

4.

3. Az Euler-egyenlet és a Bernoulli-egyenlet

3.1 A folyadékreszek gyorsulása

3.2 Az Euler-egyenlet

3.3 A Bernoulli-egyenlet, a statikus nyomás, a dinamikus nyomás és az össznyomás

3.4 Az Euler-egyenlet természetes koordináta-rendszerben



4.

3. Az Euler-egyenlet és a Bernoulli-egyenlet

3.1. A folyadékáramlás gyorsulása (\underline{a})

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} \quad \text{és} \quad \underline{v} = v_x \cdot \underline{i} + v_y \cdot \underline{j} + v_z \cdot \underline{k}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x(x, y, z, t) \\ v_y(x, y, z, t) \\ v_z(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

Euler-féle leírásban tekintjük a folyadékmozgást.

3.1.1. A lokális és konvektív gyorsulás:

Sebességkomponensekre felírva a teljes megrögzítést

x:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad} v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

y:

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad} v_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

z:

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad} v_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Tehát:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{D} \cdot \underline{v} = \underbrace{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}}_{\underline{a}_{\text{lok}}} + \underbrace{\frac{\partial \underline{v}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t}}_{\underline{a}_{\text{konv}}}$$

$$\boxed{\underline{a}_{\text{teljes}} = \underline{a}_{\text{lok}} + \underline{a}_{\text{konv}}}$$

$$\underbrace{\underline{D} \cdot \underline{v}}_{\underline{a}_{\text{konv}}}$$

4.

3.1.2. A konvektív gyorsulás kifejezésének átalakítása

A későbbi mozgás egyenlet miatt célszerű lesz, ha átalakítjuk a konvektív gyorsulás tagot.

$$\underline{a}_{\text{konv}} = \underline{D} \cdot \underline{v}$$

Deriválttenzor felbontása (ismét, de máshogy)

$$\underline{D} = \underline{D}^T + (\underline{D} - \underline{D}^T)$$

Ezzel:

$$\underline{a}_{\text{konv}} = \underbrace{\underline{D}^T \cdot \underline{v}}_{\text{? (1)}} + \underbrace{(\underline{D} - \underline{D}^T) \cdot \underline{v}}_{\text{? (2)}}$$

(1.)

$$\begin{aligned} \underline{D}^T \cdot \underline{v} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} \\ - \\ - \end{bmatrix} = \boxed{\text{grad } \frac{v^2}{2}} \end{aligned}$$

4.

$$\textcircled{2} \quad (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T) \cdot \underline{v} = \text{rot } \underline{v} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \text{rot } \underline{v}$$

Fenti ① és ② általánosan kaptuk:

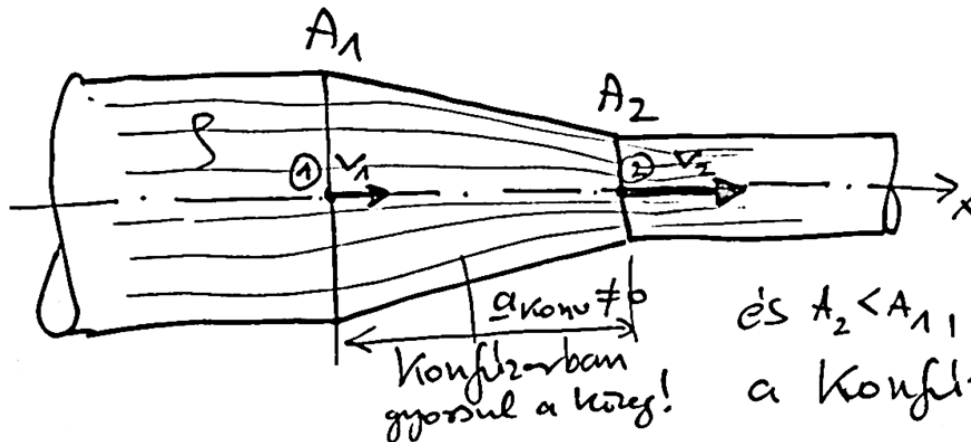
$$\underline{a}_{\text{konv}} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{v} = \underline{\underline{D}}^T \underline{v} + (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T) \underline{v} = \text{grad } \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot } \underline{v}$$

A teljes gyorsulás ezzel felírható:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\delta \underline{v}}{\delta t} + \text{grad } \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot } \underline{v}$$

Ez látnálag bonyolultabb, de előnyös lesz!

3.1.3. Áramlás konfúzorban



$$\underline{a}_{\text{teljes}} = \underline{a}_{\text{lok}} + \underline{a}_{\text{konv}}$$

Mivel $A_1 > A_2$, ha $\rho = \text{állandó}$, akkor kontinuitás miatt

$$v_2 > v_1$$

Ha stacioner az áramlás,

és $A_2 < A_1$, akkor $\underline{a}_{\text{lok}} = \phi$, de

a konfúzorban $\underline{a}_{\text{konv}} \neq \phi$

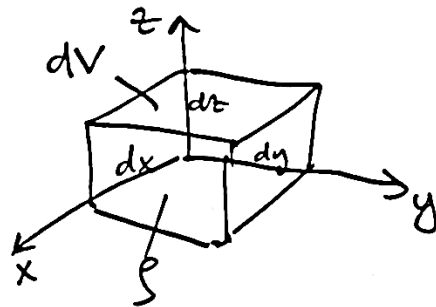
4.

3.2. AZ EULER-EGYENLET

/μ=0/

Az eddigi tanulmányaink alapján már mindent megismertünk, ami a folyadék mozgás leírásához szükséges. Így már áttekinthetünk a mozgásegyenlet tárgyalására, levezetésére. A kiindulás Newton 2. törvénye, amivel a kikötéssel élünk csak, hogy a folyadék sírlódásmentes ($\mu=0$). A Newton 2. törvénye szerint egy m tömegű v sebességű folyadékrész mozgásmennyiségének (mv) egységnyi időre eső teljes megváltozása egyenlő a folyadékrészre ható erők eredőjével ($\Sigma \vec{F}$).

Vizsgálatainkat elemi dV folyadékrészre írjuk fel



Folyadék-elem tömege

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot (dx \cdot dy \cdot dz)$$

Newton II. törvénye:

$$dm \cdot a_{\text{teljes}} = \Sigma \vec{F}$$

elemi
tömeg

teljes
gyorsulás

elemi folyadékre
ható erők eredője



**Euler, Leonhard (1707–1783) Svájci matematikus. 1730-ban Szentpétervárott a fizika, majd a matematika professzora. 1741–66 között Berlinben él. Számelmélettel, geometriával, differenciál- és integrálszámítással, valamint ezek csillagászati és technikai felhasználásával foglalkozott. Lettres à une princesse d'Allemagne (Levelek egy német hercegnőhöz, 1768–72) című műve szélesítette a fizikai alapismeretek körét. Bernoullihoz hasonlóan tízszer kapta meg a Francia Akadémia díját. Megvakult, Szentpétervárott halt meg [13].

4.

3.2.1. Az Euler - egyenlet levezetése elemi folyadékra vonatkozó vizsgálatával / $\mu = 0$ /

Folyadékelem tömege : $dm = \rho dV = \rho \cdot (dx \cdot dy \cdot dz)$

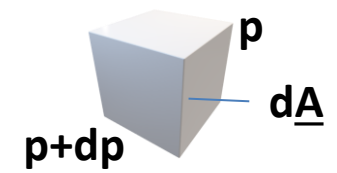
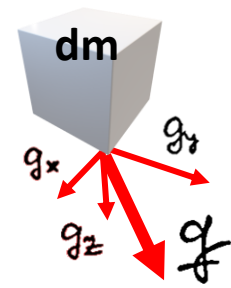
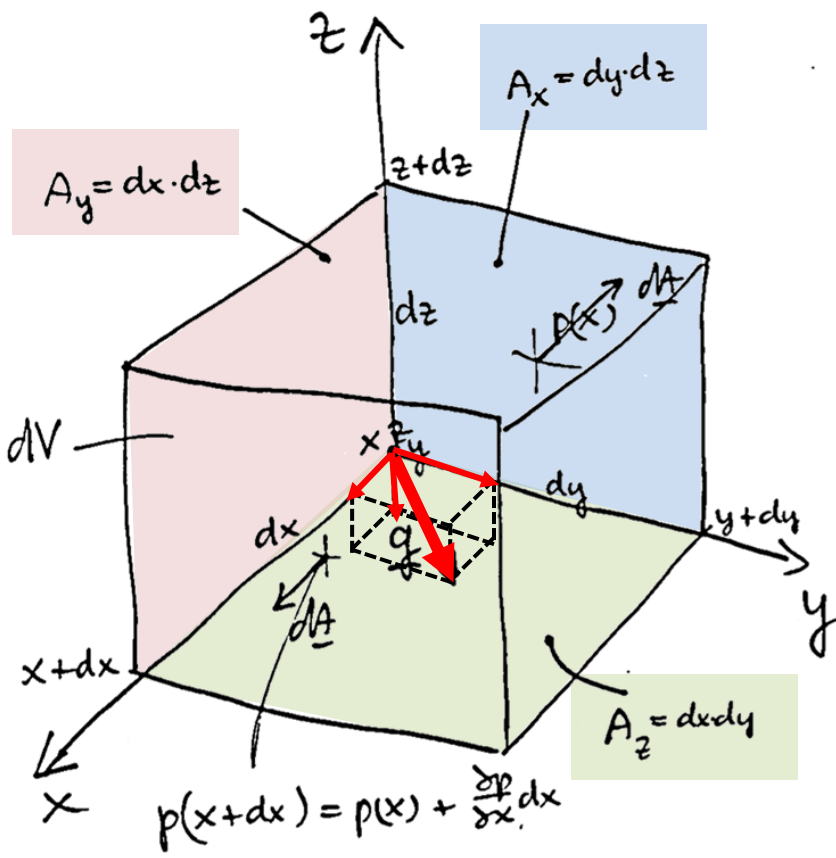
Teljes gyorsulás : $a_{teljes} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}$

Elemi erők eredője : $\sum d\mathbf{F} = d\mathbf{F}_g + d\mathbf{F}_p$

tömegre ható erőteréből származó erő felületen ($\mu = 0$) ható nyomáseltonlásból származó erő

$$d\mathbf{F}_g = dm \cdot \mathbf{g}$$

$$d\mathbf{F}_p = - \int_A p d\mathbf{A}$$



Három dimenzióban felírva :

$$d\mathbf{F}_g = dF_{g,x} \mathbf{i} + dF_{g,y} \mathbf{j} + dF_{g,z} \mathbf{k}$$

$$d\mathbf{F}_p = dF_{p,x} \mathbf{i} + dF_{p,y} \mathbf{j} + dF_{p,z} \mathbf{k}$$

4.

 dF_g ERŐTÉR BŐL
TÖMEGRE HATÓ ERŐ

 dF_p NYOMÁS BŐL
FELÜLETEN HATÓ ERŐ

X:

$$dF_{g,x} = dm \cdot g_x = \rho \cdot (dx \cdot dy \cdot dz) \cdot g_x$$

$$dF_{g,x} = \rho \cdot dV \cdot g_x$$

$$dF_{p,x} = - \left[p(x) \cdot (-dy \cdot dz) + (p(x) + \frac{\partial p}{\partial x} dx) \cdot (dy \cdot dz) \right]$$

$$dF_{p,x} = - \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot (dy \cdot dz) = - \frac{\partial p}{\partial x} dV$$

Y:

$$dF_{g,y} = \rho \cdot dV \cdot g_y$$

$$dF_{p,y} = - \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy \cdot (dx \cdot dz) = - \frac{\partial p}{\partial y} dV$$

Z:

$$dF_{g,z} = \rho \cdot dV \cdot g_z$$

$$dF_{p,z} = - \frac{\partial p}{\partial z} dz \cdot (dx \cdot dy) = - \frac{\partial p}{\partial z} dV$$

Ezzel a teljes gyorsulás:

$$\underbrace{a_{\text{teljes}}}_{\downarrow} = \frac{\sum dF}{dm} = \frac{dF_g + dF_p}{dm} = \underbrace{\frac{dF_g}{dm}}_{\downarrow} + \underbrace{\frac{dF_p}{dm}}_{\downarrow}$$

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

Kifejtett a_{konv}
vektorális
alak.

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

EULER-EGYENLET
egyetlen érvényességi
feltétel: $\mu = 0$ (sűrűmentes)

4.

3.2.2. Az Euler-egyenlet különböző alakjai és alkalmazásuk a folyadékter levegőjében

$$\boxed{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p}$$

Euler-egyenlet

Ha a $\rho = \rho(p)$ sűrűség a nyomás függvénye, akkor

$$-\frac{1}{\rho(p)} \text{grad} p = -\text{grad} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho(p)} \quad \text{alakban felírható.}$$

Euler-egyenlet komponens-egyenletei:

1,

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

2,

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

3.

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Folytonosság (kontinuitás) tétel:

4.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Valamilyen anyag törvény (pl. gáztörvény):

5.

$$\frac{p}{\rho} = RT$$

6.

Energiaegyenlet: $\frac{v^2}{2} + c_p \cdot T = \text{állandó}$

Hat ismeretlen
 $v_x, v_y, v_z, p, \rho, T$
és hat
egyenlet
↓
megoldható!

4.

Euler - egyenlet ($\mu=0$) $\xrightarrow[\text{két pontja között}]{\text{integrálás a tér}}$ Bernoulli - egyenlet

$$\left[\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \right]$$

Stacioner-e az áramlás?
Ha igen, akkor
 $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \phi$

Nyugatlomban van-e a folyadék?
Vagy változik-e az áramlási keresztmetszet?
(Kontinuitás)

Örvényes-e az áramlás?
Forgómozgás-e a folyadék?
Ha nem, akkor
 $\text{rot} \underline{v} = \phi$

Erőter elhanyagolható-e?
Hány erőter hat?

g_g | g_t | g_c

Geredő! $g_g = -\text{grad} U$
Potenciális-e?

Összhangható-e a közegek?
Ha nem, akkor $\rho = \text{const.}$!
Van-e nyomóváltozás?
 $\text{grad} p = ?$

4.

Összefoglalás

3.1 A folyadékrészek gyorsulása

3.2 Az Euler-egyenlet

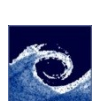
- Folyadékrészek mozgása
- Teljes gyorsulás, lokális és konvektív gyorsulás
- Elemi folyadékrészre ható erők felírása
- Newton II. törvénye alapján mozgásegyenlet
- Euler-egyenlet különböző alakjai

Következő témakör:

3.3 A Bernoulli-egyenlet, a statikus nyomás, a dinamikus nyomás és az össznyomás

3.4 Az Euler-egyenlet természetes koordináta-rendszerben

A tankönyv 3. fejezetének további részében az Euler-egyenlet vonalintegrálját, az ún. Bernoulli-egyenletet írjuk fel. Továbbá, megismerjük az össznyomás, statikus nyomás és dinamikus nyomás fogalmakat, illetve felírjuk az Euler-egyenletet egy speciális ún. természetes koordináta-rendszerben, mely egy, a mérnöki gyakorlatban (pl. járműáramlásban is) igen jól használható kifejezéshez vezet.





na
ez
kősz

un film de Dr. Suda Jenő Miklós

AZ ÁRAMLÁSTAN ALAPJAI