4.

3. Az Euler-egyenlet és a Bernoulli-egyenlet

3.1 A folyadékrészek gyorsulása
3.2 Az Euler-egyenlet
3.3 A Bernoulli-egyenlet, a statikus nyomás, a dinamikus nyomás és az össznyomás
3.4 Az Euler-egyenlet természetes koordináta-rendszerben

4.

3. Az Euler-egyenlet és a Bernoulli-egyenlet

3.1. A folyadékrészecske gyorsulása ($\underline{a}$)

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} \quad \text{és} \quad \underline{v} = v_x \cdot \underline{i} + v_y \cdot \underline{j} + v_z \cdot \underline{k} \quad \begin{cases} v_x(x,y,z,t) \\ v_y(x,y,z,t) \\ v_z(x,y,z,t) \end{cases}$$

Euler-féle leírásban tekintjük a folyadékmozgást.

3.1.1. A lokális és konvektív gyorsulás:

Sebességkomponensekre felírva a teljes megváltozást

$$x: \quad \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \underline{v} \cdot \operatorname{grad} v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$y: \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \underline{v} \cdot \operatorname{grad} v_y = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$z: \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \underline{v} \cdot \operatorname{grad} v_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Tehát:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{v} = \underbrace{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}}_{\underline{a}_{lok}} + \underbrace{\underbrace{\frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{r}}}_{\underline{\underline{D}}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \underline{r}}{\partial t}}_{\underline{v}}}_{\underline{a}_{konv}}$$

$$\boxed{\underline{a}_{teljes} = \underline{a}_{lok} + \underline{a}_{konv}}$$

4.

3.1.2. A konvektív gyorsulás kifejezésének átalakítása

A későbbi mozgásegyenlet miatt célszerű lesz, ha átalakítjuk a konvektív gyorsulás tagot.

$$\underline{a}_{konv} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{v}$$

Deriválttenzor felbontása (ismét, de máshogy)

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}^T + \left(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T\right)$$

Ezzel:

$$\underline{a}_{konv} = \underbrace{\underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{v}}_{?\,1} + \underbrace{\left(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T\right)\underline{v}}_{?\,2}$$

1.

$$\underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\text{—''—} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\text{—''—} \right) \end{bmatrix} = \boxed{\operatorname{grad} \frac{v^2}{2}}$$

4.

(2) $(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T) \cdot \underline{v} = \mathrm{rot}\,\underline{v} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \mathrm{rot}\,\underline{v}$

Fenti (1) és (2) átalakítással kapjuk:

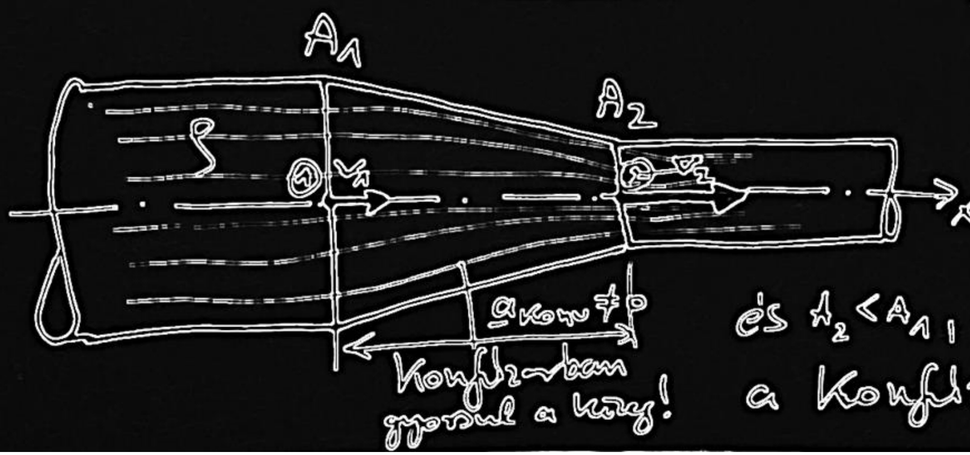
$$\underline{a}_{konv} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{v} = \underline{\underline{D}}^T \underline{v} + (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T)\underline{v} = \mathrm{grad}\frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \mathrm{rot}\,\underline{v}$$

A teljes gyorsulás ezzel felírható:

$$\boxed{\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \mathrm{rot}\,\underline{v}}$$

Ez látszólag bonyolultabb, de előnyös lesz!

3.1.3. Áramlás konfúzorban



$\underline{a}_{teljes} = \underline{a}_{lok} + \underline{a}_{konv}$

Mivel $A_1 > A_2$, ha ϱ = állandó, akkor kontinuitás miatt

$$v_2 > v_1$$

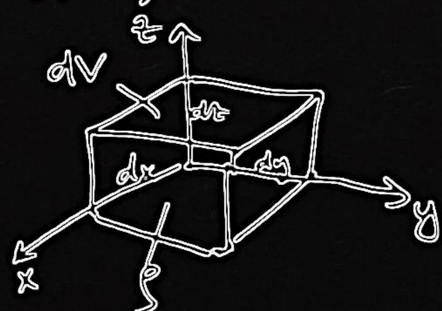
Ha stacioner az áramlás, és $A_2 < A_1$, akkor $\underline{a}_{lok} = \phi$, de a konfúzorban $\boxed{\underline{a}_{konv} \neq \phi}$

4.

3.2. Az Euler-egyenlet

Az eddigi tanulmányaink alapján már mindent megismertünk, ami a folyadék mozgás leírásához szükséges. Így már áttérhetünk a mozgásegyenlet tárgyalására, levezetésére. A kiindulás Newton 2. törvénye, azzal a kikötéssel élünk csak, hogy a folyadék súrlódásmentes ($\mu = 0$). A Newton 2. törvénye szerint egy m tömegű $\underline{v}$ sebességű folyadékrészen mozgásmennyiségének ($m\underline{v}$) egységnyi időre eső teljes megváltozása egyenlő a folyadékrészre ható erők eredőjével ($\Sigma\underline{F}$).

Vizsgálatunkat elemi dV folyadékrészre írjuk fel

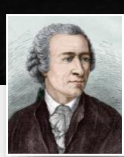


Folyadékelem tömege

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot (dx \cdot dy \cdot dz)$$

Newton II. törvénye:

$$\underbrace{dm}_{\text{elemi tömeg}} \cdot \underbrace{\underline{a}_{teljes}}_{\text{teljes gyorsulás}} = \underbrace{\Sigma d\underline{F}}_{\text{elemi folyadékrészre ható erők eredője}}$$



**Euler, Leonhard (1707–1783) Svájci matematikus. 1730-ban Szentpétervárott a fizika, majd a matematika professzora. 1741–66 között Berlinben él. Számelmélettel, geometriával, differenciál- és integrálszámítással, valamint ezek csillagászati és technikai felhasználásával foglalkozott. Lettres à une princesse d' Allemagne (Levelek egy német hercegnőhöz, 1768–72) című műve szélesítette a fizikai alapismeretek körét. Bernoullihoz hasonlóan tízszer kapta meg a Francia Akadémia díját. Megvakult, Szentpétervárott halt meg [13].

4.

3.2.1. Az Euler-egyenlet levezetése elemi folyadékrészre ható erők vizsgálatával

Folyadékelem tömege : $dm = \rho\, dV = \rho\cdot(dx\cdot dy\cdot dz)$

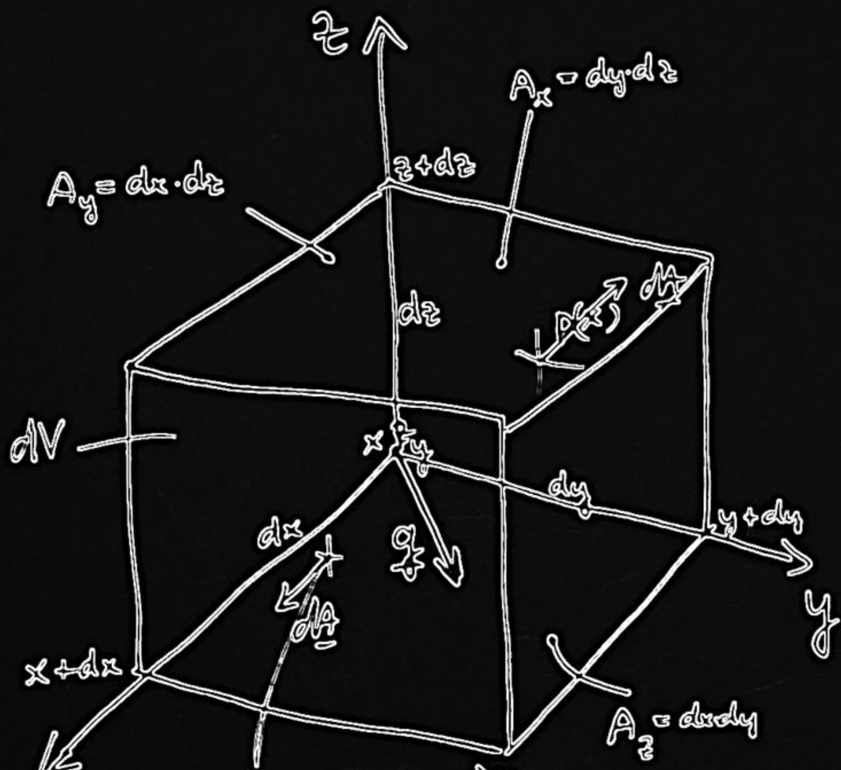
Teljes gyorsulás : $\underline{a}_{telj} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad}\frac{v^2}{2} - \underline{v}\times \text{rot}\,\underline{v}$

Elemi erők eredője : $\sum d\underline{F} = d\underline{F}_g + d\underline{F}_p$

tömegre ható erőtérből származó erő

felületen ($\mu=0$) ható nyomáseloszlásból származó erő

$$\boxed{d\underline{F}_g = dm\cdot \underline{g}} \qquad \boxed{d\underline{F}_p = -\int_A p\, d\underline{A}}$$



$p(x+dx) = p(x) + \frac{\partial p}{\partial x}dx$

Három dimenzióban felírva :

$$d\underline{F}_g = dF_{g,x}\cdot\underline{i} + dF_{g,y}\cdot\underline{j} + dF_{g,z}\cdot\underline{k}$$

$$d\underline{F}_p = dF_{p,x}\cdot\underline{i} + dF_{p,y}\cdot\underline{j} + dF_{p,z}\cdot\underline{k}$$

4.

	$d\underline{F}_g$ ERŐTÉRBŐL TÖMEGRE HATÓ ERŐ	$d\underline{F}_p$ NYOMÁSBÓL FELÜLETEN HATÓ ERŐ
X:	$dF_{g,x} = dm\cdot g_x = \rho\cdot(dx\cdot dy\cdot dz)\cdot g_x$ $dF_{g,x} = \rho\cdot dV\cdot g_x$	$dF_{p,x} = -\left[p(x)\cdot(-dy\cdot dz) + \left(p(x) + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)(dy\cdot dz)\right]$ $dF_{p,x} = -\frac{\partial p}{\partial x}dx\cdot(dy\cdot dz) = -\frac{\partial p}{\partial x}\cdot dV$
Y:	$dF_{g,y} = \rho\cdot dV\cdot g_y$	$dF_{p,y} = -\frac{\partial p}{\partial y}\cdot dy\,(dx\cdot dz) = -\frac{\partial p}{\partial y}dV$
Z:	$dF_{g,z} = \rho\cdot dV\cdot g_z$	$dF_{p,z} = -\frac{\partial p}{\partial z}dz\,(dx\cdot dy) = -\frac{\partial p}{\partial z}dV$

Ezzel a teljes gyorsulás:

$$\underline{a}_{teljes} = \frac{\Sigma d\underline{F}}{dm} = \frac{d\underline{F}_g + d\underline{F}_p}{dm} = \frac{d\underline{F}_g}{dm} + \frac{d\underline{F}_p}{dm}$$

$$\boxed{\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad}\frac{v^2}{2} - \underline{v}\times\text{rot}\,\underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho}\text{grad}\,p}$$

Kifejtett $\underline{a}_{konv}$ vektoriális alak.

$$\boxed{\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} - \frac{1}{\rho}\text{grad}\,p}$$

EULER-EGYENLET

egyetlen érvényességi feltétel: $\mu = 0$ (súrlódásmentes)

4.

3.2.2. Az Euler-egyenlet különböző alakjai és alkalmazásuk a folyadéktér leírására

$$\boxed{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \operatorname{rot}\underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p}$$

Euler-egyenlet

Ha a $\rho = \rho(p)$ sűrűség a nyomás függvénye, akkor

$$-\frac{1}{\rho(p)}\operatorname{grad} p = -\operatorname{grad}\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{\rho(p)}$$

alakban felírható.

Euler-egyenlet komponens-egyenletei:

1., $\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$

2., $\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$

3. $\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$

Folytonosság (kontinuitás) tétele:

4. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$

Valamilyen anyagtörvény (pl. gáztörvény):

5. $\frac{p}{\rho} = RT$

6. **Energiaegyenlet:** $\frac{v^2}{2} + c_p T = \text{állandó}$

Hat ismeretlen $v_x, v_y, v_z, p, \rho, T$ és hat egyenlet

$\Downarrow$

megoldható!

4.

Euler-egyenlet ($\mu=0$) $\xrightarrow[\text{két pontja között}]{\text{integrálás a tér}}$ Bernoulli-egyenlet

$$\boxed{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{v^2}{2} - \underline{v}\times \operatorname{rot}\underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p}$$

Stacioner-e az áramlás? Ha igen, akkor $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = 0$

Nyugalomban van-e a folyadék? Vagy változik-e az áramlási keresztmetszet? (Kontinuitás

Örvényes-e az áramlás? Forognak-e a foly. részek? Ha nem, akkor $\operatorname{rot}\underline{v} = 0$

Erőtér elhanyagolható-e? Hány erőtér hat?

g_g ; g_t ; g_c

$g_{eredő}$! $g_g = -\operatorname{grad} U$

Potenciálos-e?

Összenyomható-e a közeg? Ha nem, akkor $\rho =$ áll.! Van-e nyomásváltozás?

$\operatorname{grad} p = ?$

4.

Összefoglalás

3.1 A folyadékrészek gyorsulása
3.2 Az Euler-egyenlet

- **Folyadékrészek mozgása**
- **Teljes gyorsulás, lokális és konvektív gyorsulás**
- **Elemi folyadékrészre ható erők felírása**
- **Newton II. törvénye alapján mozgásegyenlet**
- **Euler-egyenlet különböző alakjai**

Következő témakör:
3.3 A Bernoulli-egyenlet, a statikus nyomás, a dinamikus nyomás és az össznyomás
3.4 Az Euler-egyenlet természetes koordináta-rendszerben
A tankönyv 3. fejezetének további részében az Euler-egyenlet vonalintegrálját, az ún. Bernoulli-egyenletet írjuk fel. Továbbá, megismerjük az össznyomás, statikus nyomás és dinamikus nyomás fogalmakat, illetve felírjuk az Euler-egyenletet egy speciális ún. természetes koordináta-rendszerben, mely egy, a mérnöki gyakorlatban (pl. járműáramlástanban is) igen jól használható kifejezéshez vezet.


na
ez
kész
un film de Dr. Suda Jenő Miklós
Az Áramlástan Alapjai