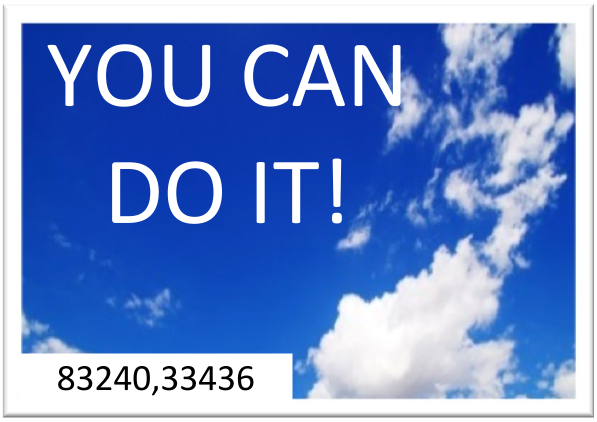
4.GYAKORLAT (8. oktatási hét)

Lehetséges témakörök a 8. heti 4. gyakorlatra:

- izoterm atmoszféra
- Bernoulli-egyenlet instacioner áramlásokra (μ=0, ρ=áll., instac., pot.erőtér, ❶->❷ áramvonal)

PÉLDA (izoterm atmoszféra)



Öt barátja elutazott ötfelé (lásd alábbi helyek). Mind az öten az alábbi hotelekben pont egy-egy 10. emeleti szobát kapnak. A hotelek földszintjének z_0=0m tengerszint feletti z_i[m] magasságai ismertek:

		z_i
Nepál	**Hotel Kathmandu**	**1298 m**
Zimbabwe	**Hotel Harare**	**1480 m**
USA	**Hotel Denver**	**1625 m**
Svájc	**Hotel Alpine**	**1700 m**
Mexikó	**Hotel Tequila**	**2216 m**

Tudjuk, hogy a hotelek emeletei mindenhol 3m magasak.

Egyikük a mellékelt képet, a saját 10. emeleti hotelszoba ablakából készített fotót küldi Önnek a mai fak-zh-ra bíztatásul. Tudja, hogy az okostelefonjára mindenkinek fel van telepítve az „izoterm atmoszféra" nevű ingyenes app, amely a GPS és I.S.A. adatok alapján a helyi p[Pa] légnyomást kiszámítja és öt tizedesjegy-pontossággal ráteszi a fotó bal alsó sarkára.

ADATOK: Az I.S.A. (Int.Stand.Atm.) adatok: p_0 = 101325 Pa; T_0 = 288 K; R = 287 J/(kgK); g = 9,81 N/kg

KÉRDÉS: Izoterm atmoszféra feltétellel számítással indokolja, honnan küldte Önnek a fotót az egyik barátja!

MEGOLDÁS (A lap túloldalán is folytathatja a megoldást)

Izotermikus atmoszféra feltétel esetén a p=*f*(z) függvény ismert:

$$p(z) = p_0 \cdot e^{-\frac{g(z-z_0)}{RT_0}}$$

A fénykép alapján ismert a p(z)=83240,33436 Pa nyomás értéke, ehhez keressük a z magasságot.

Fenti alakot rendezve z-re kapjuk:

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{g(z-z_0)}{RT_0}$$

azaz:

$$z = -\frac{RT_0}{g} \cdot \ln\frac{p}{p_0}$$

behelyettesítve:

$$z = -\frac{287 \cdot 288}{9{,}81} \cdot \ln\frac{83240{,}33436}{101325} = 1656{,}5m$$

Tehát a fotó z = 1656,5 m tengerszint-feletti magasságban készült valamelyik hotelben.

Bármelyik hotel 10. emeletén állva és a fényképezőgépet kb. 1,5m magasságban tartva a fotókészítés tengerszint-feletti magassága z = z_i+10·3m + 1,5m = z_i + 31,5 m.

Ebből z_i = z - 31,5m, vagyis z_i = 1656,5-31,5 = 1625 m,
azaz a barátja a fotót a Hotel Denver (USA) 30. emeletén készítette.

PÉLDA(izoterm atmoszféra)

Ön a Magas-Tátra hegység 2632m magas Lomnici-csúcsáról utazik lefelé lanovkával a 910m tengerszintfeletti magasságban fekvő Tátralomnicra. A csúcson indulás előtt kiitta a teát az 1 literes termoszából, aztán a kupakot hermetikusan lezárta és nem is nyitotta ki az utazás alatt.

KÉRDÉSEK:

A) Tátralomnicra érve mekkora a nyomáskülönbség a termosz belső tere és a külső környezeti nyomás között? Ha kinyitja a termoszkupak szelepét, akkor azon keresztül kifelé vagy befelé kezd el áramlani a levegő? Az A) kérdés során a p=*f*(z) számítása során **izoterm atmoszférát** tételezzen fel, melyhez az adatok: z_0=0m, p_0=101325Pa; T_0=288K; R=287 J/(kgK), g=9,81 N/kg.

B) Mekkora lenne a termosz belső tere és a külső környezeti nyomás között ez a nyomáskülönbség Tátralomnicra érkezéskor, ha nem izoterm atmoszféra, hanem a z_0=0m tengerszinti **ρ_0=állandó** feltétellel számolná a p=*f*(z) környezeti nyomást?

MEGOLDÁS

A)

Izoterm atmoszféra feltételt használva bármely z_i magasságon a p_i nyomás az alábbi p=*f*(z) kifejezéssel számítható:

$$p_i = p_0 \cdot e^{-\frac{g\cdot(z_i - z_0)}{R\cdot T_0}}$$

Esetünkben z_i = 2632m (fent) és 910m(lent) ismeretében a nyomások:

fent: $p_{CSÚCS}$=74140 Pa
lent: $p_{TÁTRALOMNIC}$=90952 Pa

A nyomáskülönbség Δp= $p_{TÁTRALOMNIC}$ — $p_{CSÚCS}$,= 90952Pa — 74140Pa = 16812 Pa

Mivel $p_{TÁTRALOMNIC}$ > $p_{CSÚCS}$, így ha kinyitjuk a kupakszelepet, akkor kintről befelé áramlik a levegő.

B)

A ρ_0=áll. feltételt használva: Mivel z_0 =0m tengerszinten a nyomás p_0 =101325Pa és T_0=288K=áll. adatok ismertek, így a ρ_0=1,225863821kg/m^3 (≈1,226kg/m^3) álladó sűrűség ismeretében bármely z_i magasságon a p_i nyomás felírható:

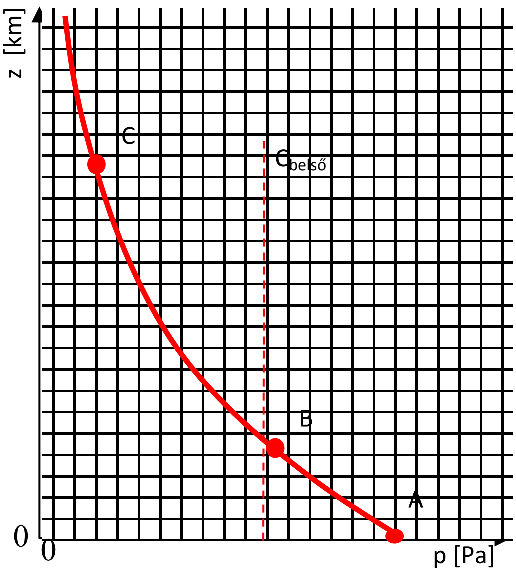
$$p_i = p_0 - \rho_0 \cdot g \cdot (z_i - z_0) = p_0 - \rho_0 \cdot g \cdot z_i$$

fent: $p_{CSÚCS}$=69673 Pa
lent: $p_{TÁTRALOMNIC}$=90382 Pa

A nyomáskülönbség Δp= $p_{TÁTRALOMNIC}$ — $p_{CSÚCS}$,= 90382Pa — 69673Pa = 20709Pa

Mivel $p_{TÁTRALOMNIC}$ > $p_{CSÚCS}$, így ha kinyitjuk a kupakszelepet, akkor ρ_0=áll. feltételt használva is kintről befelé áramlik a levegő, de nagyobb a nyomáskülönbség, mint izoterm atmoszféra feltétel esetén.

PÉLDA(izoterm atmoszféra)



Mexico City repülőterének z=2250m tengerszint feletti magasságban fekvő kifutópályáján az indulásra váró repülőgép utasterében a nyomás a helyi környezeti nyomás, a hőmérséklet pedig 15ºC. Felszállás után a repülőgép rövid idő alatt eléri a z=10500m-es utazómagasságot. Az utazómagasságon az utastér nyomását $0{,}75\cdot10^5$Pa értéken tartják, miközben az utastér hőmérséklete 15ºC marad, mert nem működik tökéletesen a klímaberendezés.

ADATOK: I.S.A. adatok: z_0=0m, p_0=101325*Pa*, T_0=288*K*. Ebben a példában g=9,81N/kg értékkel számoljon! levegőre R=287 J/(kgK)

KÉRDÉSEK:

1.1 Izoterm atmoszféra feltétellel határozza meg, hogy utazómagasságon mekkora és milyen irányú az utastér 25cm×40cm téglalap alakúnak tekinthető ablakára ható erő!

1.2 Rajzolja fel a diagramba a környezeti nyomás magasság szerinti változását izoterm atmoszféra feltétel esetén! Jelölje a diagramban az A) tengerszinten, B) repülőtéren és C) utazómagasságon (repülőgépen kívül és belül) a pontokat a (*z*,*p*) koordinátákkal!

1.3 Hány kg levegőnek kell távoznia a 850m^3 térfogatú utastérből, mire a repülőgép eléri az utazómagasságot?

MEGOLDÁS *(a lap túloldalán is folytathatja)*

1.1 Ha z_0 =0m tengerszinten a nyomás p_0 =101325Pa és T_0=288K=áll. adatok ismertek, akkor bármely z_i magasságon a p_i nyomás az izoterm atmoszféra képlettel számítható:

$$p_i = p_0 \cdot e^{-\frac{g\cdot(z_i-z_0)}{R\cdot T_0}}$$

Esetünkben z_i = 10500m ismeretében a külső nyomás $p_{külső}$kiszámítható:

$p_{külső}=p_0\cdot0{,}287598742=29141$ Pa

Ezzel a nyomáskülönbség $\Delta p=p_{belső}-p_{külső}=75000-29141=45859$Pa

Az ablakra ható erő: $F_{ablak}=\Delta p\cdot A_{ablak}=48859\text{Pa}\cdot(0{,}25\cdot0{,}4)=4585{,}9$N

1.2 Lásd ábra.

tengeszinten (z_A=0m)	$p=p_0$=101325Pa
reptéren (z_B=2250m)	p=77579Pa
utazómagasságon (z_C=10500m)	p=29141Pa

1.3 A repülőtéren (z_B=2250m) az utastér 850m^3-e tele van a helyi nyomású és hőmérsékletű levegővel, melynek sűrűsége:

$\rho_B=p_B/(R\cdot T_B)=77579/(287\cdot288)=0{,}938576751$ kg/m^3

ezzel az utastér levegőjének össztömege: $m_B=\rho_B\cdot V=797{,}79$ kg

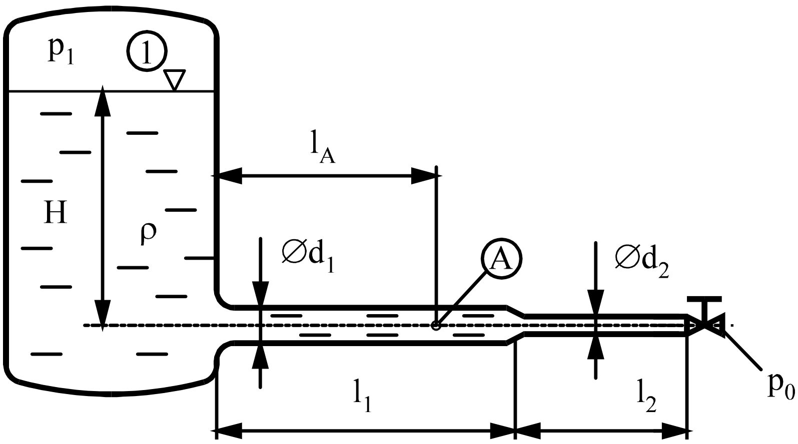
Az utazómagasságon (z_C=10500m) az utastér 850m^3-e tele van a belső nyomású (75000Pa) és 15°C hőmérsékletű levegővel, melynek sűrűsége:

$\rho_C=p_C/(R\cdot T_C)=75000/(287\cdot288)=0{,}907375145$ kg/m^3

ezzel a tömege: $m_C=\rho_C\cdot V=771{,}27$ kg

Tehát $\Delta m= m_B - m_C$ =26,52kg tömegű levegőt kellett kiengedni.

PÉLDA (Instacioner Bernoulli-egyenlet)



Egy p_1= 2,5bar nyomású, vízzel töltött zárt fedelű tartályhoz csatlakozó vízszintes tengelyű csővezeték végén egy alapállapotban teljesen zárt szelep található. **FELTÉTELEK**: μ=0; ρ=áll.; $A_{tartály}>>A_{cső}$; *a* tartályt a csővel és a csőszakaszokat egymással elhanyagolható hosszú csőidomok kötik össze, a szelep hossza is elhanyagolható. A csővégi szelep be- és kilépő keresztmetszetei a d_2 átmérőjű csőével azonosak. **ADATOK:**

$p_0 = 10^5\,Pa$ $\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$ g=*10* N/kg H=15m

$d_1 = 50mm$ $d_2 = 25mm$ $\ell_1 = 10m$ $\ell_2 = 5m$

$\ell_A = 7m$

KÉRDÉSEK:

a)Mekkora a víz „A" pontbeli kezdeti gyorsulása a nyitás t_0=0s időpillanatában?

b)Mekkora a víz „A" pontbeli gyorsulása sebessége abban az időpillanatban, amikor a kiáramlási sebesség a stacioner kiáramlási sebességnek épp a háromnegyede?

MEGOLDÁS *(a lap túloldalán is folytathatja)*

a) Az instacioner esetre felírt Bernoulli-egyenlet az „1" és „2" pont közötti áramvonalon:

$$p_1 + \frac{\rho}{2}\cdot v_1^2 + \rho\cdot g\cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}\cdot v_2^2 + \rho\cdot g\cdot z_2 + \rho\cdot\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}d\underline{s}$$

A z=0m referencia szintet bárhova felvehetjük, most legyen z=0m az alsó csőtengelyben.

	„1"=tartály vízfelszín	„2"=csővég, a szelep utáni kiáramlási keresztmetszet
p [Pa]	250 000Pa	p_0=100 000Pa
v [m/s]	v_1=0 (tartály)	v_2=0 (nyitás pillanata!)
z [m]	15m	0m

Az „1" és „2" pontok közötti folyadék gyorsításához szükséges többletnyomás, azaz a $\rho\cdot\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}d\underline{s}$ tag kiszámítása:

Mivel $A_{tartály}>>A_{cső}$, és az átmeneti idomok hossza elhanyagolható és a csőkeresztmetszet változik, de szakaszonként állandó ($a_1A_1=a_2A_2$), a csőhosszak pedig L_1=10m és L_2=5m így: $\rho\cdot\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}d\underline{s} = \rho\cdot a_1\cdot L_1 + \rho\cdot a_2\cdot L_2$. (Itt az „1" ill. „2" alsó index az „1"-es ill. „2"csőszakaszra utal!) Az instacioner Bernoulli-egyenlet a nyitás időpillanatában (azaz a maximális értékű) $a_A=a_1$ gyorsulásra rendezhető: a_A=✓.

$$a_1 = \frac{p_1 - p_2 + \rho\cdot g\cdot(z_1 - z_2)}{\rho\cdot\left(L_1 + L_2\cdot\frac{A_1}{A_2}\right)} = \frac{250000 - 100000 + 1000\cdot 10\cdot 15}{1000\cdot\left(10 + 5\cdot\left(\frac{50}{25}\right)^2\right)} = \frac{300}{30} = 10m/s^2$$

b) A t=∞ stacioner kiáramlási sebesség a stacioner Bernoulli-egyenletből rendezve meghatározható:

$$v_{2,stac} = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} + 2g(z_1 - z_2)} = \sqrt{\mathbf{300} + 300} = \sqrt{\mathbf{600}}m/s$$

A Bernoulli-egyenlet instacioner alakja abban a t időpillanatban (t_0<t<∞) felírva, amelyben v_2 a $v_{2,stac}$ háromnegyede (azaz $0{,}75\sqrt{\mathbf{600}}m/s$), ismét csak az *a* gyorsulás ismeretlen:

	„1"=tartály vízfelszín	„2"=csővég, a szelep utáni kiáramlási keresztmetszet
p [Pa]	250 000Pa	p_0=100 000Pa
v [m/s]	v_1=0 (tartály)	$v_2=0{,}75\sqrt{\mathbf{600}}m/s$
z [m]	15m	0m

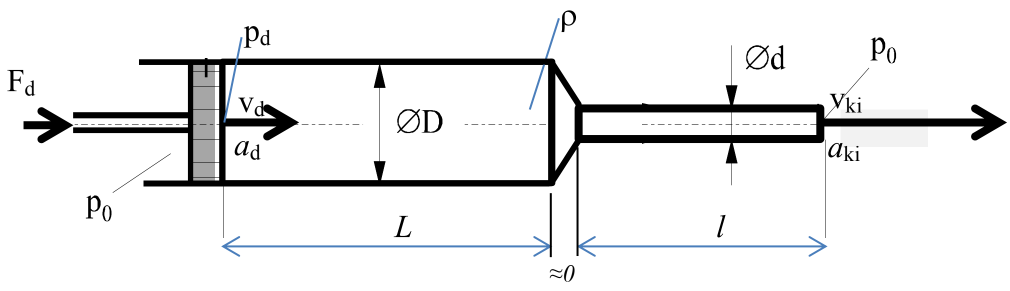
Az instacioner Bernoulli-egyenlet fenti adatokkal rendezhető: *a*=✓

$$a = \frac{p_1 - p_2 - \frac{\rho}{2}v_2^2 + \rho\cdot g\cdot z_1 - \rho\cdot g\cdot z_2}{\rho\cdot\left(L_1 + L_2\cdot\frac{A_1}{A_2}\right)} = \frac{150 - \mathbf{168{,}75} + 150}{30} = \frac{\mathbf{131{,}25}}{30} = \mathbf{4{,}375}m/s^2$$

PÉLDA(Instacioner Bernoulli-egyenlet)

A vízszintes tengelyű óriásfecskendőben víz van. A megfigyelt t időpillanatban (t_0<**t**<∞) ismert a dugattyú sebessége és gyorsulása

v_d=2m/s a_d=2m/s^2



A dugattyú baloldalán és a fecskendő kiáramlási keresztmetszetében a nyomás $p_0=10^5$Pa.

Feltételek: Ideális közeg. A øD ill. ød átmérőjű, és L ill. l hosszúságú csőszakaszok közötti átmeneti idom (konfúzor) hossza a csőhosszakhoz képest elhanyagolható.

ADATOK: L=500mm; l=500mm; øD=50mm; ød=25mm, $\rho_{víz}=10^3$kg/m^3; $p_0=10^5$Pa

KÉRDÉSEK:

a)Mekkora ekkor a szabadba kiáramló vízsugár sebessége és gyorsulása? v_{ki}=? a_{ki}=?

b)Mekkora akkor a dugattyú belső felületén a nyomás? p_d =?

c)Mekkora F_d erővel kell hatni a dugattyúra ebben a pillanatban? F_d =?

MEGOLDÁS *(a lap túloldalán is folytathatja)*

a) A csőkeresztmetszet változik, de szakaszonként állandó, a gyorsulásokra alkalmazható folytonosság-tétel ($a_1A_1=a_2A_2$) miatt $a_1=a_{dug}$=2m/s^2, ezzel $a_2=4\cdot a_1$=8m/s^2.
A sebesség hasonló ($v_1A_1=v_2A_2$) módon $v_1=v_{dug}$=2m/s alapján $v_2=4\cdot v_1$=8m/.

b)
Az instacioner esetre felírt Bernoulli-egyenlet az „1" (dugattyú belső felszíne) és „2" (csővég) pont közötti áramvonalon:

$$p_1+\frac{\rho}{2}\cdot v_1^2+\rho\cdot g\cdot z_1=p_2+\frac{\rho}{2}\cdot v_2^2+\rho\cdot g\cdot z_2+\rho\cdot\int_1^2\frac{\partial v}{\partial t}d\underline{s}$$

A z=0m referencia szintet bárhova felvehetjük, most legyen z=0m az alsó csőtengelyben.

	„1"	„2"
p [Pa]	$p_{belső}=p_1$=?	p_0=100 000Pa
v [m/s]	$v_1=v_{dug}$=2m/s	v_2=4 v_1=8m/s (folytonosság!)
z [m]	0m	0m

Az „1" és „2" pontok közötti folyadék gyorsításához szükséges többletnyomás, azaz a $\rho\cdot\int_1^2\frac{\partial v}{\partial t}d\underline{s}$ tag kiszámítása:
Mivel az átmeneti idom hossza elhanyagolható és a csőkeresztmetszet változik, de szakaszonként állandó, a csőhosszak pedig L_1=0,5m és L_2=0,5m így: $\rho\cdot\int_1^2\frac{\partial v}{\partial t}d\underline{s}=\rho\cdot a_1\cdot L_1+\rho\cdot a_2\cdot L_2$. (Itt az „1" ill. „2" alsó index az „1"-es ill. „2"csőszakaszra utal!). Ezzel a keresett nyomás

$$p_1=p_0+\frac{\rho}{2}\cdot v_2^2-\frac{\rho}{2}\cdot v_1^2+\rho\cdot a_1\cdot L_1+\rho\cdot a_2\cdot L_2=100000+32000-2000+1000+4000=135000Pa$$

b) $F_{dug}=\Delta p\cdot A_{dug}=(p_1-p_0)\,A_{dug}$ = 35000Pa (0,05· 0,05· π/4) = 68,72 N