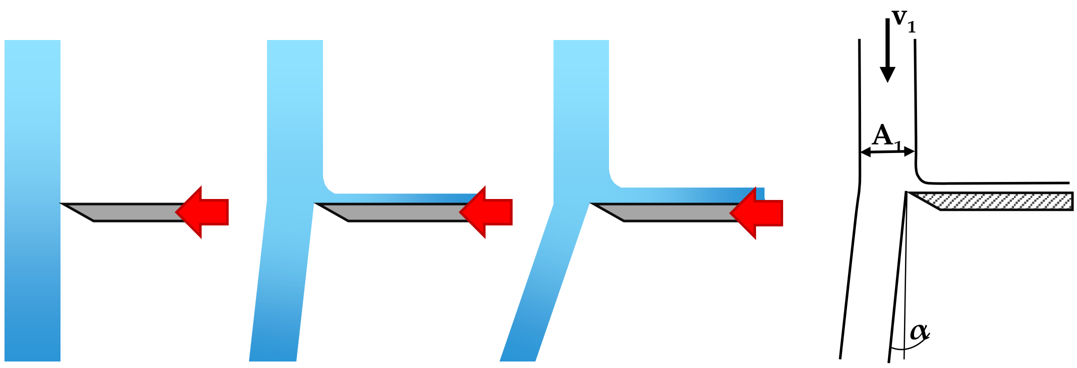
Aufgabe zum Impulssatz

KÉS A VÍZBEN

Amennyiben egy Pelton-turbináról üzemzavar következtében leesik a fékező nyomaték, a járókerék megfut, mely a megnövekedett feszültségek következtében a turbina idő előtti tönkremeneteléhez vezethet. Ennek elkerülésére a lehető leggyorsabban meg kell szüntetnünk a turbina vízrávezetését. A csővezeték hirtelen zárása azonban az Allievi-elmélet értelmében a csövek szétrobbanásához vezethet, így más módszert ajánlatos alkalmazni: a turbina-lapátokra áramló vízsugárba egy vékony lemezélet juttatunk, amely a sugár egy részét a lemezzel párhuzamosan leválasztja. A többi folyadékrész pályája az impulzus-tételből adódóan elhajlik.



Kérdés: Mekkora részét kell a sugárnak leválasztani ahhoz, hogy a többi folyadékrész pályája 5°-kal eltérüljön?
A feladat megoldása során a nehézségi erőtér és a súrlódás hatásától eltekintünk, valamint síkáramlást feltételezünk!

Adatok: $\alpha = 5°$

MEGOLDÁS

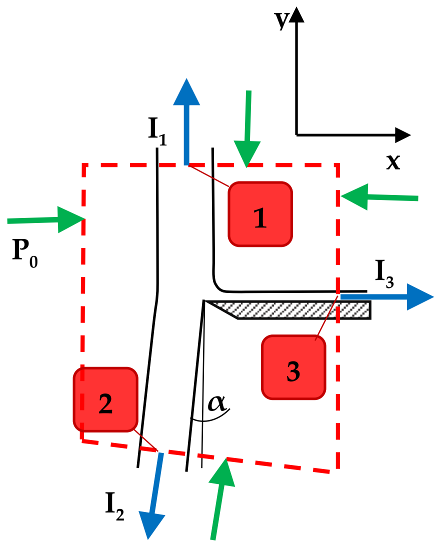
Mivel szabadsugarat vizsgálunk, a **Bernoulli-egyenletből** következően a belépő és kilépő sebességek megegyeznek:

$v_1 = v_2 = v_3 = v$

A **kontinuitásból** pedig meghatározható a keresztmetszetek egymáshoz való viszonya:

$A_1 \cdot v = A_2 \cdot v + A_3 \cdot v$

$A_1 = A_2 + A_3$



Az **impulzustétel** stacioner, súrlódásmentes esetre, súlyerő elhanyagolható és szilárd test van az ellenőrző felületen belül:

$\sum \underline{I_i} = \sum \underline{P} - \underline{R}$

A nyomás az ellenőrző felületen mindenhol légköri:

$\sum \underline{P} = 0$

Az impulzusáram az 1-es keresztmetszetben:
$|\underline{I}_1| = q_{m,1} \cdot v_1 = q_{m,1} \cdot v$
$I_{1,x} = 0$
$I_{1,y} = q_{m,1} \cdot v$
$I_{1,z} = 0$

Az impulzusáram az 2-es keresztmetszetben:
$|\underline{I}_2| = q_{m,2} \cdot v_2 = q_{m,2} \cdot v$
$I_{2,x} = q_{m,2} \cdot v_{2,x} = -q_{m,2} \cdot v \cdot sin\alpha$
$I_{2,y} = q_{m,2} \cdot v_{2,x} = -q_{m,2} \cdot v \cdot cos\alpha$
$I_{2,z} = 0$

Az impulzusáram az 3-es keresztmetszetben:
$|\underline{I}_3| = q_{m,3} \cdot v_3 = q_{m,3} \cdot v$
$I_{2,x} = q_{m,3} \cdot v_{3,x} = q_{m,3} \cdot v$
$I_{2,y} = 0$
$I_{2,z} = 0$

Komponens egyenletek:

- x-irány: a súrlódás elhanyagolása következtében a késre x-irányban nem hat erő

$$I_{1,x} + I_{2,x} + I_{3,x} = 0$$

$$0 = -q_{m,2} \cdot v \cdot sin\alpha + q_{m,3} \cdot v = \rho v^2 A_2 \cdot \sin\alpha - \rho v^2 A_3 =$$

$$= \rho v^2 (A_1 - A_3) \cdot \sin\alpha - \rho v^2 A_3$$

$$(A_1 - A_3) \cdot \sin\alpha = A_3$$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{\sin\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{\sin 5°}{1 + \sin 5°} = 0{,}08 = \mathbf{8}\%$$

A sugárnak tehát 8%-át kell leválasztanunk ahhoz, hogy a többi folyadékrész pályája 5°-kal eltérüljön. A jelenlegi feladat szempontjából az y-irányú komponens-egyenlet nem érdekes, a késre ható erő felírásához azonban szükségessé válhat.

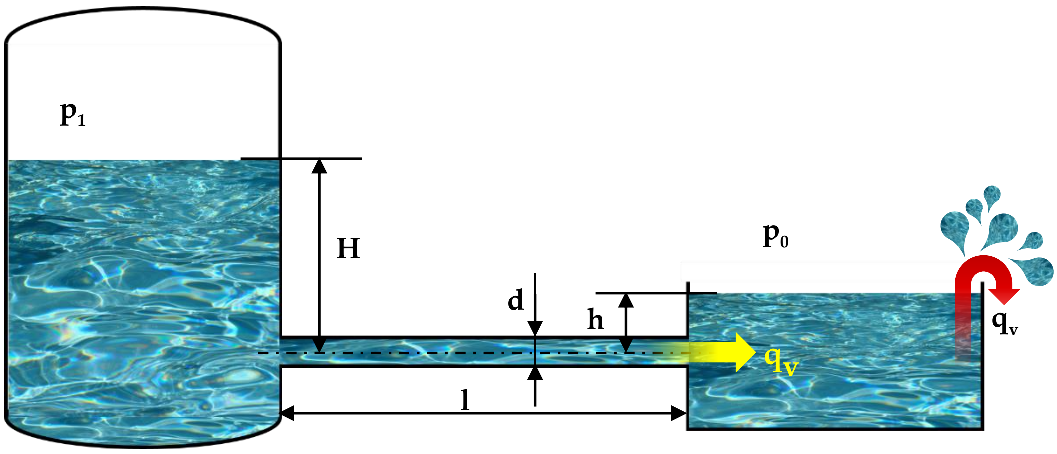
Aufgaben über reibungsbehaftete Strömungen

Teil A: Aufgaben ohne Iteration (Teil B in der nächsten Übung)

TÁPTARTÁLY MÉRETEZÉSE

Egy uszoda medencéjének vízutánpótlását kiegyenlítő tartállyal (hidrofor) biztosítjuk. A táptartályt egyenes csővezeték köti össze a medencével, a csővezeték hidraulikailag simának tekinthető. A medencéből elfolyó q_v vízmennyiség határozza meg, hogy milyen p_1 tápnyomás esetén tartható az állandó vízszint a medencében!

Figyelem: a hidraulikailag sima cső azt jelenti, hogy a fali érdesség nem lóg ki a határréteg lamináris részéből, nem pedig azt, hogy a cső veszteségmentes!



Kérdés: Mekkora p_1 tápnyomás esetén tartható az állandó vízszint a medencében?

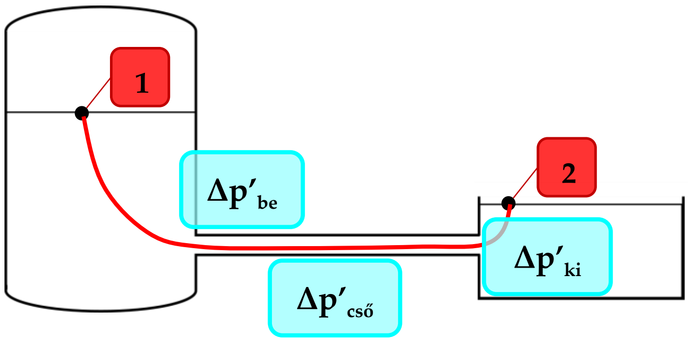
Adatok: q_v = 5 l/s; H = 1,2 m; h = 0,8 m; l = 10 m; d = 50 mm; k = 0 mm; ζ_{be} = 0,07; $\varrho_{víz}$ = 1000 kg/m³; $\upsilon_{víz} = 1{,}3 \cdot 10^{-6}$ m²/s; g = 10 N/kg

MEGOLDÁS

Írjuk fel a veszteséges Bernoulli-egyenletet az tartályfelszín (1) és a medence felszíne (2) közé:

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho U_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \Delta p'$$

- az áramlás iránya 1→2, tehát a 2 oldalhoz kell hozzáadni a veszteséges tagot
- $p_2 = p_0 \leftarrow$ szabad folyadékfelszín
- $U_2 - U_1 = g(h - H)$
- $v_1 \approx v_2 \approx 0 \leftarrow A_{felszín} \gg A_{cső}$ (konti.)



$$\rightarrow p_1 - p_0 = \rho g(h - H) + \Delta p'$$

Veszteség keletkezik a csőbe történő beáramlás, a csősúrlódás valamint a csőből a medencébe történő kilépés következtében:

$$\Delta p' = \Delta p'_{be} + \Delta p'_{cső} + \Delta p'_{ki} = \zeta_{be} \cdot \frac{\rho}{2} v_{cső}^2 + \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} v_{cső}^2 + \frac{\rho}{2} v_{cső}^2$$

$$v_{cső} = \frac{4 q_v}{d^2 \pi} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{0{,}05^2 \pi} = 2{,}55 \frac{m}{s}$$

$$Re = \frac{v_{cső} d}{\nu} = \frac{2{,}55 \cdot 0{,}05}{1{,}3 \cdot 10^{-6}} \cong 98000$$

Mivel az áramlás turbulens, és a cső hidraulikailag sima, és $2300 < Re < 100000$, ezért a csősúrlódási tényező a Blasius formulával számítható:

$$\lambda = \frac{0{,}316}{\sqrt[4]{Re}} = \frac{0{,}316}{\sqrt[4]{98000}} = 0{,}018$$

A veszteséges tagokat visszahelyettesítve a Bernoulli-egyenletbe a szükséges tápnyomás:

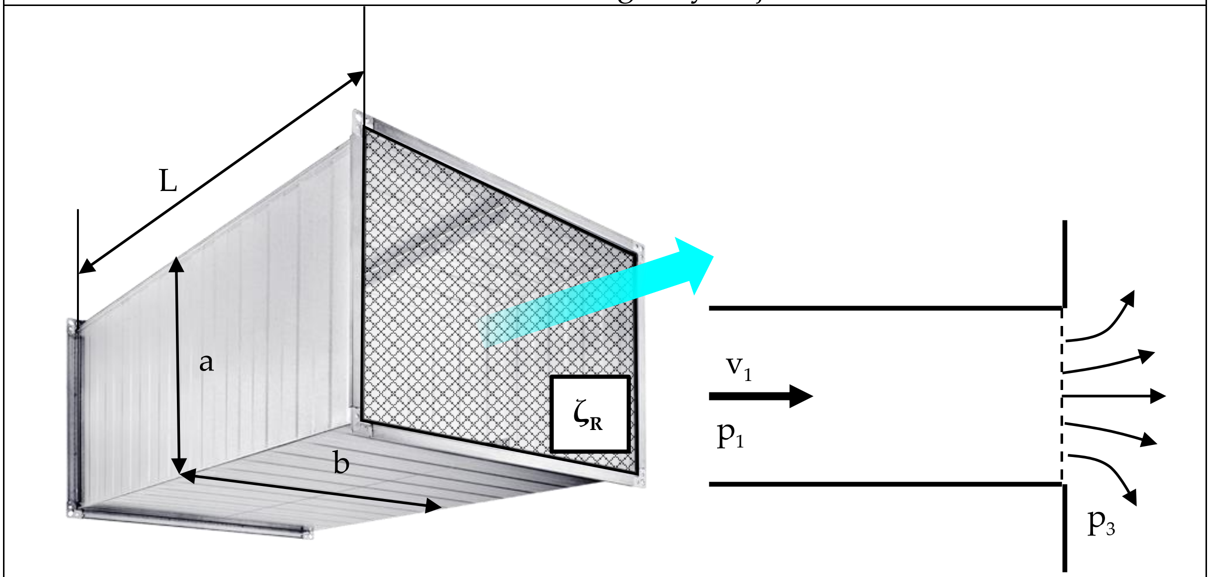
$$p_1 - p_0 = \rho g(h - H) + \zeta_{be} \cdot \frac{\rho}{2} v_{cső}^2 + \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} v_{cső}^2 + \frac{\rho}{2} v_{cső}^2 =$$

$$= 1000 \cdot 10 \cdot (0{,}8 - 1{,}2) + 0{,}07 \cdot \frac{1000}{2} \cdot 2{,}55^2 + 0{,}018 \frac{10}{0{,}05} \cdot \frac{1000}{2} \cdot 2{,}55^2 + \frac{1000}{2} \cdot 2{,}55^2$$

$$= \mathbf{10979 \, Pa}$$

LÉGCSATORNA RÁCCSAL

Az ábrán látható téglalap keresztmetszetű, *0,5 mm* fali érdességű *12 m* hosszúságú csatornán keresztül levegőt szállítunk egy p_3 nyomású helyiségbe. A csatorna kilépő keresztmetszetében található rács veszteség-tényezője $\zeta_R = 0,6$.



Kérdés:	Határozza meg a $p_1 - p_3$ statikus nyomáskülönbséget!
Adatok:	L = 12 m; a = 0,3 m; b = 0,5 mm; k = 0,5 mm; ζ_R = 0,6; v_1 = 8 m/s; ϱ_{lev} = 1,2 kg/m^3; υ_{lev} = 15·10^{-6} m^2/s

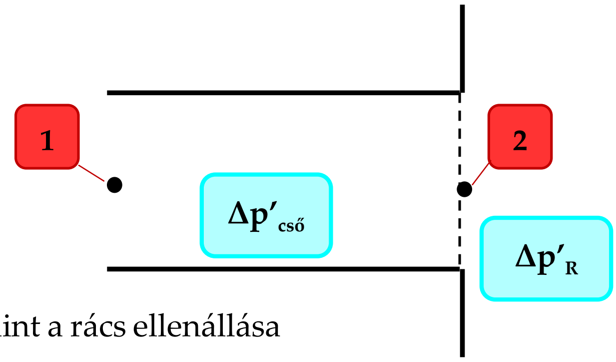
MEGOLDÁS

Írjuk fel a veszteséges Bernoulli-egyenletet az 1-2 pontok között:

$$p_1 + \rho U_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 = p_2 + \rho U_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 + \Delta p'$$

- $p_2 = p_3 \leftarrow$ szabadsugár
- $U_2 - U_2 = 0$
- $v_1 = v_2 = v \leftarrow A_1 = A_2;\ \rho_1 = \rho_2$

$\rightarrow p_1 - p_3 = \Delta p'$



Veszteség keletkezik a csősúrlódás, valamint a rács ellenállása következtében:

$$\Delta p' = \Delta p'_{cső} + \Delta p'_{rács} = \lambda\frac{L}{d_e}\frac{\rho}{2}v^2 + \zeta_R\frac{\rho}{2}v^2$$

A veszteséges tagokat visszahelyettesítve a Bernoulli-egyenletbe kifejezhető a keresett nyomáskülönbség:

$$p_1 - p_3 = \lambda\frac{L}{d_e}\frac{\rho}{2}v^2 + \zeta\frac{\rho}{2}v^2$$

A csősúrlódási tényező meghatározáshoz **szükséges a *Reynolds-szám* és a *d/k* viszony** meghatározása. Mivel a csövünk nem kör keresztmetszetű, ám a feladatmegoldáshoz használt Moody-diagram csak kör keresztmetszetű csövekre érvényes, ezért bevezetjük a hidraulikailag egyenértékű csőátmérő fogalmát. A hidaulikailag egyenértékű átmérő megmutatja, hogy mekkora átmérőjű, kör keresztmetszetű csőnek lenne azonos fali csúsztatófeszültség mellett ugyanakkora nyomásesése azonos hosszon, mint az adott, jelen esetben téglalap keresztmetszetű csőnek. Ez a következőképpen számolható:

$$d_e = \frac{4A}{K} = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}5}{2(0{,}3+0{,}5)} = 0{,}375m$$

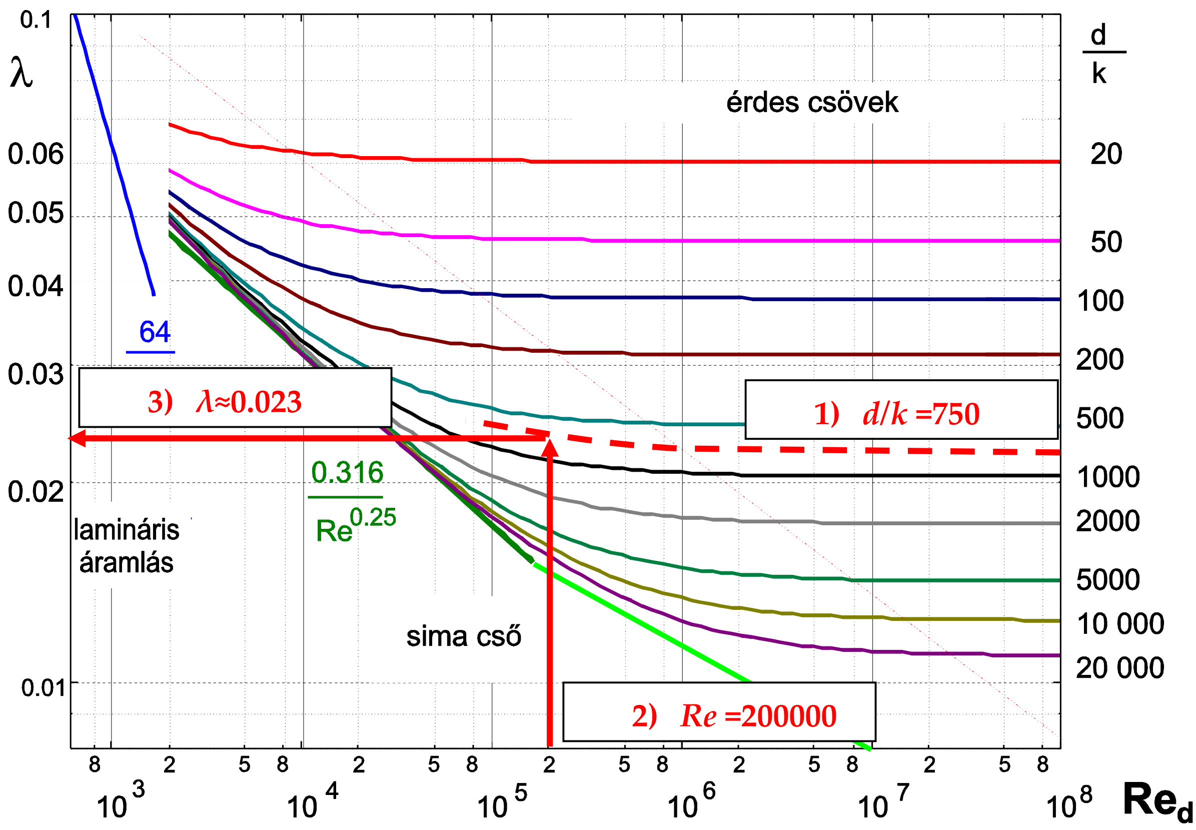
Az egyenértékű átmérő alapján számítható a Reynolds-szám és a relatív érdesség (d/k):

$$Re = \frac{vd_e}{\nu} = \frac{8\cdot 0{,}375}{15\cdot 10^{-6}} = 200000$$

$$\frac{d_e}{k} = \frac{0{,}375}{0{,}5\cdot 10^{-3}} = 750$$

Ezekből az adatokból a csősúrlódási tényező a Moody-diagram segítségével a következő módon határozható meg:

1) az adott ***d/k*** értékhez tartozó vonal megkeresése jobb oldali ordinátán, ha nincs a diagramon „szemmel behúzzuk”
2) az adott ***Re*** felvetítése a ***d/k*** vonalunkra
3) az ehhez a ponthoz tartozó csősúrlódási tényező leolvasása a bal oldali ordinátáról



Tehát a csősúrlódási tényező, és abból a keresett nyomáskülönbség:

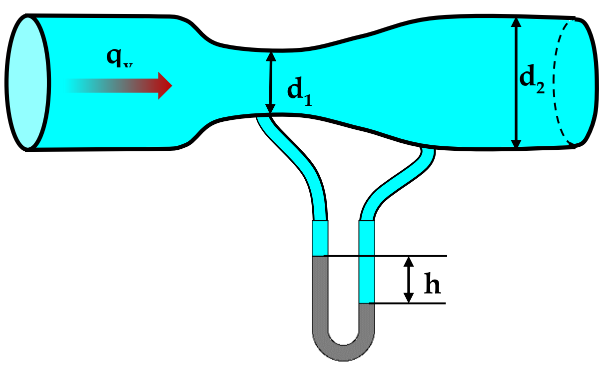
$\lambda = 0{,}023$

$$p_1 - p_3 = \lambda \frac{L}{d_e}\frac{\rho}{2}v^2 + \zeta\frac{\rho}{2}v^2 = 0{,}023 \cdot \frac{12}{0{,}375} \cdot \frac{1{,}2}{2} \cdot 8^2 + 0{,}6 \cdot \frac{1{,}2}{2} \cdot 8^2 = \mathbf{51}\boldsymbol{Pa}$$

TÉRFOGATÁRAM-MÉRÉS VENTURI CSŐVEL

Térfogatáram mérésére Venturi-csövet tervezünk. A Venturi-cső bővülő szakaszának diffúzorhatásfoka 70%. A nyomáskülönbség mérését higanytöltésű U-csöves manométerrel végezzük.

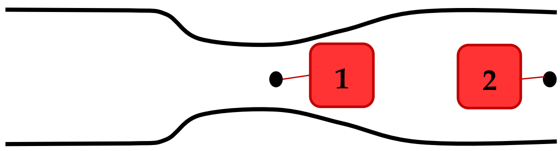
A szállított térfogatáram várhatóan *q_v=1200l/min* lesz, a szállított közeg víz.



Kérdés: Határozza meg a manométer kitérését! (h = ?)

Adatok: q_v = 1200 l/min; d1 = 100 mm; d2 = 200 mm;
$\rho_{víz}$ = 1000 kg/m^3; ρ_{Hg} = 13600 kg/m^3; g = 10 N/kg

MEGOLDÁS



Ideális esetben a diffúzoron létrejövő nyomásnövekedés az 1-2 pontok közé, súrlódásmentes közegre felírt Bernoulli-egyenletből határozható meg:

$$(p_2 - p_1)_{id} = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2)$$

Valóságos esetben azonban a súrlódás miatt a diffúzor nem 100%-os hatásfokú, így az általa létrehozott nyomásnövekedés kisebb lesz, mint az ideális.

$$(p_2 - p_1)_{val} = p_2 - p_1 = \eta_d \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) = \eta_d \frac{\rho}{2} q_v^2 \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right)$$

$$= 0{,}7 \cdot \frac{1000}{2} \cdot \left(\frac{1200 \cdot 10^{-3}}{60}\right)^2 \left(\frac{16}{0{,}1^4\pi^2} - \frac{16}{0{,}2^4\pi^2}\right) = 2128 Pa$$

Kontinuitásból:

$$q_v = v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{q_v}{A_1};\ v_2 = \frac{q_v}{A_2}$$

Az U-csöves manométer kitérésénél nem szabad elfeledkeznünk arról, hogy a manométert a berendezéssel összekötő csőben víz van, aminek sűrűségét a higanyéhoz képest nem hanyagolhatjuk el. Írjuk fel a manométer egyensúlyi egyenletét:

$$p_1 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot h = p_2 + \rho_{víz} \cdot g \cdot h$$

Ebből számítható a manométer kitérése:

$$h = \frac{(p_2 - p_1)_{val}}{(\rho_{Hg} - \rho_{víz})g} = \frac{2128}{(13600 - 1000) \cdot 10} = \mathbf{17 mm}$$