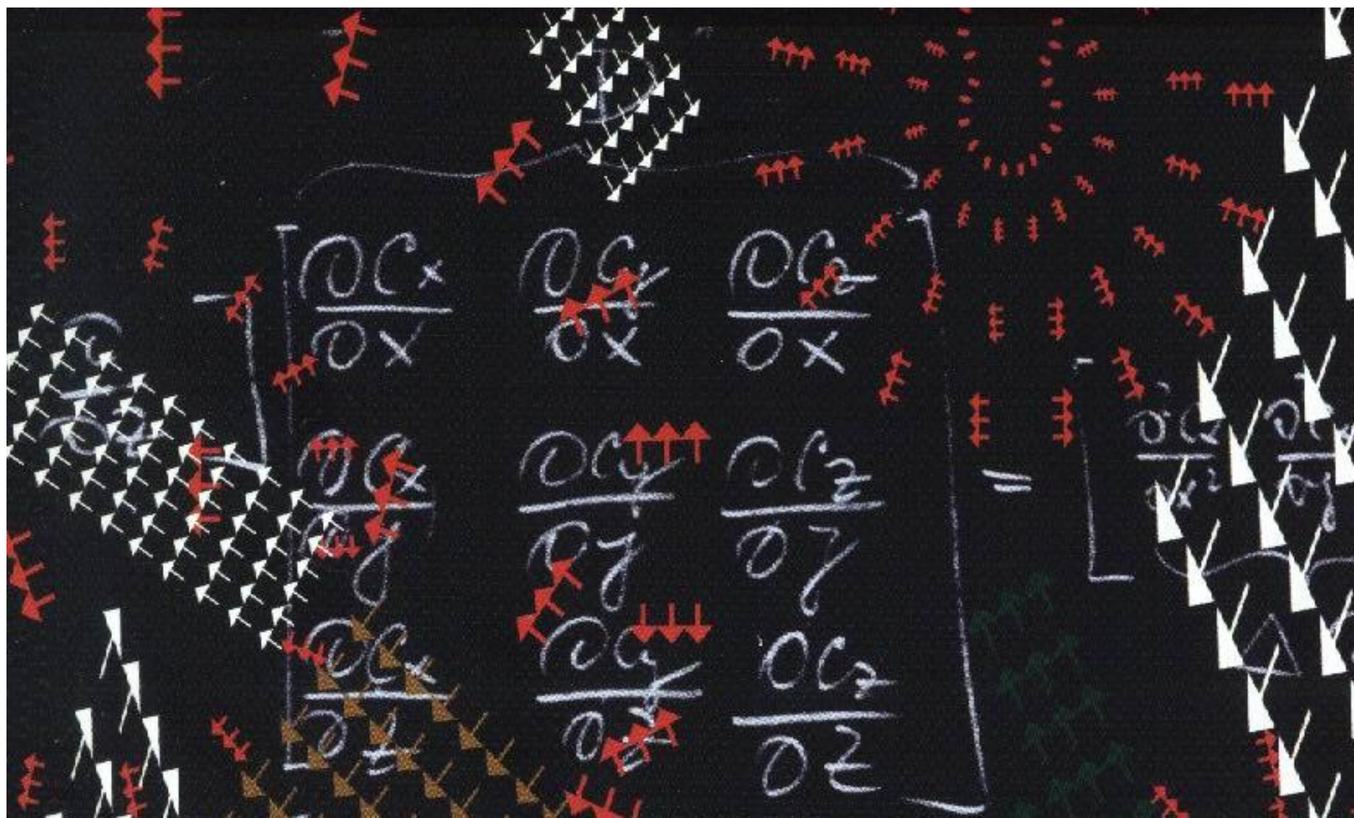
AM02 – Műszaki áramlástan I.
6.: Hangsebesség feletti áramlás

Dr. Szente Viktor
adjunktus
szente@ara.bme.hu

Budapesti Műszaki és
Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar
Áramlástan Tanszék

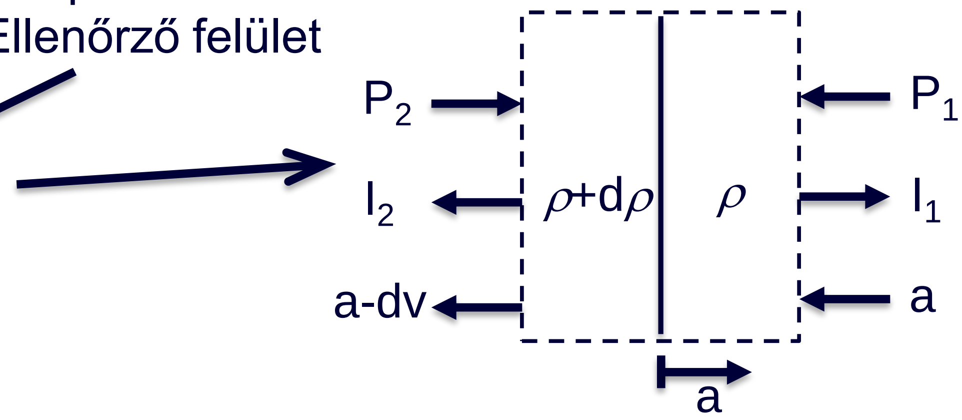


HULLÁM TERJEDÉSI SEBESSÉG

Emlékeztető: energiaegyenlet+gáztörvény

$$\frac{v^2}{2c_p} + T = áll. \qquad \frac{p}{\rho^\kappa} = áll.$$

Hullám terjedési sebességének megállapítása



Abszolút rendszer:			
	v:	0+dv	0
	p:	p+dp	p
	ρ:	ρ+dρ	ρ
	T:	T+dT	T

Impulzustétel:

$$I_1 - I_2 = P_2 - P_1$$

$$\rho a^2 \cancel{A} - (\rho + d\rho)(a - dv)^2 \cancel{A} = (\cancel{\rho} + dp)\cancel{A} - \cancel{\rho}\cancel{A}$$

$$\rho a^2 - (\rho + d\rho)(a^2 - 2adv + dv^2) = dp$$

$$\cancel{\rho a^2} - \cancel{\rho a^2} + 2\rho adv - \cancel{\rho dv^2} - a^2 d\rho + \cancel{2ad\rho dv} - \cancel{d\rho dv^2} = dp$$

Másodrendűen kicsi   Harmadrendűen kicsi

$$2\rho adv - a^2 d\rho = dp$$

HULLÁM TERJEDÉSI SEBESSÉG

Kontinuitás:

$$\rho a \cancel{A} = (\rho + d\rho)(a - dv)\cancel{A}$$

$$\cancel{\rho a} = \cancel{\rho a} - \rho dv + a d\rho - \cancel{dv d\rho}$$

Másodrendűen kicsi

$$\rho dv = a d\rho$$

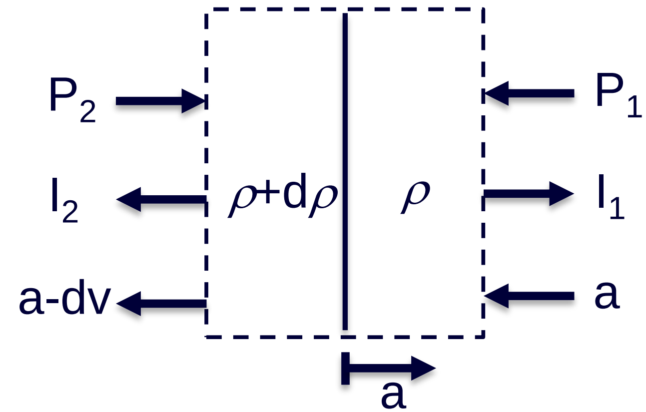
$$2\rho a dv - a^2 d\rho = dp$$

$$2a^2 d\rho - a^2 d\rho = dp$$

$$a^2 d\rho = dp$$

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Konkrétabban?



HULLÁM TERJEDÉSI SEBESSÉG

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = áll. \rightarrow \frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \rightarrow p = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa}\rho^\kappa \rightarrow \frac{dp}{d\rho} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa}\kappa\rho^{\kappa-1} = \frac{p}{\cancel{\rho^\kappa}}\kappa\cancel{\rho^{\kappa-1}} = \frac{p}{\rho}\kappa = \kappa \cdot R \cdot T$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \kappa \cdot R \cdot T$$

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Vagyis: $a = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T}$

Tehát a hangsebesség gázokban csak a hőmérséklettől függ. Miért?

Mert a molekulák mozgása továbbítja a "jelet".
A hőmérséklet növelésével a molekulák gyorsabban mozognak: gyorsabban tudják továbbítani a jelet.

ÁRAMLÁSOK HASONLÓSÁGA ÖSSZENYOMHATÓ KÖZEGEKNÉL

Navier-Stokes egyenlet X irányú komponensegyenlete:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

Dimenziótlanítás: $\cdot \dfrac{L_0}{v_0^2}$ $\quad \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \longrightarrow \cancel{\dfrac{\partial\left(\dfrac{p - p_0}{\rho \cdot v_0^2}\right)}{\partial\left(\dfrac{x}{L_0}\right)}}$ Ez volt. ITT NEM JÓ!!!

Helyette: $\dfrac{1}{\dfrac{\rho}{\rho_0}} \dfrac{\partial\left(\dfrac{p}{p_0}\right)}{\partial\left(\dfrac{x}{L_0}\right)} \dfrac{p_0}{\rho_0\, v_0^2}$ mert a sűrűség nem állandó!

Vagyis: $\dfrac{p_0}{\rho_0\, v_0^2} = áll.\ (= Eu)$

Energiaegyenlet:

$$\int_V \rho \underline{v}\, \underline{grad}\left(\frac{v^2}{2} + c_p T\right) dV = 0$$

Ennek teljesítéséhez $\underline{grad}(\dots) = 0$ De ekkor $\underline{v}\, \underline{grad}\left(\frac{v^2}{2} + c_p T\right) = 0$

Vagyis: $v_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2} + c_p T\right) + v_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2} + c_p T\right) + v_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2} + c_p T\right) = 0$

Dimenziótlanítás: $\cdot \frac{L_0}{v_0^3}$

Ekkor: $\frac{v_x}{v_0} \frac{\partial}{\partial\left(\frac{x}{L_0}\right)} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 + \boxed{\frac{c_p T_0}{v_0^2}} \frac{T}{T_0}\right) + \cdots = 0$

$$\frac{c_p T_0}{v_0^2} = áll.$$

$$Eu = \frac{p_0}{\rho_0\, v_0^2} = áll. = \frac{R\, T_0}{v_0^2} = \frac{\kappa\, R\, T_0}{\kappa\, v_0^2} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{a_0}{v_0}\right)^2 = \frac{1}{\kappa}\frac{1}{Ma^2} = áll.$$

$$\frac{v_0}{a_0} = Ma$$

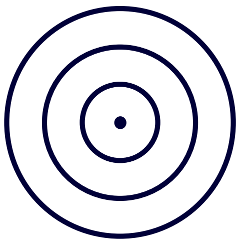
Mivel $\frac{c_p T_0}{v_0^2} = áll.$ és $\frac{p_0}{\rho_0\ v_0^2} = áll.$

$$\frac{\frac{p_0}{\rho_0\ v_0^2}}{\frac{c_p T_0}{v_0^2}} = áll. = \frac{p_0}{\rho_0\ \cancel{v_0^2}} \cdot \frac{\cancel{v_0^2}}{c_p T_0} = \frac{R\ \cancel{T_0}}{c_p \cancel{T_0}} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = 1 - \frac{c_v}{c_p} = 1 - \frac{1}{\kappa} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} = áll.$$

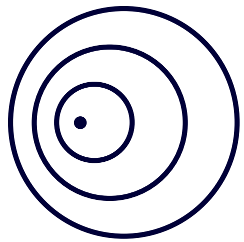
$$R = c_p - c_v$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa$$

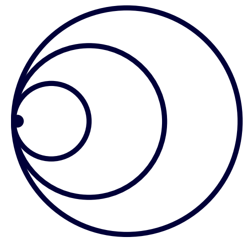
HULLÁMTERJEDÉS



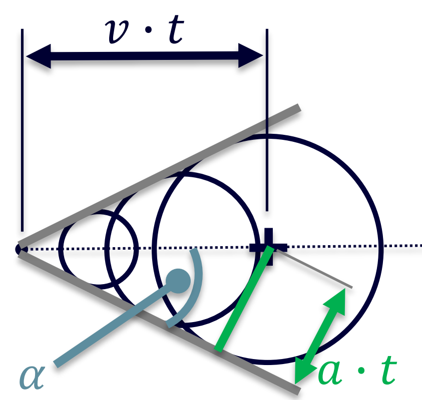
$v = 0$



$v < a$



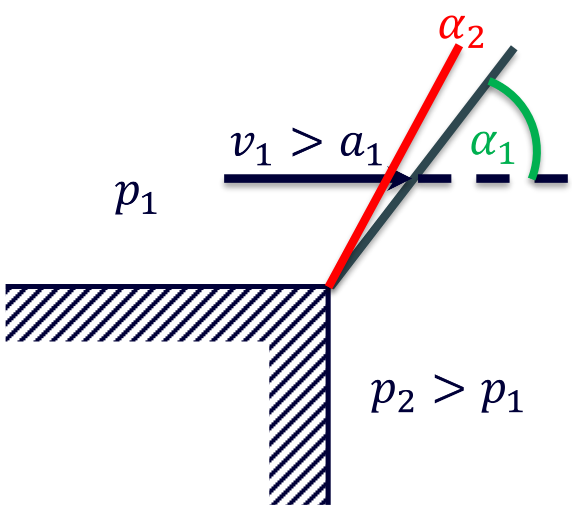
$v = a$



$v > a$

$$\sin\alpha = \frac{a \cdot t}{v \cdot t} = \frac{1}{Ma}$$

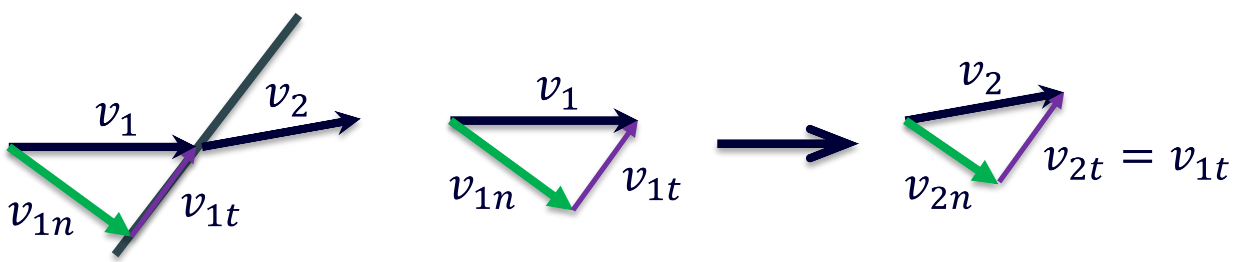
HULLÁM KIALAKULÁSA SAROK KÖRNYEZETÉBEN



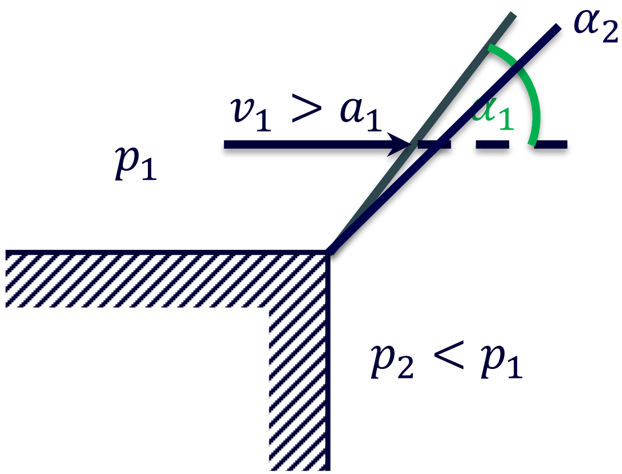
$$p_2 > p_1$$
$$v_2 < v_1$$
$$T_2 > T_1$$
$$a_2 > a_1$$
$$Ma_2 < Ma_1$$
$$\frac{1}{Ma_2} > \frac{1}{Ma_1}$$
$$\alpha_2 > \alpha_1 \rightarrow ???$$

Egy vékony kompressziós hullám: lökéshullám.

A hullámra merőleges sebességkomponenst lassítja.



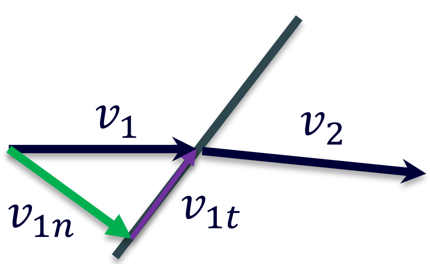
HULLÁM KIALAKULÁSA SAROK KÖRNYEZETÉBEN

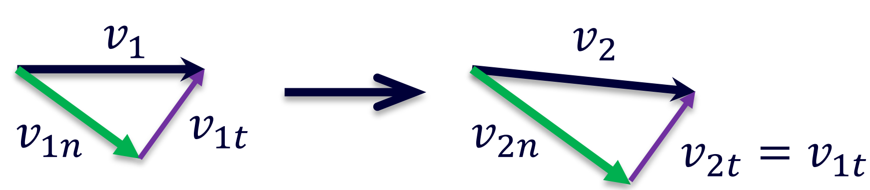


$$p_2 < p_1$$
$$v_2 > v_1$$
$$T_2 < T_1$$
$$a_2 < a_1$$
$$Ma_2 > Ma_1$$
$$\frac{1}{Ma_2} < \frac{1}{Ma_1}$$
$$\alpha_2 < \alpha_1$$

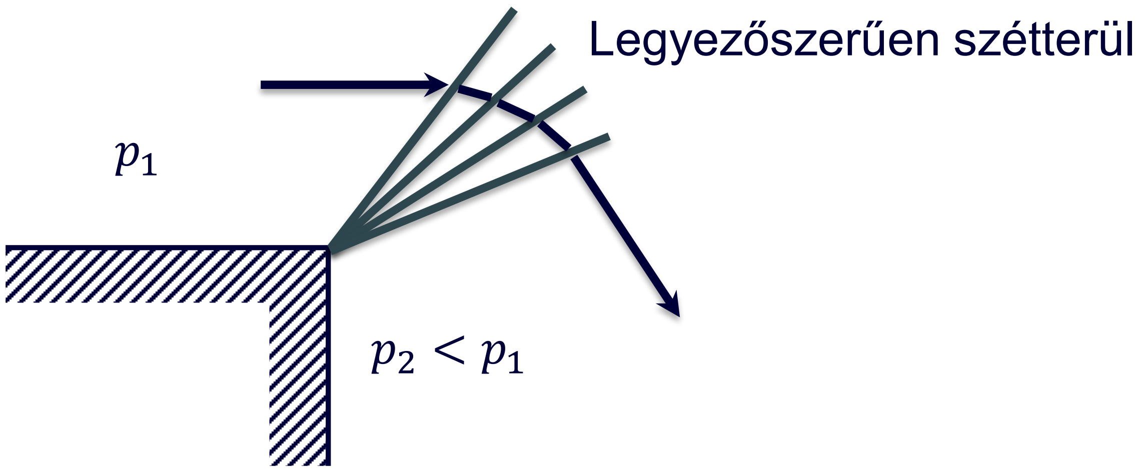
Legyezőszerűen szétterül: expanziós hullám.

A hullámra merőleges sebességkomponenst gyorsítja.



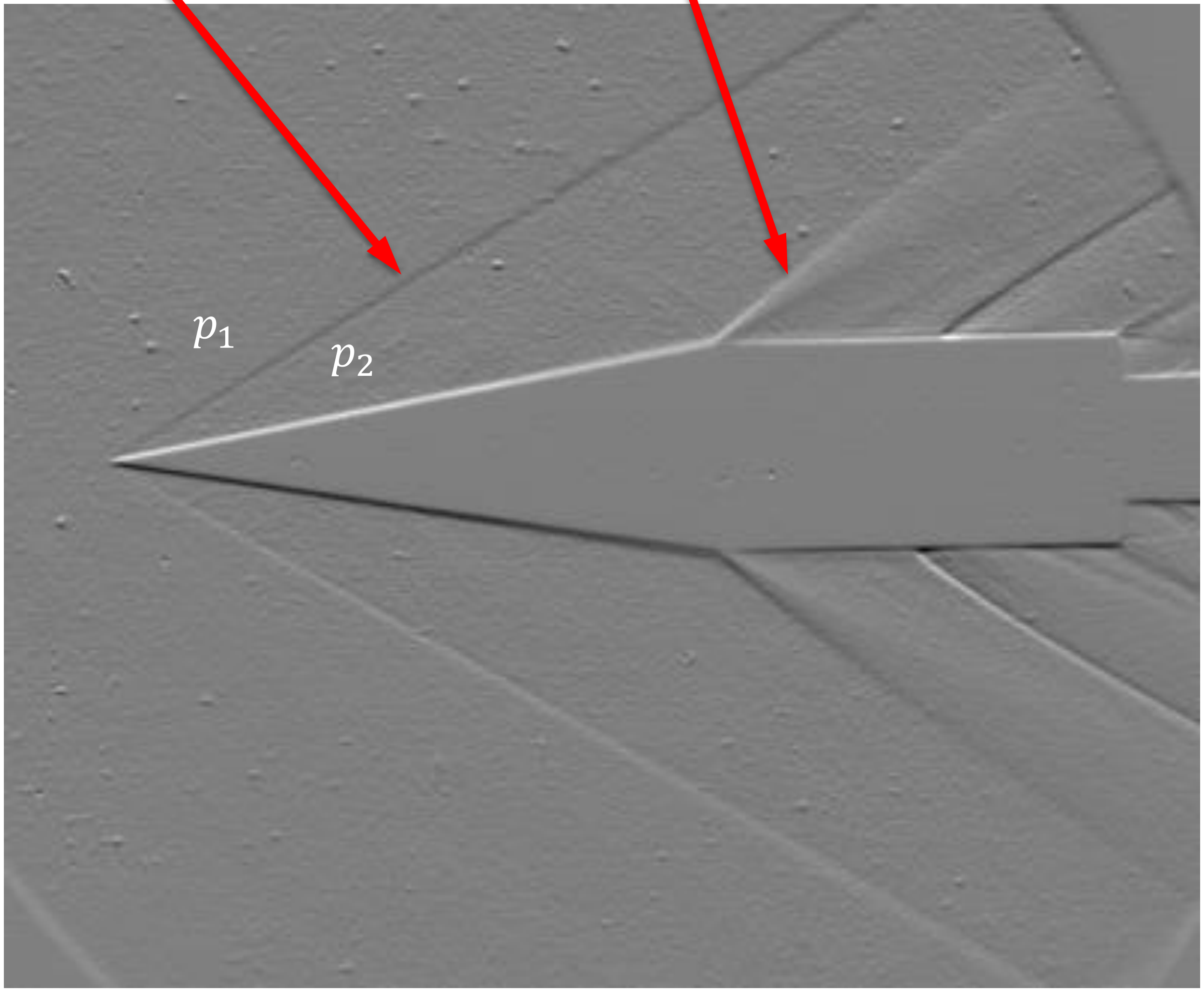


HULLÁM KIALAKULÁSA SAROK KÖRNYEZETÉBEN



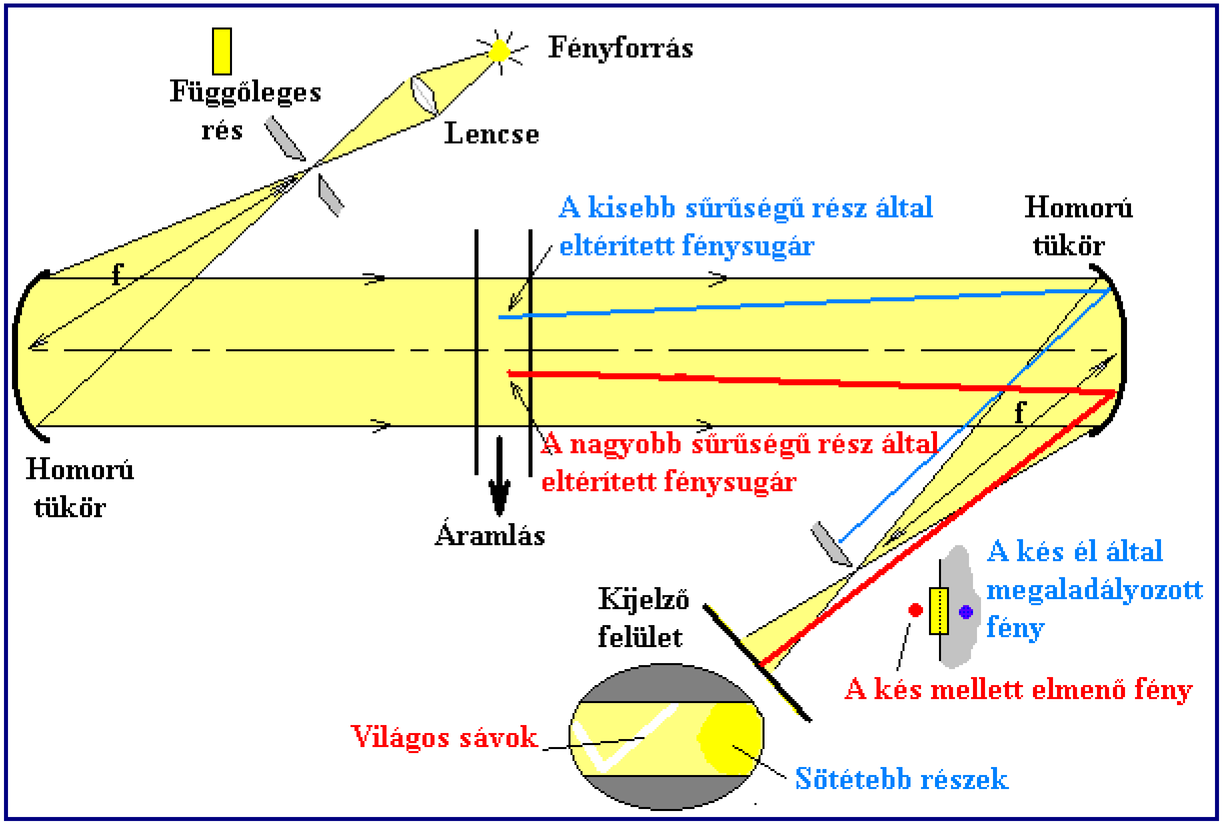
HULLÁM KIALAKULÁSA

Kompressziós hullám   Expanziós hullám

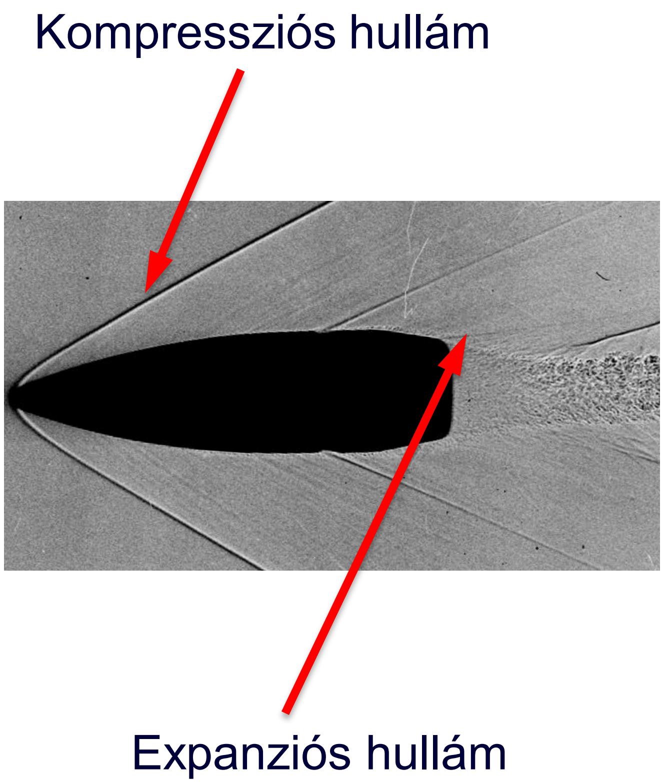


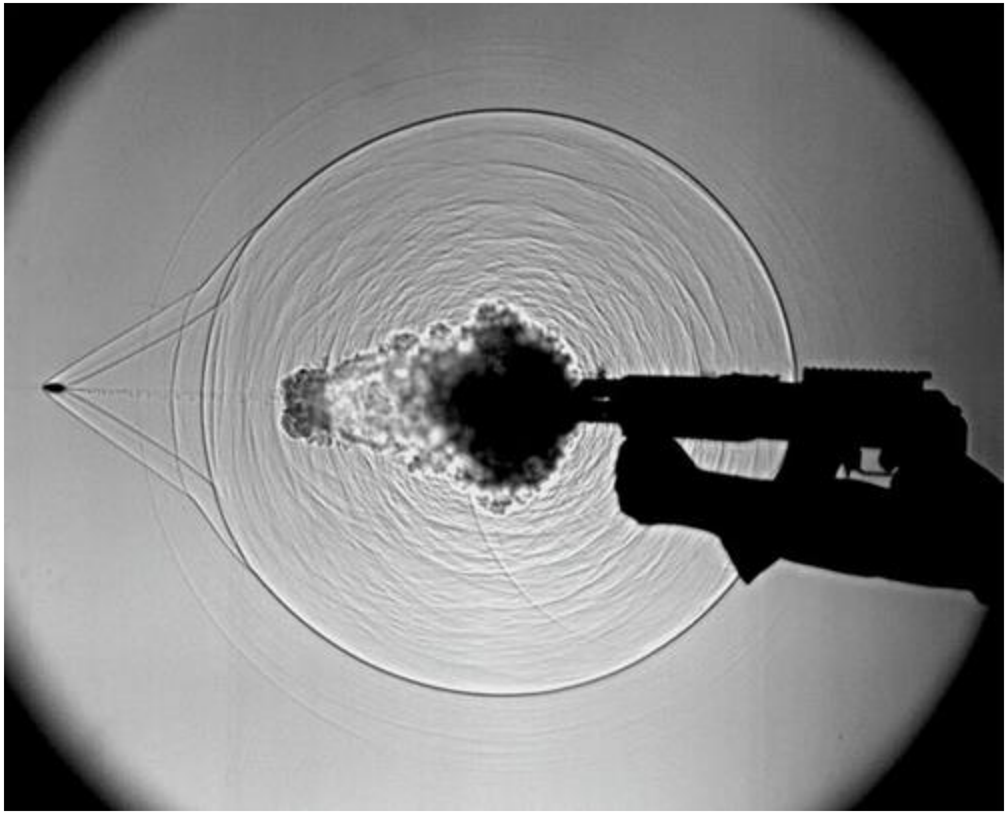
Torlópontban v = 0, tehát $p_2 > p_1$

SCHLIEREN ELJÁRÁS



SCHLIEREN ELJÁRÁS





SCHLIEREN ELJÁRÁS

https://www.youtube.com/watch?v=mLp_rSBzteI

SCHLIEREN ELJÁRÁS

https://www.youtube.com/watch?v=px3oVGXr4mo

HULLÁM KIALAKULÁSA

Euler-egyenlet érintő irányú komponensegyenlete:

$$v\frac{\partial v}{\cancel{\partial} e} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial e} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial e} = -\frac{1}{\rho}a^2\frac{\partial \rho}{\cancel{\partial} e}$$

$\partial e \coloneqq de$ azaz végtelenül kicsi távolság

$$v\,dv = -a^2\frac{d\rho}{\rho}$$

Kontinuitás: $\rho\, v\, A = konst. \rightarrow d(\rho v A) = 0$

$$d\rho\, vA + dv\, \rho A + dA\, \rho v = 0 \quad / : \rho v A$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\left(\frac{dv}{v} + \frac{dA}{A}\right)$$

$$v\,dv = a^2\left(\frac{dv}{v} + \frac{dA}{A}\right)$$

$$\frac{v}{a^2}\,dv = \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} \quad / \cdot \frac{v}{v}$$

$$\frac{v^2}{a^2}\frac{dv}{v} = \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A}$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{v^2}{a^2}\frac{dv}{v} - \frac{dv}{v} = (Ma^2 - 1)\frac{dv}{v}$$

LAVAL-CSŐ

$$\frac{dA}{A} = (Ma^2 - 1)\frac{dv}{v}$$

$Ma < 1$:

ha $\frac{dv}{v} \oplus$ azaz *v* nő, akkor $\frac{dA}{A} \ominus$ azaz *A* **csökken**

$Ma > 1$:

ha $\frac{dv}{v} \oplus$ azaz *v* nő, akkor $\frac{dA}{A} \oplus$ azaz *A* **növekszik**

ha $\frac{dA}{A} = 0$ akkor $\frac{dv}{v} = 0$: a sebesség nem változik

Vagyis: *A*-nak szélsőértéke van

vagy $Ma = 1$

Mivel *Ma*=1-ig a sebesség nő ($\frac{dv}{v} \oplus$), addig *A* csökken,

tehát *A*-nak negatív szélsőértéke van: a **legszűkebb keresztmetszet**.

Legszűkebb keresztmetszetben uralkodó viszonyok

$$T_t = T^* + \frac{v^{*2}}{2\,c_p} = T^* + \frac{a^{*2}}{2\,c_p} = T^* + \frac{\kappa\,R\,T^*}{2\,c_p} = T^*\left(1 + \frac{\frac{c_p}{c_v}(c_p - c_v)}{2\,c_p}\right) = \cdots = \frac{\kappa+1}{2}T^*$$

vagyis:

$$T_t = \frac{\kappa+1}{2}T^* \qquad \frac{T^*}{T_t} = \frac{2}{\kappa+1} \cong 0.83$$

$$\frac{p^*}{p_t} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \cong 0.53$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_t} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \cong 0.63$$

Laval-cső

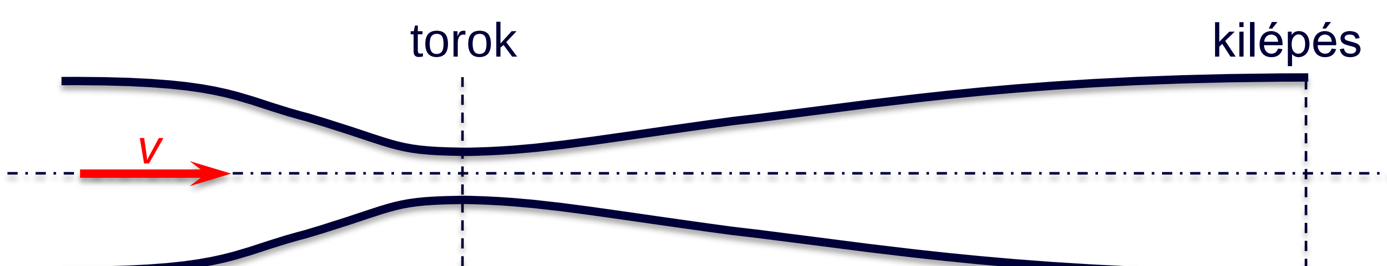
$$\frac{T^*}{T_t} = \frac{2}{\kappa+1} \qquad \frac{p^*}{p_t} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \qquad \frac{\rho^*}{\rho_t} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

Kilépés:

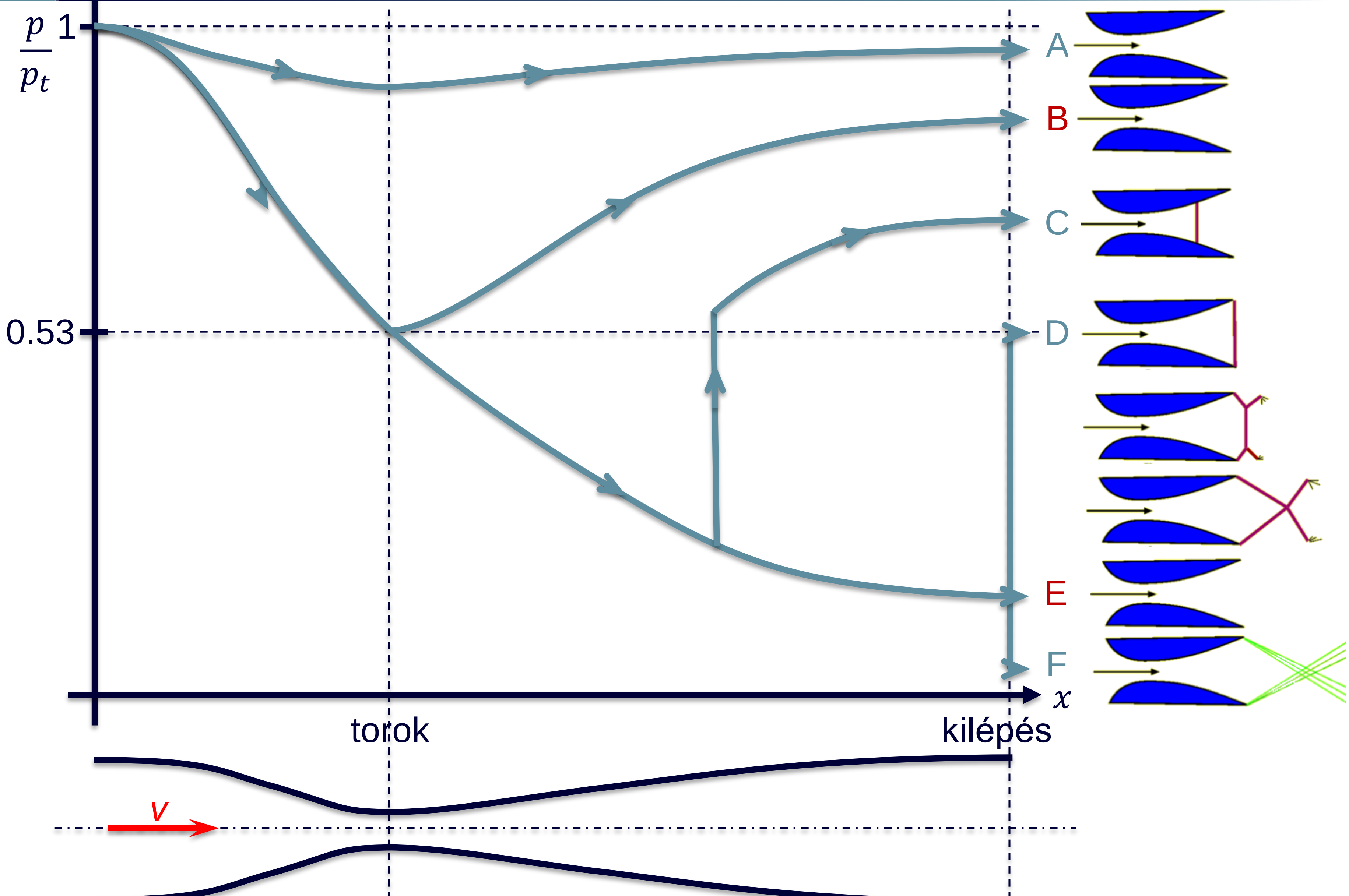
$$\rho^* v^* A^* = \rho_{ki} v_{ki} A_{ki}$$

$$\underbrace{\boxed{\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \rho_t}}_{\rho^*} \underbrace{\boxed{\sqrt{\kappa\, R \frac{2}{\kappa+1}\, T_t}}}_{v^*} \cdot A^* = \underbrace{\boxed{\rho_t \left(\frac{p_{ki}}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}}}}_{\rho_{ki}} \underbrace{\boxed{\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\, R T_t \left(1 - \left(\frac{p_{ki}}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}}}_{v_{ki}} \cdot A_{ki}$$

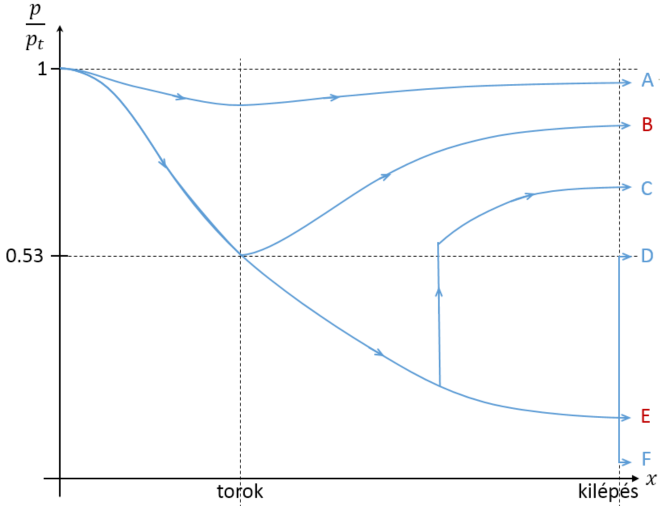
$\dfrac{p_{ki}}{p_t}$ -re két megoldást ad.



LAVAL-CSŐ



LAVAL-CSŐ



A-B: hangsebesség alatti áramlás.

B: eléri a hangsebességet, de nem növekszik tovább. Izentropikus megoldás Nº 1.

B-D: túllépi a hangsebességet, de nincsen izentropikus megoldás, **merőleges lökéshullám** alakul ki a **csőben**, melyen keresztül lelassul a közeg.

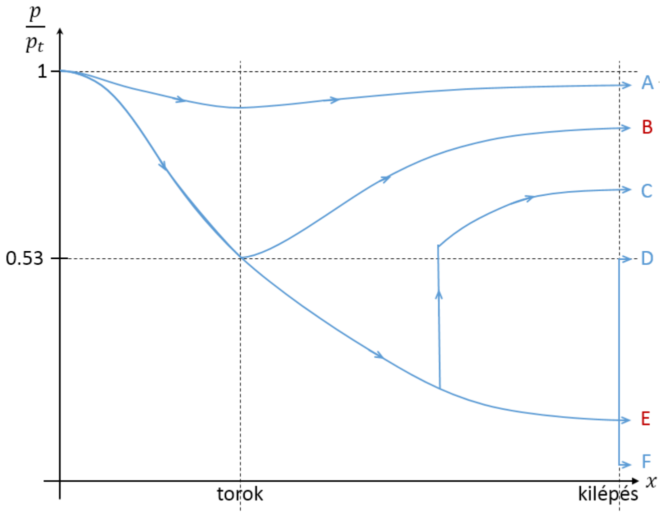
D: túllépi a hangsebességet, de nincsen izentropikus megoldás, **merőleges lökéshullám** alakul ki a **cső végén**, melyen keresztül lelassul a közeg.

D-E: túllépi a hangsebességet, de nincsen izentropikus megoldás, **ferde lökéshullám** alakul ki a **cső végén**, melyen keresztül lelassul a közeg.

E: túllépi a hangsebességet. Izentropikus megoldás Nº 2.

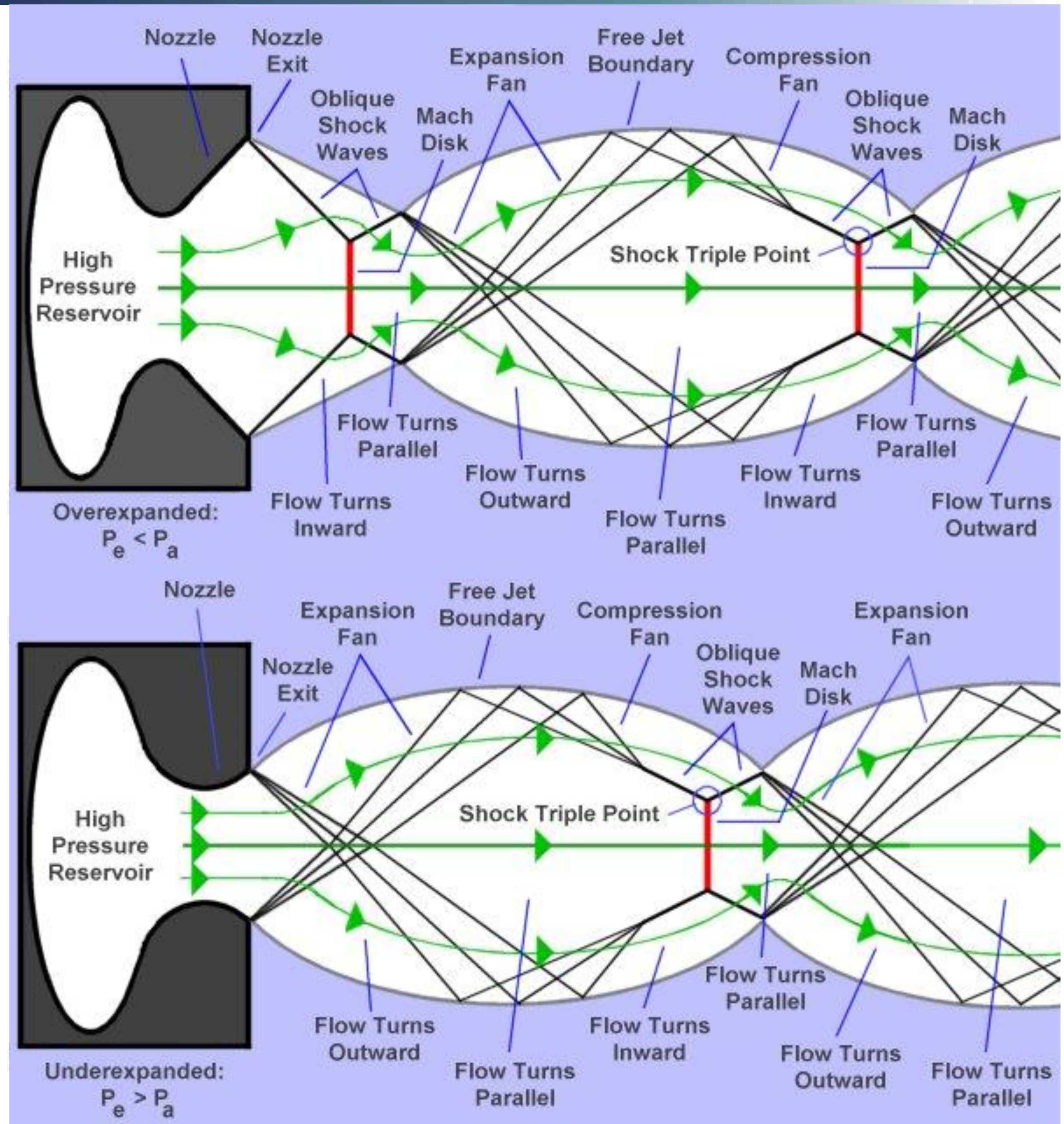
E-F: túllépi a hangsebességet, de nincsen izentropikus megoldás, **ferde expanziós hullámok** alakulnak ki a **cső végén**, melyeken keresztül tovább gyorsul.

LAVAL-CSŐ



D-E:

E-F:



25

LAVAL-CSŐ

"Aerospike"