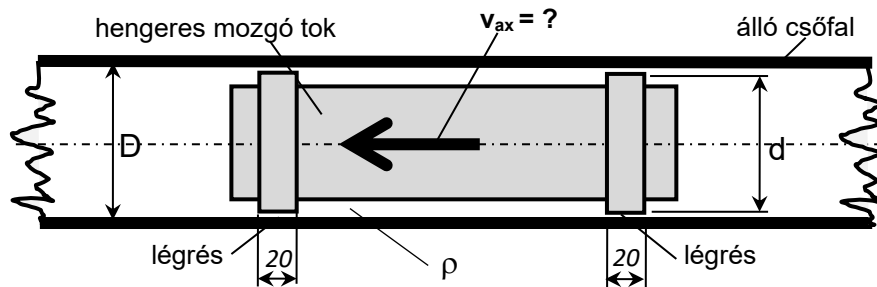
A nyírt folyadék (rés) középtátmérője:

$$d_{\text{közép}} = d + h = 99,5\text{mm} + 0,25\text{mm} = 99,75\text{mm}$$

A résben nyírt folyadékra a veszteségteljesítmény:  $P_{\text{veszt}} = F_{\text{axiális}} \cdot v_{\text{axiális}} = 2,00559275 \text{ W} \ (\approx 2 \text{ W})$

## PÉLDA (Newton-féle viszkozitási törvény)

Egy régi pneumatikus csőposta vizsgált szakasza egy vízszintes,  $\varnothing D=65\text{mm}$  belső átmérőjű egyenesnek tekinthető,  $L=100\text{m}$  hosszú cső, melyben ismeretlen  $v_{ax}$  állandó tengelyirányú sebességgel mozog a tok. A tok két végén van egy-egy 20 mm szélességű és  $d=64\text{mm}$  átmérőjű szakasz. A többi szakaszon a sokkal nagyobb résméretetek miatt elhanyagolható a súrlódás hatása. A csövet kitöltő levegő sűrűsége  $1,2\text{kg/m}^3$ , viszkozitása  $18 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ . **FELTÉTELEK:** stacioner állapot,  $\rho=\text{áll.}$ , sugárirányban lineáris sebességprofil a két 20mm-es szélességű résben: itt a Newton-féle viszkozitási törvény használható.



**KÉRDÉS:** Mekkora  $v_{ax}$  axiális sebességgel mozog a tok a csőben, ha  $P=66\text{mW}$  teljesítmény szükséges a légrésvesztés legyőzéséhez? Adja meg a résben ébredő csúsztatófeszültség értékét is!

### MEGOLDÁS

Csúsztatófeszültség:  $\tau = \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} \cong \mu \frac{\partial v_{ax}}{\partial r} = \mu \frac{v_{ax}}{s}$

A dinamikai viszkozitás adott:  $\mu=18 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$

A résméret adott:  $\partial r = s = (D-d)/2 = 0,5\text{mm} = 5 \cdot 10^{-4}\text{m}$

A nyírt folyadék (rés) középátmérője és középsugara:  
 $d_k = d + s = 64\text{mm} + 0,5\text{mm} = 0,0645\text{m}$

A nyírt folyadék palástfelülete ismert: összesen 2db, egyenként  $L=20\text{mm}$  széles és  $d_k$  középátmérőjű hengerpalást:

$$A = 2 \cdot (d_k \cdot \pi \cdot L)$$

A súrlódási veszteségteljesítmény:  $P_{veszt} = F_{ax} \cdot v_{ax} = \tau \cdot A \cdot v_{ax} = \frac{\mu \cdot A}{s} \cdot v_{ax}^2$

A keresett sebesség:  $v_{ax} = \sqrt{\frac{P_{veszt} \cdot s}{\mu \cdot 2 \cdot d_k \cdot \pi \cdot L}} = 15,03958\text{m/s} \quad (\approx 15\text{m/s})$

A csúsztatófeszültség:  $\tau = \mu \frac{v_{ax}}{s} = 0,541425\text{Pa} \quad (\approx 0,54\text{Pa})$