

5.GYAKORLAT (10. oktatási hét)

Lehetséges témakörök a 10. heti 5. gyakorlatra:

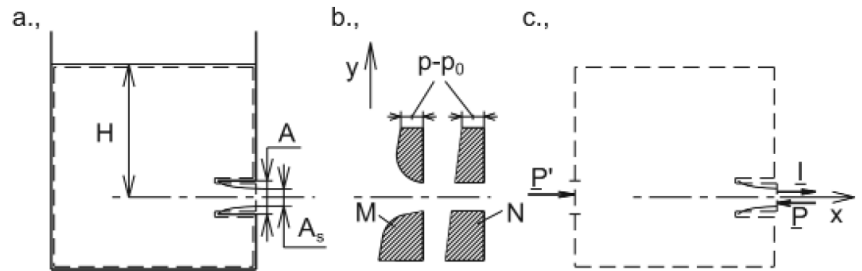
- Gyakorlati anyag: impulzustétel és alkalmazásaira gyakorló példák,
- Előadáson elhangzott: impulzustétel elmélet, példák: vízszugárra merőleges álló/mozgó „teli” síklapra ható erő, Pelton turbina lapátra ható erő, autót felemelése vízszugárral (tűzoltók... MythBusters), és impulzustétel $\rho \neq \text{áll.}$ esetre alkalmazása.

Javasolt gyakorlatra:

- A) Borda-féle kifolyónyílásra egy példa
- B) Légcsavar tolóerőre egy példa
- C) Szélturbina teljesítmény számítására egy példa

PÉLDA (Borda féle kifolyónyílás, lásd tankönyv 7.2.1.)

Lásd tankönyv: 7.2.1: A Borda-féle kifolyónyílás kontrakciós tényezőjének ($\alpha_S = A_S/A$) paraméteres levezetése impulzustétellel. (A Borda-féle kifolyásra az elméleti értékre $\alpha_{S,elm} = 0,5$ kapunk, a gyakorlatban $\alpha_{S,gyak} \approx 0,6$. A különféle kifolyónyílások kontrakciós tényezőjének gyakorlati értéke $0,6 < \alpha < 1$.



7.4. ábra
Borda-féle kifolyónyílás

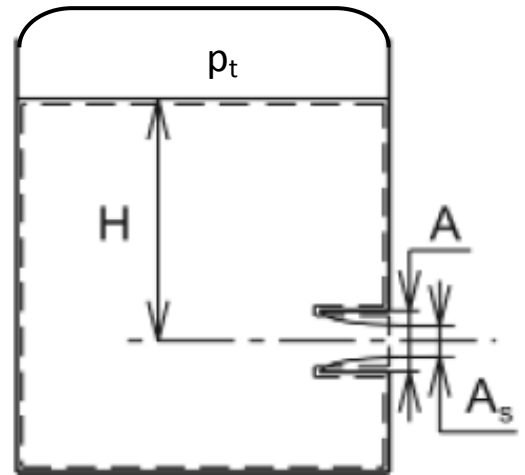
PÉLDA (Borda féle kifolyónyílás)

Egy vízzel ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) teli $p_t = 2 \text{ bar}$ nyomású tartályból az $A = 0,01 \text{ m}^2$ keresztmetszetű Borda-féle kifolyónyíláson ($\alpha_S = 0,6$) keresztül víz áramlik ki a $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ nyomású szabadba az ábrán látható módon. ($g = 10 \text{ N/kg}$; $A_{\text{tartály}} \gg A$) Az A_S kontrahált keresztmetszeten a víz sebessége ismert $v_S = 20 \text{ m/s}$.

FELTÉTELEK: $\mu = 0$; $\rho = \text{áll.}$; stacioner áramlás, a folyadékra ható súlyerő elhanyagolható.

KÉRDÉS: Határozza meg

- a tartálybeli H vízszlop magasság értékét ($H = ?$)
- a kontrahált A_S keresztmetszet nagyságát ($A = ?$)
- és a vízszugár A keresztmetszetbeli átlagsebességét! ($v = ?$)
- a vízszugár tömegáramát! $q_m = ?$



MEGOLDÁS (a túloldalon is folytathatja)

Bernoulli-egyenlet tartály vízfelszín és A_S kontrahált keresztmetszet között:

$$p_t + \rho \cdot g \cdot H = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot v_S^2$$

$$H = \frac{p_0 - p_t + \frac{\rho}{2} \cdot v_S^2}{\rho \cdot g} = 10 \text{ m}$$

Borda-féle kifolyónyílás kontrakciós tényezője: $\alpha_S = A_S/A = 0,6$; így $A_S = A \cdot 0,6 = 0,006 \text{ m}^2$

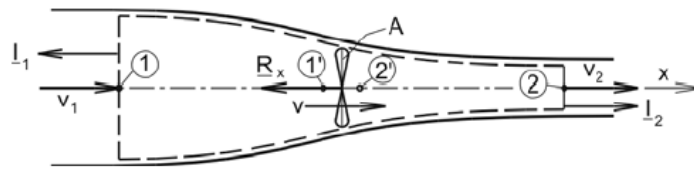
Folytonosság tétele A és A_S között: $v = v_S \frac{A_S}{A} = v_S \cdot 0,6 = 12 \text{ m/s}$

A tömegáram: $q_m = \rho \cdot v \cdot A = 1000 \cdot 12 \cdot 0,01 = 120 \text{ kg/s}$

PÉLDA (Légcsavar sugárelmélete, lásd tankönyv 7.4.2.)

ADATOK: Repülőgép sebessége 162km/h; $\rho=1,2\text{kg/m}^3$; 1db légcsavar $A=1\text{m}^2$; $v_2=243\text{km/h}$.

KÉRDÉSEK: Mekkora a légcsavar tolóerő és a propulziós hatásfok értéke?



7.11. ábra

Áramlás légcsavaron keresztül

Impulzustételből kapjuk R_x -et

$$R_x = \rho v_1^2 A_1 - \rho v_2^2 A_2.$$

Folytonosság tételét ($\rho \cdot v \cdot A = \rho \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho \cdot v_2 \cdot A_2$) felhasználva

$$R_x = \rho v A (v_1 - v_2).$$

A légcsavarra ható erő felírható így v -vel, ahol $(\rho \cdot v \cdot A)$ a légcsavaron átáramló levegő tömegárama.

Bernoulli-egyenletekből kapjuk:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_1'^2}{2} + \frac{p_1'}{\rho}$$

$$\frac{v_2'^2}{2} + \frac{p_2'}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho},$$

Rendezve:

$$p_1' - p_2' = \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2).$$

Légcsavarra ható erő $R_x = \Delta p \cdot A$:

$$R_x = \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) A$$

Fentiek alapján az alábbi egyenlőségéből:

$$R_x = \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) A = \rho v A (v_1 - v_2).$$

kifejezhető a légcsavaron átáramló levegő átlagos sebessége, v :

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Légcsavarra ható erő ($R_x = -T$, ahol $T[\text{N}]$ a légcsavar tolóereje):

$$T = -R_x = \rho v A (v_2 - v_1)$$

Hasznos teljesítmény a repülő sebességével számolt $P_h[\text{W}]$:

$$P_h = v_1 |R_x|.$$

A bevezetett teljesítmény a közeg légcsavaron átáramoltatásához szükséges teljesítmény $P_{be}[\text{W}]$:

$$P_{be} = v |R_x|.$$

Ezekkel definiálható a légcsavar ún. η_p propulziós hatásfoka:

$$\eta_p = \frac{v_1 R}{v R} = \frac{v_1}{v} = \frac{2}{1 + v_2/v_1}.$$

MEGOLDÁS (a túloldalon is folytathatja)

A repülő sebessége: $v_1=162\text{km/h}=162/3,6=45\text{m/s}$

A légsugár sebessége: $v_2=243\text{km/h}=243/3,6=67,5\text{m/s}$

Légcsavaron átáramló levegő átlagos sebessége: $v = \frac{v_1+v_2}{2} = \frac{162/3,6+243/3,6}{2} = 56,25\text{m/s}$

Tolóerő: $T=-R_x=-\rho v A (v_1-v_2)=-1,2 \cdot 56,25 \cdot 1 \cdot (45-67,5)=1518,75\text{N}$

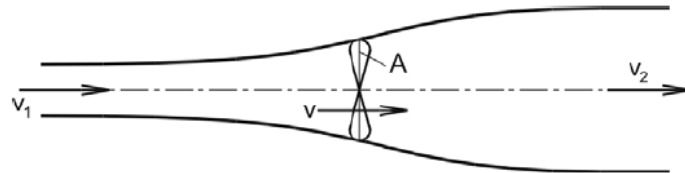
Propulziós hatásfok jelen légcsavarra: $\eta_p=80\%$

PÉLDA (Szélturbina, lásd tankönyv 7.4.3.)

ADATOK: $v_{\text{szél}}=36\text{km/h}$; $\rho=1,2\text{kg/m}^3$. A szélturbina A keresztmetszetének átmérője $D=40\text{m}$.

KÉRDÉSEK:

- Mekkora a szélturbina P_{max} elméleti max. teljesítménye, és a P_h hasznos teljesítménye, ha minden egyéb veszteséget $\eta=60\%$ hatásfokkal veszünk figyelembe?
- Mekkorára változik P_{max} értéke, ha a szélsébség a felére csökken?
- Mekkorára változik P_{max} értéke, ha a szélkerék átmérője kétszeres? $D=80\text{m}$
- Mekkorák egy kisméretű, $A=1\text{m}^2$ szélturbinára a fenti A) és B) kérdésekben szereplő P_{max} teljesítmény értékek?



7.12. ábra
Áramlás a szélkeréken keresztül

A szélturbina teljesítménye ($P \sim v_1^3$) felírható:

$$P = \rho A \frac{v_1 + v_2}{2} \left(\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} \right)$$

Keressük a P maximumát v_2 függvényében ($\partial P / \partial v_2 = 0$)

A $\partial P / \partial v_2 = 0$ kifejezésből kapjuk:

$$v_2 = \frac{1}{3} v_1$$

Tehát olyan szélturbinát kell alkalmaznunk, mely a rááramlás sebességének harmadára csökkenti a szélsébséget. Behelyettesítve P összefüggésébe ezt a maximális teljesítménye kapjuk:

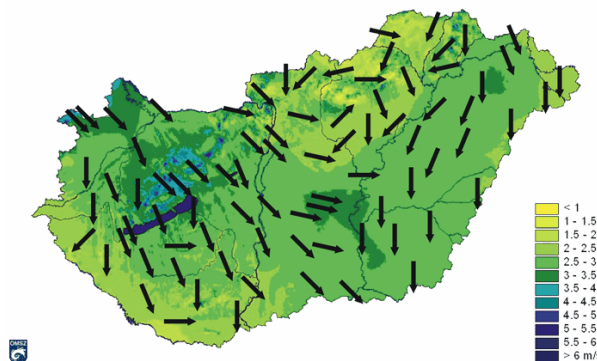
$$P_{\text{max}} = \frac{16}{27} \frac{\rho}{2} A v_1^3$$

A kifejezésben szereplő $16/27$ érték ($\sim 59\%$) az ún. Betz-limit, amely az az elméleti határérték, amely kifejezi, hogy a szél másodpercenkénti mozgási energiájának még veszteségmentes esetben is csak az 59% -át lehet mechanikai energiává alakítani.

- Telepítünk egy összesen 200.000 -Ft költségű $A=1\text{m}^2$ szélkereket a háztetőnkre. Hány év az elméleti megtérülési idő, ha egész évben jó irányból fúj a $v_{\text{átlag}}=2,5\text{m/s}$ értékű átlagos szélsébség, valamint $\dot{A} = 12,50$ Ft/kWh átvételi árral számolunk? (Itt is felvehetünk egy $\eta=60\%$ értéket.)

Megjegyzés: „Hazánkban országos átlagban évente 122 szeles nap fordul elő (vagyis amikor a szél legerősebb lökésének sebessége eléri vagy meghaladja a 10m/s -t), és ezek közül 35 nap viharos (vagyis ennyi alkalommal nagyobb a szélhőkés 15m/s -nál is)”

Forrás: https://www.met.hu/eghajlat/magyarorszag_eghajlata/altalanos_eghajlati_jellemzes/szel/



Az évi átlagos szélsébségek [m/s] és az uralkodó szélirányok Magyarországon (2000-2009)

EGYEBEK: http://magyarenergetika.hu/wp-content/uploads/energia_muhely_dok/12_Kircsi_Toht_MET20170928.pdf

MEGOLDÁS (a túloldalon is folytathatja)

ADATOK: $v_{szél}=36\text{km/h}$; $\rho=1,2\text{kg/m}^3$. A szélturbina A keresztmetszetének átmérője $D=40\text{m}$.
KÉRDÉSEKRE VÁLASZOK:

- A) Mekkora a szélturbina P_{\max} elméleti max. teljesítménye, és a P_h hasznos teljesítménye, ha minden egyéb veszteséget $\eta=60\%$ hatásfokkal vesszük figyelembe?

$$P_{\max} = \frac{16\rho}{272} Av^3 = \frac{16}{54} \cdot 1,2 \cdot A \cdot 10^3 = 446\,804\text{ W} \cong 447\text{ kW}$$

$$P_h = \eta P_{\max} = 0,6 \cdot 446\,804\text{ W} \cong 268\,083\text{ W} = 268\text{ kW}$$

- B) Mekkora változik P_{\max} értéke, ha a szélesség a felére csökken?

$$P'_{\max} = (v'/v)^3 \cdot P_{\max} = 0,5^3 \cdot P_{\max} = 0,125 \cdot P_{\max} = 55,85\text{ kW}$$

- C) Mekkora változik P_{\max} értéke, ha a szélkerék átmérője kétszeres? $D'=80\text{m}$

$$P''_{\max} = (D'/D)^2 \cdot P_{\max} = 2^2 \cdot P_{\max} = 4 \cdot P_{\max} = 1\,787\,217\text{ W} = 1,787\text{ MW}$$

- D) Egy kisméretű, $A'=1\text{m}^2$ szélturbinára mekkorák a fenti A) és B) kérdésekben szereplő P_{\max} teljesítmény értékek?

$$\text{Az eredeti } D=40\text{m} \text{ szélturbinára } A=D^2\pi/4=1256,637\text{ m}^2=1257\text{ m}^2$$

Tehát 1257-ed részére csökkennek az értékek:

$$P'''_{\max} = (A'/A) \cdot P_{\max} = (1\text{m}^2/1257\text{ m}^2) \cdot P_{\max}$$

Ezzel az A) és B) kérdésekre a válaszok:

$$\text{D/A) } P'''_{\max} = 447\text{kW} / 1257 = 355\text{ W}$$

$$P'''_h = 0,6 \cdot P'_{\max} = 213\text{ W}$$

$$\text{D/B) } P'''_{\max} = 55,85\text{kW} / 1257 = 44,4\text{ W}$$

$$P'''_h = 0,6 \cdot P'_{\max} = 27\text{ W}$$

- E) Telepítünk egy összesen 200.000.-Ft költségű $A=1\text{m}^2$ szélkereket a háztetőnkre. Hány év az elméleti megtérülési idő, ha egész évben jó irányból fúj a $v_{\text{átlag}}=2,5\text{m/s}$ értékű átlagos szélesség, valamint $\dot{A} = 12,50\text{ Ft/kWh}$ átvételi árral számolunk? (Itt is felvehetünk egy $\eta=60\%$ értéket.)

$$P_{\max} = \frac{16\rho}{272} Av^3 = \frac{16}{27} \cdot 1,2/2 \cdot 1 \cdot 2,5^3 = 5,55\text{ W}$$

$$P_h = \eta \cdot P_{\max} = 0,6 \cdot 5,55\text{ W} \cong 3,33\text{ W} (= 3,33 \cdot 10^{-3}\text{kW})$$

E)Megoldása:

$$\text{A haszon évente: } H = (3,33 \cdot 10^{-3}\text{kW} \cdot 12,50\text{Ft/kWh} \cdot 8760\text{h/év}) = 365\text{-Ft/év}$$

$$\dot{E} = (\text{költség})/(\text{haszon/év}) = (200.000\text{-Ft})/(365\text{-Ft/év}) = 548\text{ év}$$

Még 2 x átlagos szélesség (5m/s) esetén is $\dot{E}=68\text{ év}$.

Még 4 x átlagos szélesség (10m/s) esetén is $\dot{E}=8,6\text{ év}$.

PÉLDA (impulzustétel)

Az $A_1=100\text{cm}^2$ keresztmetszetű víz szabadsugár a vízszintes síkban az abszolút rendszerben értelmezett állandó $v_1=50\text{m/s}$ sebességgel áramlik a vele azonos irányban

a) $u=0\text{m/s}$ álló vagy

b) $u=+20\text{m/s}$, vagy

c) $u=-20\text{m/s}$ sebességgel mozgó

lyukas ($A_4=50\text{cm}^2$) tárcsára. A tárcsa szélén (fent „2”, lent „3” pontban leáramló és a lyukon keresztül átáramló víz relatív sebességei (w) az ábrán nyíllal jelöltek.

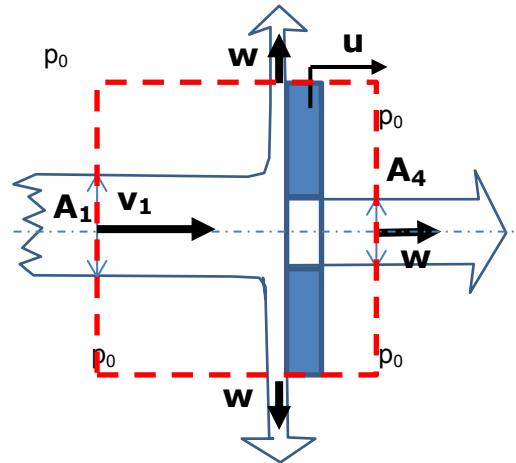
FELTÉTELEK: $\rho=\text{áll.}$, $\mu=0$, a szabadsugárra a nehézségi erőter hatása elhanyagolható.

ADATOK: $p_0=10^5\text{Pa}$, $g=10\text{N/kg}$; $\rho_{\text{víz}}=1000\text{kg/m}^3$

KÉRDÉS: Határozza meg a lyukas tárcsára ható erőt!

R=?

Megjegyzés: Kérem, rajzolja be az ábrába a felvett koordináarendszert és az ellenőrző felületet! A példa megoldása ezek nélkül nem értelmezhető!



MEGOLDÁS

Az $A_{e.f.}$ felvétele, valamint pl. $(x \rightarrow, y \uparrow)$ irányítottságú koordináarendszer felvétele az első lépés. Az $A_{e.f.}$ -en mindenhol p_0 a nyomás. Folytonosság és szimmetria: $A_2=A_3=(A_1-A_4)/2=25\text{cm}^2$. $\rho=\text{áll.}$, súlyerő elhanyagolható.

a) $u=0\text{m/s}$ (álló tárcsa),

Az 1-2, 1-3, 1-4 áramvonalakon felírt Bernoulli-egyenletekből $v_1=v_2=v_3=v_4=50\text{m/s}$.

Az impulzustétel **x irányban** felírt komponensegyenlete:

$$-\rho_1 v_1^2 A_1 + \rho_4 v_4^2 A_4 = -R_x$$

Az impulzustétel **y irányban** felírt komponensegyenlete:

$$+\rho_2 v_2^2 A_2 - \rho_3 v_3^2 A_3 = -R_y$$

b) $u=+20\text{m/s}$ (rááramló vízszugárral azonos irányban mozgó tárcsa),

Az 1-2, 1-3, 1-4 áramvonalakon relatív (tárcsához rögzített) koordináarendszerben) felírt Bernoulli-egyenletekből $w_1=w_2=w_3=w_4=50-20=30\text{m/s}$. (**$w=y-u$**)

Az impulzustétel **x irányban** felírt komponensegyenlete relatív rendszerben:

$$-\rho_1 w_1^2 A_1 + \rho_4 w_4^2 A_4 = -R_x$$

Az impulzustétel **y irányban** felírt komponensegyenlete relatív rendszerben:

$$+\rho_2 w_2^2 A_2 - \rho_3 w_3^2 A_3 = -R_y$$

c) $u=-20\text{m/s}$ (rááramló vízszugárral szemben mozgó tárcsa),

Az 1-2, 1-3, 1-4 áramvonalakon relatív (tárcsához rögzített) koordináarendszerben) felírt Bernoulli-egyenletekből $w_1=w_2=w_3=w_4=50-(-20)=70\text{m/s}$. (**$w=y-u$**)

Az impulzustétel **x irányban** felírt komponensegyenlete relatív rendszerben:

$$-\rho_1 w_1^2 A_1 + \rho_4 w_4^2 A_4 = -R_x$$

Az impulzustétel **y irányban** felírt komponensegyenlete relatív rendszerben:

$$+\rho_2 w_2^2 A_2 - \rho_3 w_3^2 A_3 = -R_y$$

A ható **R** erő R_x ill R_y komponenseire fenti két komponensegyenlet rendezhető, majd **R** nagysága és iránya kiszámítható, felrajzolható.

PÉLDA (impulzustétel)

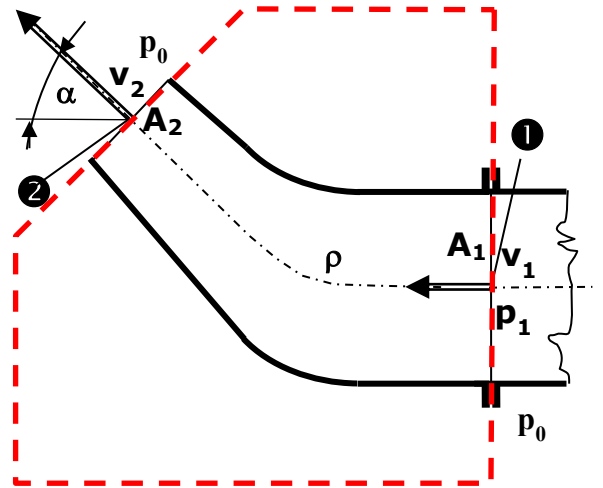
Egy hőlégfúvó áramlás irányban szűkülő, a p_0 nyomású szabadba nyíló csővégi idomát mutatja az ábra. Az „1” és „2” keresztmetszeti tengelyek egymással $\alpha=60^\circ$ szöget zárnak be, és a vízszintes (x,y) síkban fekszenek. Ismert a $\rho=1\text{ kg/m}^3$ sűrűségű meleg levegő „1” keresztmetszeti átlagsebessége: $v_1=30\text{ m/s}$. **FELTÉTELEK:** $\mu=0$; $\rho=\text{áll.}$; stacioner áramlás, a folyadékra ható súlyerő elhanyagolható. **ADATOK:**

$$p_0=10^5\text{ Pa}; \quad g=10\text{ N/kg}; \quad \rho=1\text{ kg/m}^3;$$

$$A_1=10^{-3}\text{ m}^2; \quad A_2=5 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2 \quad v_1=30\text{ m/s}$$

KÉRDÉS: Határozza meg az idomra ható \underline{R} erőt!

Megjegyzés: Kérem, rajzolja be az ábrába az Ön által felvett koordináta-rendszert egyértelműen jelölt x és y tengelyekkel, illetve jelölje be számításához használt ún. ellenőrző felületet! Ezek nélkül a megoldás elvi hibás, nem értelmezhető!



MEGOLDÁS

Folytonosság tétele: $v_1 A_1 = v_2 A_2$, és $A_1/A_2=2$

A feltételek szerinti folytonosság tételt kihasználva $v_1=30\text{ m/s}$, $v_2=60\text{ m/s}$, és a Bernoulli-egyenletet felírva „1” és „2” pontok közé a nyomáskülönbség ($p_1-p_0=1350\text{ Pa}$) ismeretében :

Az $A_{c.f.}$ felvétele (lásd ábra), valamint $(\underline{X} \rightarrow, \underline{Y} \uparrow)$ irányítottágú koordináta-rendszer felvétele az első lépés.

A nyomás az $A_{c.f.}$ -en mindenhol p_0 , kivéve A_1 keresztmetszetet, ahol p_1 .

A sűrűség állandó.

Az impulzustétel x irányban felírt komponensegyenlete relatív rendszerben:

$$\rho_1 v_1^2 A_1 - \rho_2 v_2^2 A_2 \cos 60^\circ = - \int_{A_x} p dA - R_x$$

Ahol a nyomáseloszlásból származó erő x komponense: $- \int_{A_x} p dA = -(p_1 A_1 - p_0 A_1) = (p_0 - p_1) A_1$

Az impulzustétel y irányban felírt komponensegyenlete relatív rendszerben:

$$\rho_2 v_2^2 A_2 \sin 60^\circ = - \int_{A_y} p dA - R_y$$

Ahol a nyomáseloszlásból származó erő y komponense: $- \int_{A_y} p dA = 0$

A ható erő komponenseire fenti két komponensegyenlet rendezhető, majd \underline{R} nagysága és iránya kiszámítható, felrajzolható.

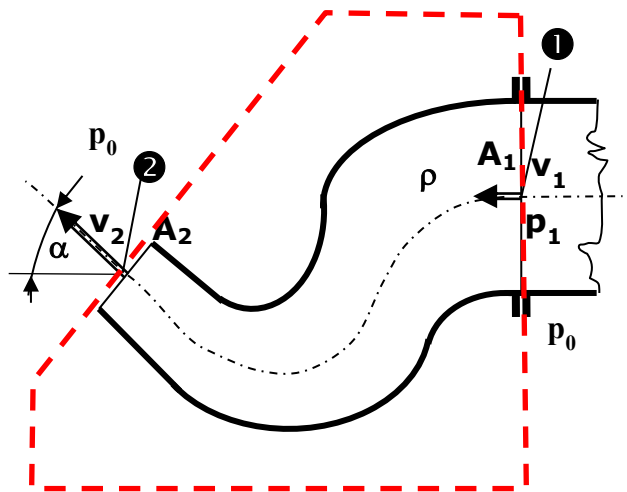
PÉLDA (impulzustétel)

Egy, az áramlás irányában szűkülő, a p_0 nyomású szabadba nyíló S-alakú csővégi idomot mutat az ábra. A csövek „1” és „2” keresztmetszeti tengelyei egymással $\alpha=60^\circ$ szöget zárnak be, és a vízszintes síkban fekszenek. Ismert a $\rho=1000\text{kg/m}^3$ sűrűségű víz „2” keresztmetszeti átlagsebessége: $v_2=20\text{m/s}$. **FELTÉTELEK:** $\mu=0$; $\rho=\text{áll.}$; stacioner áramlás, a folyadékra ható súlyerő elhanyagolható.

ADATOK: $\rho=1000\text{kg/m}^3$; $p_0=10^5\text{Pa}$;
 $g=10\text{N/kg}$; $A_1=0,1\text{m}^2$;
 $A_2=0,05\text{m}^2$

KÉRDÉS: Határozza meg az idomra ható \underline{R} erőt!

Megjegyzés: Kérem, rajzolja be az ábrába az Ön által felvett koordináta-rendszert és az ellenőrző felületet! Ezek nélkül a megoldása nem értelmezhető!



MEGOLDÁS (a túloldalon is folytathatja)

Folytonosság tétele: $v_1 A_1 = v_2 A_2$, és $A_1/A_2=2$

A feltételek szerinti folytonosság tételt kihasználva $v_2=20\text{m/s}$ alapján $v_1=10\text{m/s}$, és a stacioner esetre a Bernoulli-egyenletet felírva „1” és „2” pontok közötti áramvonalon a nyomáskülönbségre adódik $p_1-p_0=150000\text{Pa}$.

Az $A_{e.f.}$ felvétele (lásd ábra), valamint $(\underline{x} \leftarrow, \underline{y} \uparrow)$ irányítottágú koordináta-rendszer felvétele az első lépés.

A nyomás az $A_{e.f.}$ -en mindenhol p_0 , kivéve A_1 keresztmetszetet, ahol p_1 a nyomás. A sűrűség állandó, stb feltételek szerint az impulzustétel komponens egyenletei felírhatók:

Az impulzustétel x irányban felírt komponens egyenlete:

$$-\rho_1 v_1^2 A_1 + \rho_2 v_2^2 A_2 \cos 60^\circ = - \int_{A_x} p dA - R_x$$

Ahol a nyomáseloszlásból származó erő x komponense: $-\int_{A_x} p dA = -(-p_1 A_1 + p_0 A_1) = (p_1 - p_0) A_1 = 15\text{kN}$

Ezzel $R_x = (p_1 - p_0) A_1 + \rho_1 v_1^2 A_1 - \rho_2 v_2^2 A_2 \cos 60^\circ = 15\text{kN} + 10\text{kN} - 10\text{kN} = 15\text{kN}$ (Tehát a felvett $x \leftarrow$ iránnyal megegyező).

Az impulzustétel y irányban felírt komponens egyenlete:

$$\rho_2 v_2^2 A_2 \sin 60^\circ = - \int_{A_y} p dA - R_y$$

Ahol a nyomáseloszlásból származó erő y komponense: $-\int_{A_y} p dA = 0$

Ezzel $R_y = -\rho_2 v_2^2 A_2 \sin 60^\circ = -17,321\text{kN}$ (Tehát a felvett $y \uparrow$ iránnyal ellenétes)

Az x és y komponensekkel \underline{R} nagysága és iránya kiszámítható, felrajzolható.

PÉLDA (impulzustétel)

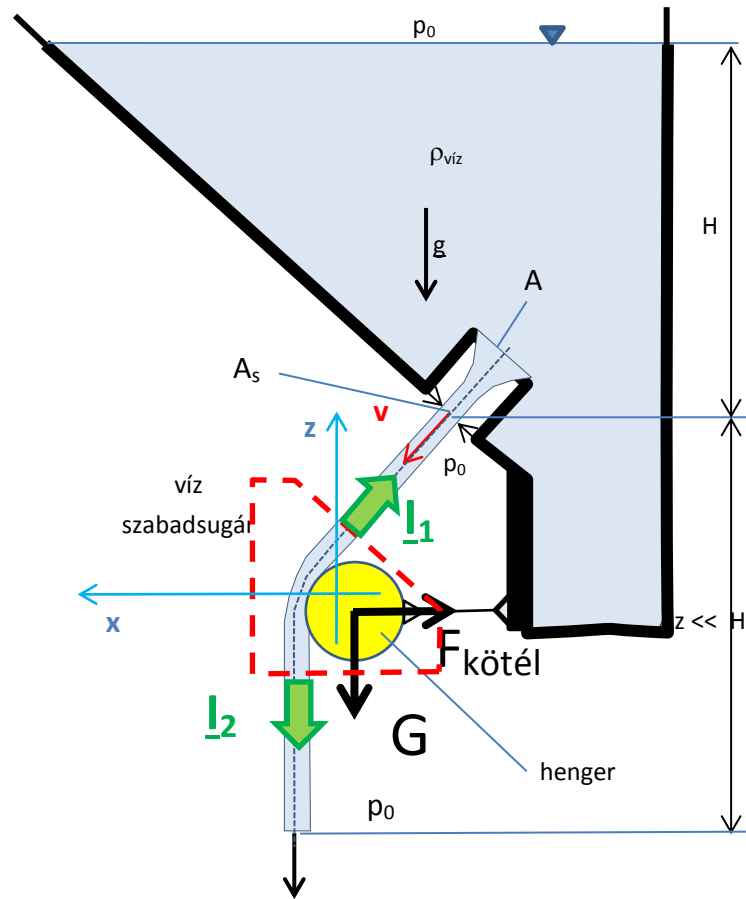
Víz szabadcsugár áramlik ki ferdén (a vízszinteshez képest 45° -ban) az ábrán látható szabadfelszínű, $H=5\text{m}$ szinting vízzel töltött tartályon lévő $0,6$ értékű kontrakciós tényezőjű Borda-féle kifolyónyílásból a szabadba. A Coanda-effektus miatt a szabadcsugár a tartályhoz vízszintes kötéllel kikötött henger felszínén eltérül: a hengerről leáramló vízcsugár pont függőlegesen lefelé halad tovább. A vízcsugáron „lógó” ismeretlen $G[\text{N}]$ súlyú henger az ábrán jelölt pozícióban egyensúlyban van: a tartály oldalához elhanyagolható súlyú kötéllel kikötve a kötél éppen vízszintes.

FELTÉTELEK: stac. áll., $\rho=\text{áll.}$, $\mu=0$, a szabadcsugárra a nehézségi erőter hatása elhanyagolható ($\Delta z \ll H$).

ADATOK: $A=0,01\text{m}^2$; $H=5\text{m}$; $g=10\text{N/kg}$; $p_0=10^5\text{Pa}$; $\rho_{\text{víz}}=1000\text{kg/m}^3$;

Határozza meg a hengerre ható erő! $\underline{R}=?$
Mekkora súlyú hengert tart meg a vízcsugár és mekkora a kötélerő?

Megjegyzés: Kérem, rajzolja be az ábrába az Ön által felvett koordináta-rendszert és az ellenőrző felületet! Ezek nélkül a megoldása nem értelmezhető!



MEGOLDÁS

A szabadfelszínű tartályból egy Borda-féle kifolyónyíláson kiáramló víz kontrahált keresztmetszetbeli sebessége $v = \sqrt{2gH} = 10\text{m/s}$ (Bernoulli-egyenlet vízfelszín egy pontja és a kontrahált keresztmetszetbeli pont között).

Mivel a feltételeink szerint a tartályon kívüli szabadcsugárra a nehézségi erőter hatása elhanyagolható (azaz $H=5\text{m}$ értékhez képest $\Delta z \ll H$), így a hengert körülvevő ellenőrző felületbe beáramló illetve abból kiáramló vízcsugár sebesség is $v=10\text{m/s}$, hiszen a nyomás az ellenőrző felületen p_0 (szabadcsugár!)

Az összenyomhatatlan közeg stacioner áramlása esetén érvényes folytonosság tétele ($q_v=vA=\text{állandó}$) szerint a hengert körülvevő ellenőrző felületbe beáramló illetve abból kiáramló vízcsugár keresztmetszetek is azonosak a Borda-féle kifolyónyílás utáni A_s kontrahált vízcsugár keresztmetszettel ($A_s = \alpha \cdot A = 0,6 \cdot 0,01\text{m}^2 = 0,006\text{m}^2$).

Fentiek alapján a hengert körülvevő ellenőrző felületbe beáramló illetve abból kiáramló vízcsugár keresztmetszetek, a sebességek és az ellenőrző felületen a nyomás ismert.

Az $(x \leftarrow, y \uparrow)$ irányítottágú koordináta-rendszer felvétele az első lépés. Az $A_{e.f.}$ felvétele úgy célszerű, hogy ahol a vízcsugár átáramlik rajta, legyen a felületi normális vektorral ($d\underline{A}$) párhuzamos, lásd ábra. Jelenleg az egyik (y) tengely párhuzamos a kiáramlási sebességgel.

A nyomás az $A_{e.f.}$ -en mindenhol p_0 , tehát nyomáskülönbségből nem származik folyadékra ható erő.

A sűrűség állandó, stb feltételek szerint az impulzustétel komponens-egyenletei felírhatók:

Az impulzustétel **x irányban** felírt komponens-egyenlete az \underline{I}_1 és \underline{I}_2 impulzusáram vektorok x komponenseivel:

$$-(\rho_1 v_1^2 A_1) \cos 45^\circ = -R_x$$

$$\text{Ezzel } R_x = (\rho_1 v_1^2 A_1) \cos 45^\circ = 1000 \cdot 10^2 \cdot 0,006 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 424,3\text{N}$$

Tehát a felvett $x \leftarrow$ irányval megegyező irányú a hengerre ható erő x komponense. Valamint $F_{\text{kötél}} = -R_x$

Az impulzustétel **y irányban** felírt komponens-egyenlete:

$$(\rho_1 v_1^2 A_1) \sin 45^\circ - (\rho_2 v_2^2 A_2) = -R_y$$

$$\text{Ezzel } R_y = (\rho_2 v_2^2 A_2) - (\rho_1 v_1^2 A_1) \sin 45^\circ = 1000 \cdot 10^2 \cdot 0,006 \cdot (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 175,74\text{N}$$

Tehát a felvett $y \uparrow$ irányval megegyező irányú a hengerre ható erő y komponense. Valamint $G = -R_y$

Az x és y komponensekkel \underline{R} nagysága és iránya kiszámítható, felrajzolható. $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

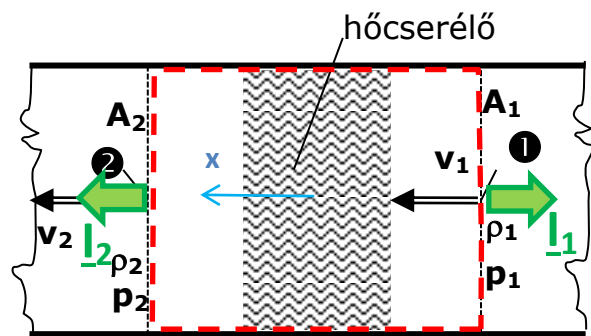
PÉLDA (impulzustétel)

Egy vízszintes tengelyű, $A_1=A_2=2\text{m}^2$ állandó keresztmetszetű hőcserélővel az „1” és „2” keresztmetszetek között az áramló $\rho_1=0,8\text{kg/m}^3$ sűrűségű forró füstgázt lehűtjük, mely következtében sűrűsége $\rho_2=1,1\text{kg/m}^3$ lesz. Ismert az „1” pontbeli $v_1=20\text{m/s}$ áramlási átlagsebesség.

FELTÉTELEK: $\mu=0$; stacioner állapot, a hőcserélőre ható erő és a folyadékra ható súlyerő elhanyagolható.

KÉRDÉS: Határozza meg az „1” ill. „2” keresztmetszetek közötti $\Delta p_{12}=(p_1-p_2)$ nyomáskülönbség értékét! $\Delta p_{12}=?$ [Pa]

Megjegyzés: Kérem, rajzolja be az ábrába a felvett koordináarendszert és az ellenőrző felületet! A példa megoldása ezek nélkül nem értelmezhető!



MEGOLDÁS

A Bernoulli-egyenlet elvi hiba lenne felírni „1” és „2” pontok között, hiszen nem elhanyagolható mértékben változik a sűrűség!

Az összenyomható közeg stacioner áramlása esetén érvényes folytonosság tétele ($q_m=\rho v A=\text{állandó}$) alapján v_2 sebesség kiszámítható, hiszen $v_1=20\text{m/s}$ ismert és ismertek a sűrűségek és keresztmetszetek. Mivel $A_1=A_2$, így $v_2=v_1 \cdot \rho_1/\rho_2$.

A vízszintes tengely ($z=\text{áll.}$, a súlyerő elhanyagolható) elegendő az impulzustételnek csak a tengely, azaz az x irányú komponens-egyenletét felírunk, melyből a keresett nyomáskülönbség meghatározható, mivel a hőcserélőre ható R erő elhanyagolható.

Az ellenőrző felületbe beáramló illetve abból kiáramló sebességek ismertek, de a nyomás nem.

Az impulzustétel x irányban felírt komponensegyenlete az \underline{I}_1 és \underline{I}_2 impulzusáram vektorok x komponenseivel:

$$-(\rho_1 v_1^2 A_1) + (\rho_2 v_2^2 A_2) = - \int_{Ax} p dA$$

Ahol a nyomáseloszlásból származó erő x komponense: $-\int_{Ax} p dA = -(-p_1 A_1 + p_2 A_2) = (p_1 - p_2) A_1$

Ezzel az „1” ill. „2” keresztmetszetek közötti $\Delta p_{12}=(p_1-p_2)$ nyomáskülönbség értéke számítható (folytonosság tételéből $v_2=v_1(\rho_1/\rho_2)=20(0,8/1,2)=13,33\text{m/s}$

$$\Delta p_{12}=(p_1-p_2) = \rho_2 v_2^2 - \rho_1 v_1^2 = 1,1 \cdot 13,33^2 - 0,8 \cdot 20^2 = -124,4\text{Pa}$$