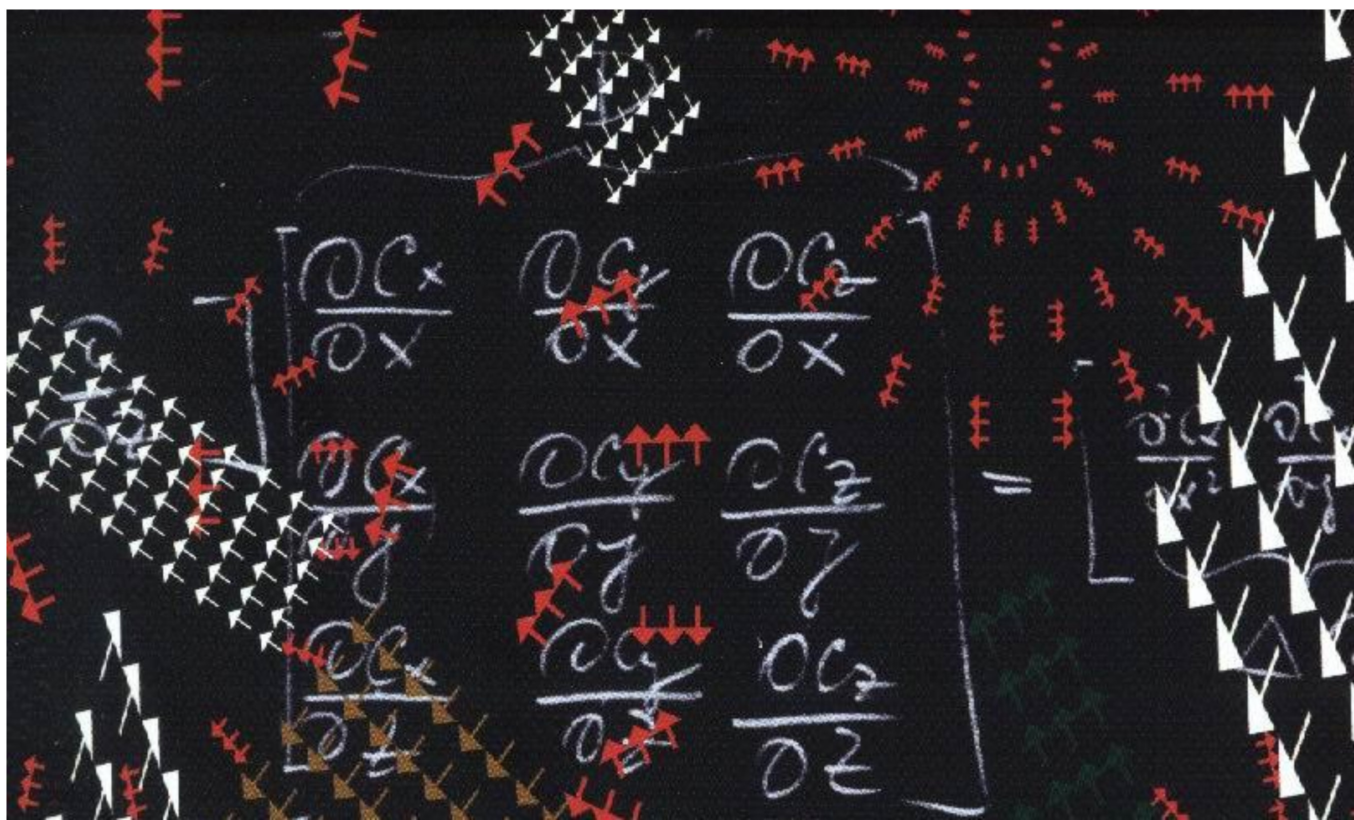
AM02 – Műszaki áramlástan I.
3.: Impulzustétel

Dr. Szente Viktor
adjunktus
szente@ara.bme.hu

Budapesti Műszaki és
Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar
Áramlástan Tanszék

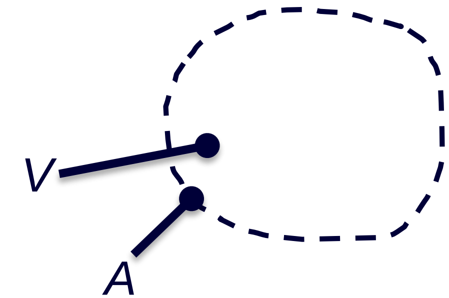


MOZGÁSEGYENLET

Euler-egyenlet: mozgásegyenlet differenciál alakja.

Impulzustétel: mozgásegyenlet integrál alakja.

mozgásegyenlet: mozgásmennyiség megváltozása = tömegre ható erők
folyadékrészre: térerő + felületen ható erő
Felületen ható erő = nyomásból származó erő, ha súrlódásmentes az áramlás



dV térfogatú folyadékrész tömege: ρdV
mozgásmennyisége: $\rho \underline{v} dV$
V térfogatban levő folyadék mozgásmennyisége: $\int_V \rho \underline{v} dV$

Mozgásegyenlet: $$\frac{d}{dt}\int_V \rho \underline{v} dV = \int_V \rho \underline{g} dV - \int_A p\, d\underline{A}$$

Mozgásmennyiség időegység alatti változása: lokális + konvektív.

Konvektív: változik, mert a *V* térfogatban levő folyadék odébbúszik.

Másképp is kifejezhető:
V térfogatot határoló *A* felületen a be- és kilépő közeg mozgásmennyisége eltér.

IMPULZUSTÉTEL

V térfogatú folyadékrész mozgásmennyiségének megváltozása:
- Lokális (instacioner áramlás)
- Konvektív (az $\underline{A}$ keresztmetszeten ki- és belépő mozgásmennyiség nem egyezik)

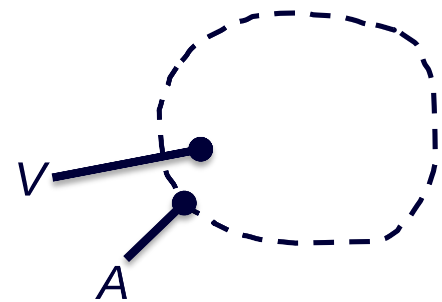
V folyadékrész mozgásmennyiségének időbeli változása: $\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho \underline{v})\,dV$

V folyadékrész mozgásmennyiségének konvektív változása: $\int_A \underline{v}\rho(\underline{v}\,d\underline{A})$
(ki- és belépő impulzusáram különbsége)

Mivel integrál alak, és az eredmény vektoriális, mindenképpen kell ellenőrző felület.

Impulzustétel:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho \underline{v})\,dV + \int_A \underline{v}\rho(\underline{v}\,d\underline{A}) = \int_V \rho \underline{g}\,dV - \int_A p\,d\underline{A}$$



$\rho \underline{v}\,d\underline{A}$ a felületen egységnyi idő alatt átlépő tömeg; mozgásmennyiséghez $\cdot\, \underline{v}$

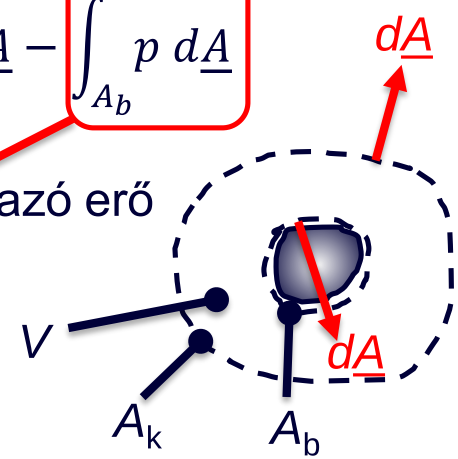
Instacioner tag számítása nehézkes → stacioner (vagy azzá tett) áramlás célszerű

Impulzustétel, az ellenőrző felületben szilárd testtel:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho\underline{v})dV + \int_{A_k}\underline{v}\rho(\underline{v}d\underline{A}) + \boxed{\int_{A_b}\underline{v}\rho(\underline{v}d\underline{A})} = \int_V \rho\underline{g}dV - \int_{A_k} p\, d\underline{A} - \boxed{\int_{A_b} p\, d\underline{A}}$$

=0 mert nincs átáramlás

folyadékra ható, nyomásból származó erő



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho\underline{v})dV + \int_{A}\underline{v}\rho(\underline{v}d\underline{A}) = \int_V \rho\underline{g}dV - \int_{A} p\, d\underline{A} - \underline{R} + \underline{S}$$

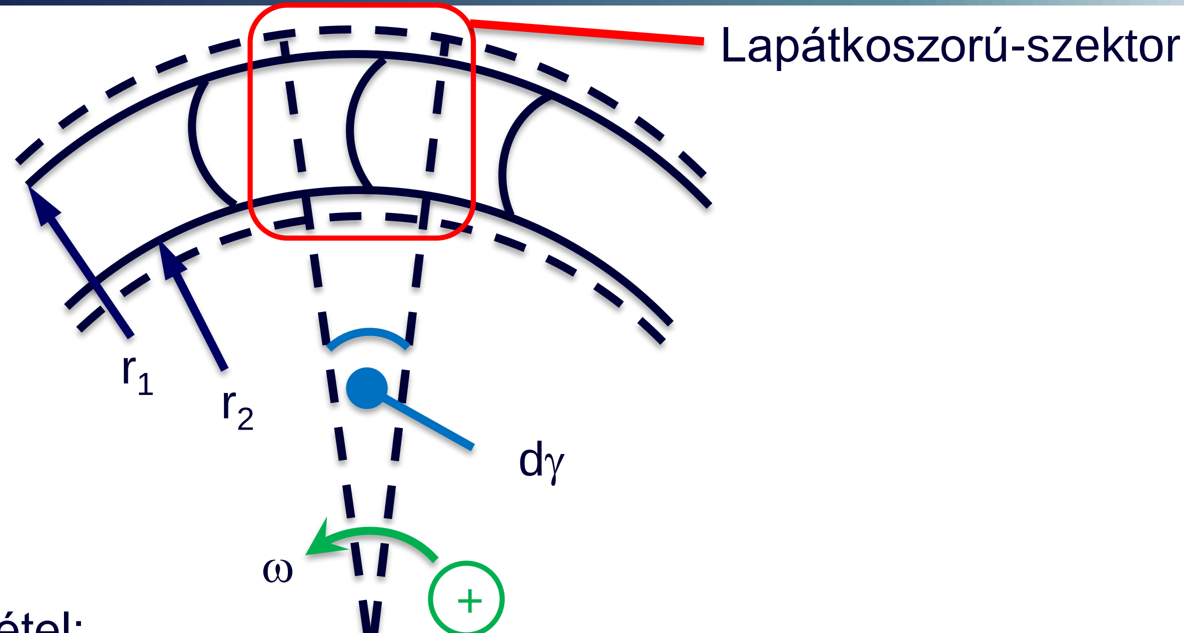
nyomásból származó erő, ami a testre hat, ezért negatív
súrlódásból származó erő, ami a folyadékra hat, ezért pozitív

Impulzustétel: erők és mozgásmennyiség-változás egyensúlya.

Ezen erők a tér egy P pontjára vonatkozó nyomatéka ill. az impulzusáram-vektorok nyomatékának egyensúlya: impulzusnyomatéki egyenlet

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \underline{r}\times(\rho\underline{v})dV + \int_{A}\underline{r}\times\underline{v}\rho(\underline{v}d\underline{A}) = \int_V \underline{r}\times\rho\underline{g}dV - \int_{A} \underline{r}\times p\, d\underline{A} - \underline{M} + \underline{M}_s$$

FRANCIS-TURBINA



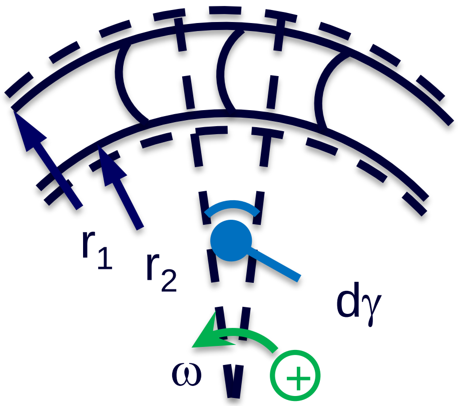
Impulzusnyomatéki tétel:

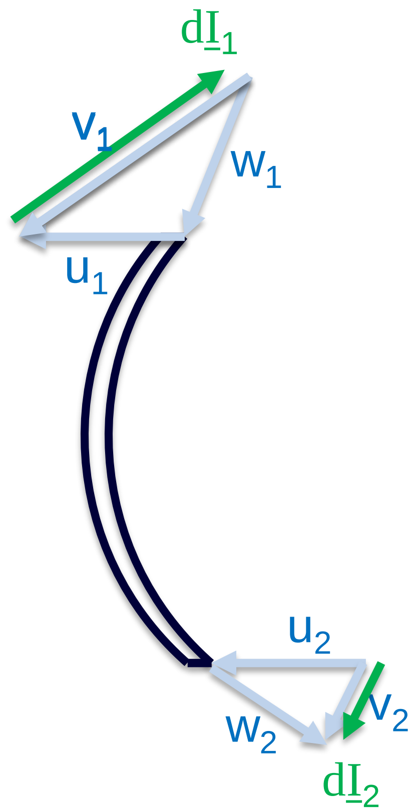
$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \underline{r}\times(\rho\underline{v})dV} + \int_A \underline{r}\times\underline{v}\rho(\underline{v}d\underline{A}) = \cancel{\int_V \underline{r}\times\rho\underline{g}dV} - \cancel{\int_A \underline{r}\times p\,d\underline{A}} - \underline{M} + \cancel{\underline{M}_s}$$

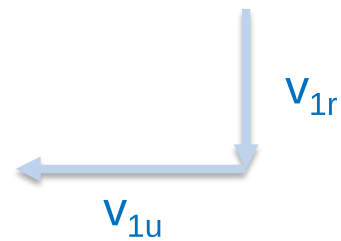
Feltételezések, egyszerűsítések (abszolút rendszerben vizsgáljuk):
- Ha elég sűrű (="végtelenül"), akkor stacionernek tekinthető az áramlás, és
- a nyomásból származó erőnek nincs nyomatéka a tengelyre,
- térerő, súrlódás hatása elhanyagolható.

Így az impulzusnyomatéki tétel végül: $\int_{\underline{A}} \underline{r}\times\underline{v}\rho\underline{v}d\underline{A} = -\underline{M}$

FRANCIS-TURBINA







v_1: előterelő miatt érkezik így

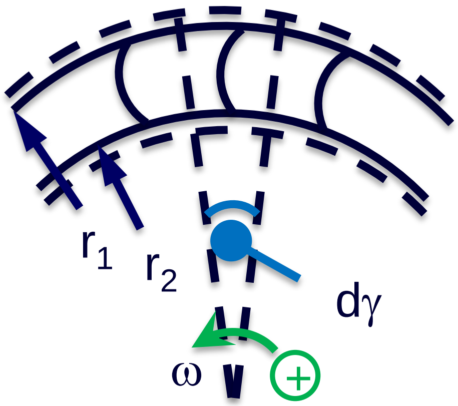
Rajz síkjára merőleges méret

Egységnyi tömegáram jelölt felületrészeken: $dq_m = r_1 d\gamma \cdot b \cdot \rho \cdot v_{1r}$

Impulzusáram: $|d\underline{I}| = dq_m|\underline{v}|$

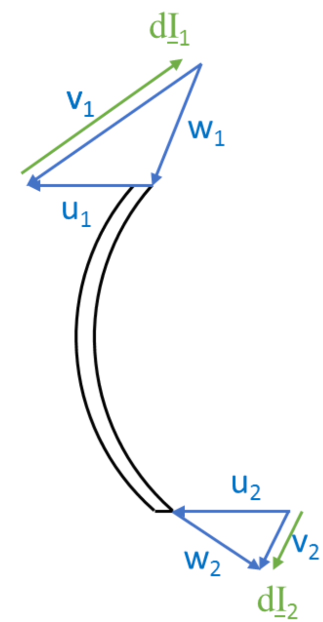
Nyomatéki egyensúly: $-dI_{1u}r_1 + dI_{2u}r_2 = -dM = -dq_m v_{1u} r_1 + dq_m v_{2u} r_2$

FRANCIS-TURBINA, EULER-TURBINAEGYENLET



$$-dI_{1u}r_1 + dI_{2u}r_2 = -dM = -dq_m v_{1u} r_1 + dq_m v_{2u} r_2$$

Mivel hengerszimmetrikus: $M = q_m(v_{1u}r_1 - v_{2u}r_2)$



Tengelyteljesítmény: $P = M \cdot \omega$

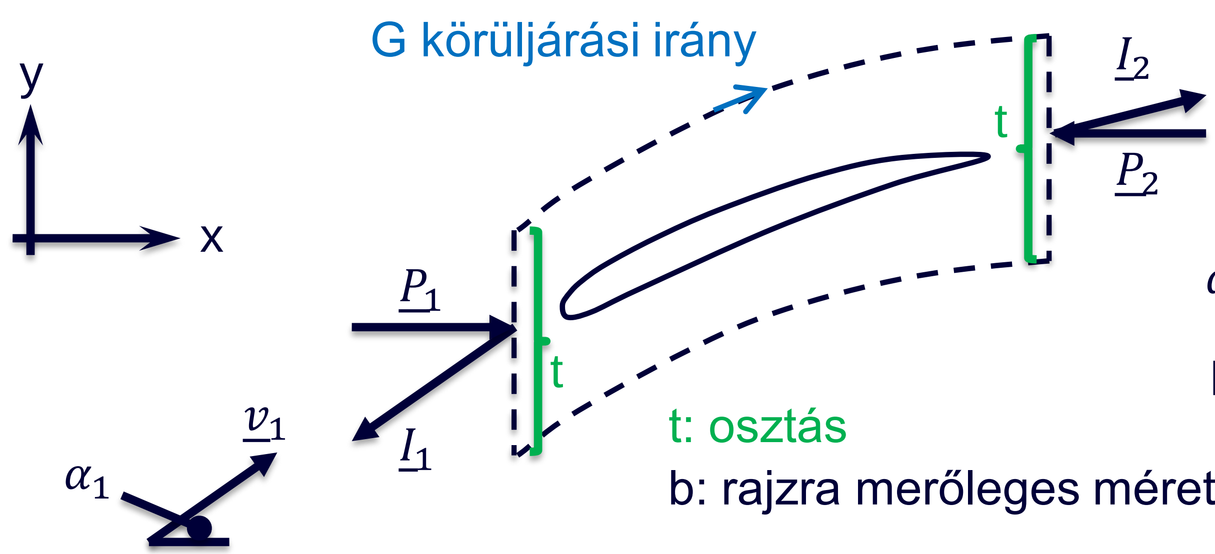
Áramlási teljesítmény (súrlódásmentes esetben): $P = -\Delta p_{öid} \cdot q_v$

$$\underbrace{\boxed{\cancel{q_v} \cdot \rho}}_{q_m} \cdot (v_{1u}r_1 - v_{2u}r_2) \cdot \omega = -\Delta p_{öid} \cdot \cancel{q_v}$$

$$\Delta p_{öid} = \rho \cdot (\underbrace{\omega v_{2u} r_2}_{u_2} - \underbrace{\omega v_{1u} r_1}_{u_1}) = \boxed{\rho \cdot (v_{2u}u_2 - v_{1u}u_1)}$$

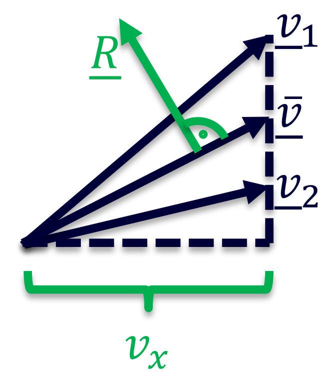
Euler-turbinaegyenlet

SZÁRNYRÁCS (VÉGTELEN NAGY KITERJEDÉSŰ)



$q_m = t \cdot b \cdot \rho \cdot v_x$, innen:

kontinuitás: $v_{1x} = v_{2x}$

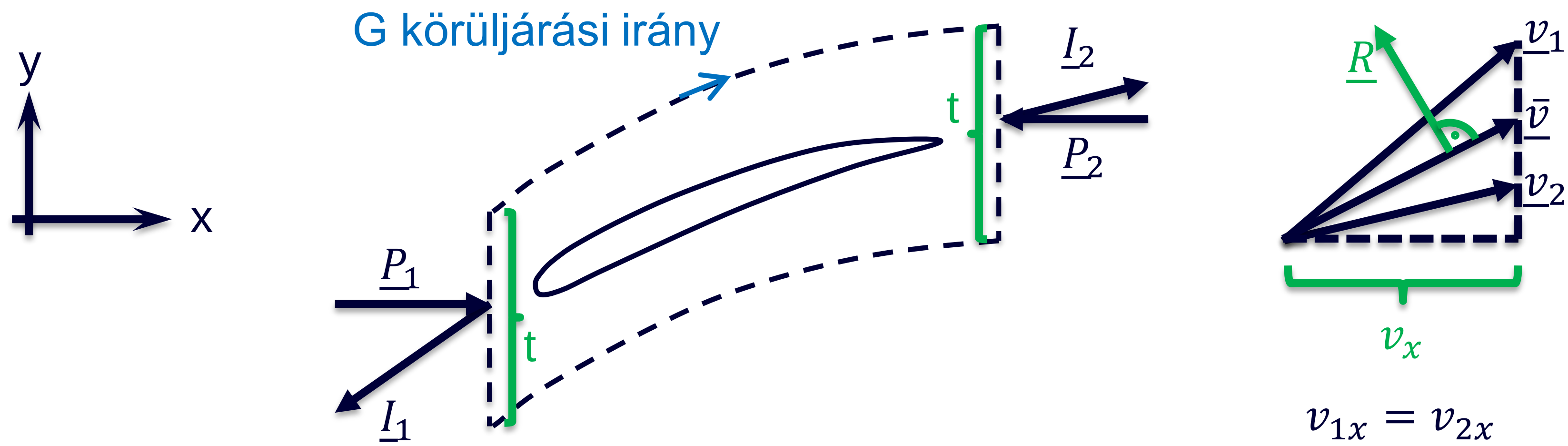


Impulzustétel:

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_V (\rho \underline{v}) dV} + \int_{\underline{A}} \underline{v}\rho(\underline{v}\, d\underline{A}) = \cancel{\int_V \rho \underline{g}\, dV} - \int_{\underline{A}} p\, d\underline{A} - \underline{R}$$

Egyszerűsítések: stacioner, súrlódásmentes, súlyerő elhanyagolva:

$$\int_{\underline{A}} \underline{v}\rho(\underline{v}\, d\underline{A}) = -\int_{\underline{A}} p\, d\underline{A} - \underline{R}$$



Impulzustétel X és Y irányú komponensegyenletei:

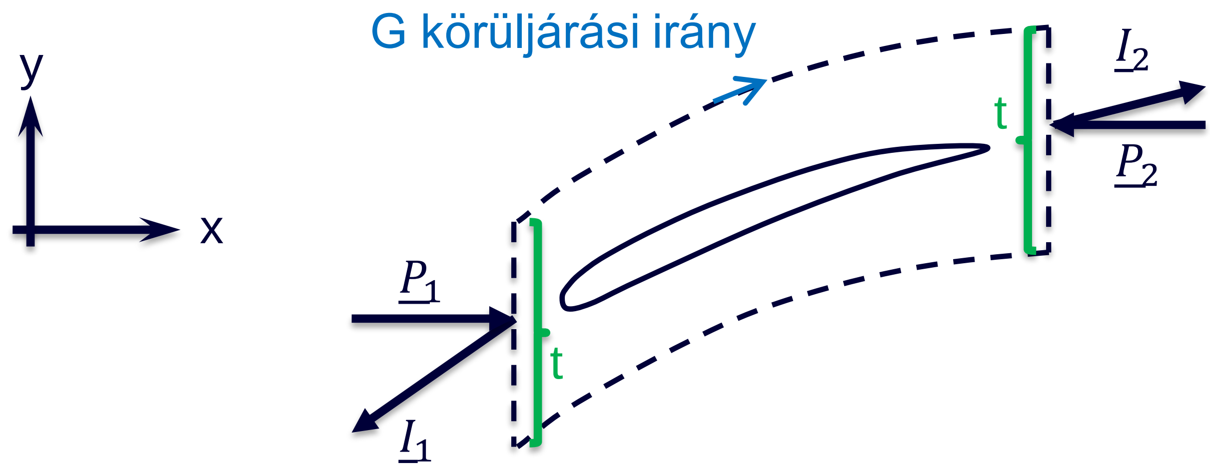
X: $-I_{1x} + I_{2x} = P_{1x} - P_{2x} - R_x \;\rightarrow -\rho v_{1x}^2 A + \rho v_{2x}^2 A = p_1 A - p_2 A - R_x$

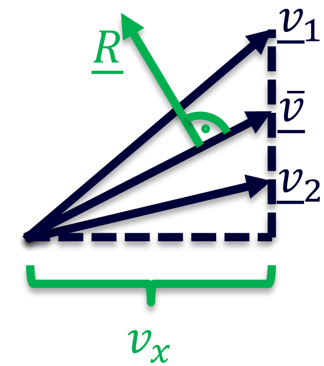
Y: $-I_{1y} + I_{2y} = -R_y \;\rightarrow -\rho v_x A v_{1y} + \rho v_x A v_{2y} = -R_y$

$A = t \cdot b = t \cdot 1m$ valamint $v_{1x} = v_{2x}$ ezért $q_m = \rho v_x A = \rho v_x t$

X: $\cancel{-\rho v_{1x}^2 A} + \cancel{\rho v_{2x}^2 A} = p_1 A - p_2 A - R_x \rightarrow R_x = p_1 t - p_2 t = (p_1 - p_2) t$

Y: $-\rho v_x A v_{1y} + \rho v_x A v_{2y} = -R_y \;\rightarrow R_y = \rho v_x t (v_{1y} - v_{2y})$





$$\underline{v_{1x} = v_{2x}}$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

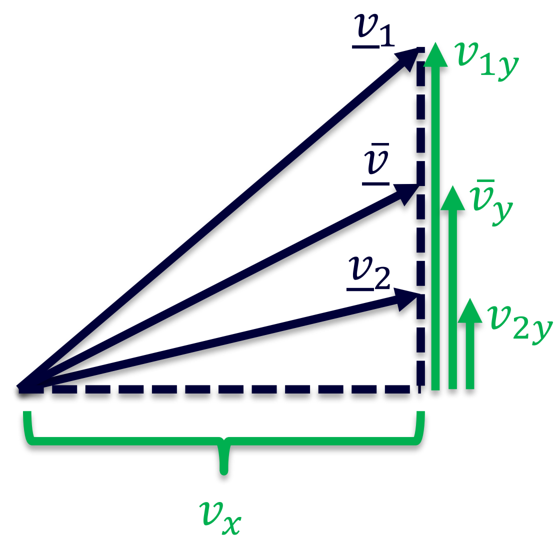
Bernoulli 1 és 2 között: $p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2)$

$v_2^2 - v_1^2 = \cancel{v_{2x}^2} + v_{2y}^2 - \cancel{v_{1x}^2} - v_{1y}^2 = v_{2y}^2 - v_{1y}^2$ ebből

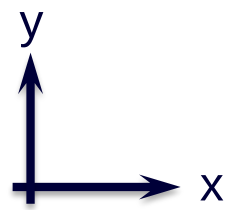
$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_{2y}^2 - v_{1y}^2) = \frac{\rho}{2}(v_{2y} + v_{1y})(v_{2y} - v_{1y})$$

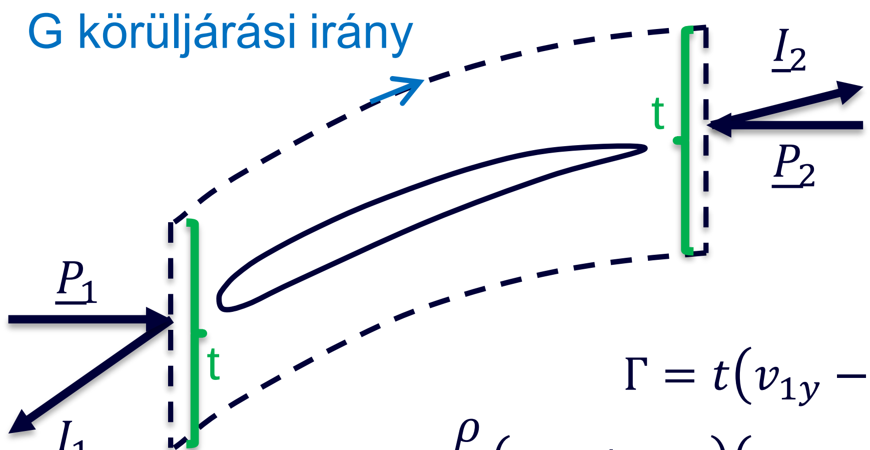
Cirkuláció: $\Gamma = \oint_G \underline{v} d\underline{s}$

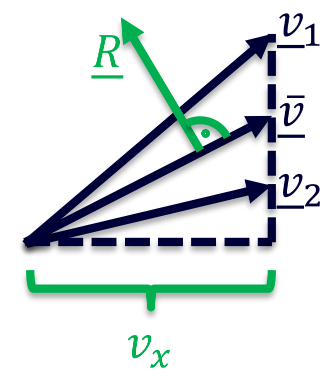
Az ellenőrző "felületre" felírva: $\Gamma = t(v_{1y} - v_{2y})$



SZÁRNYRÁCS







$$\Gamma = t\left(v_{1y} - v_{2y}\right)$$

$$v_{1x} = v_{2x}$$

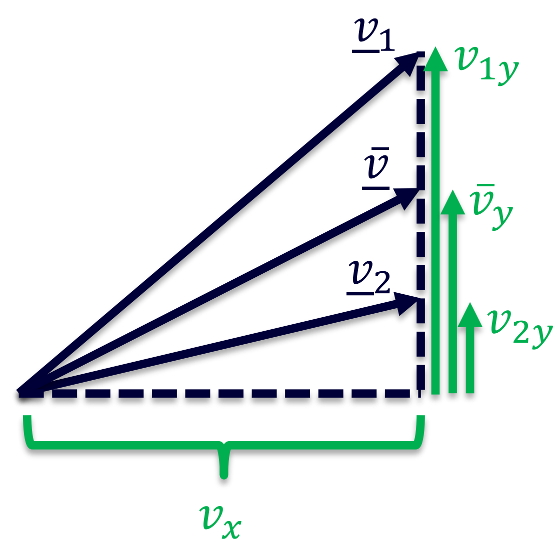
$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left(v_{2y} + v_{1y}\right)\left(v_{2y} - v_{1y}\right)$$

$$R_x = (p_1 - p_2)t = \frac{\rho}{2}\left(v_{2y} + v_{1y}\right)\left(v_{2y} - v_{1y}\right)t = -\frac{\rho}{2}t\left(v_{2y} + v_{1y}\right)\left(v_{1y} - v_{2y}\right) =$$

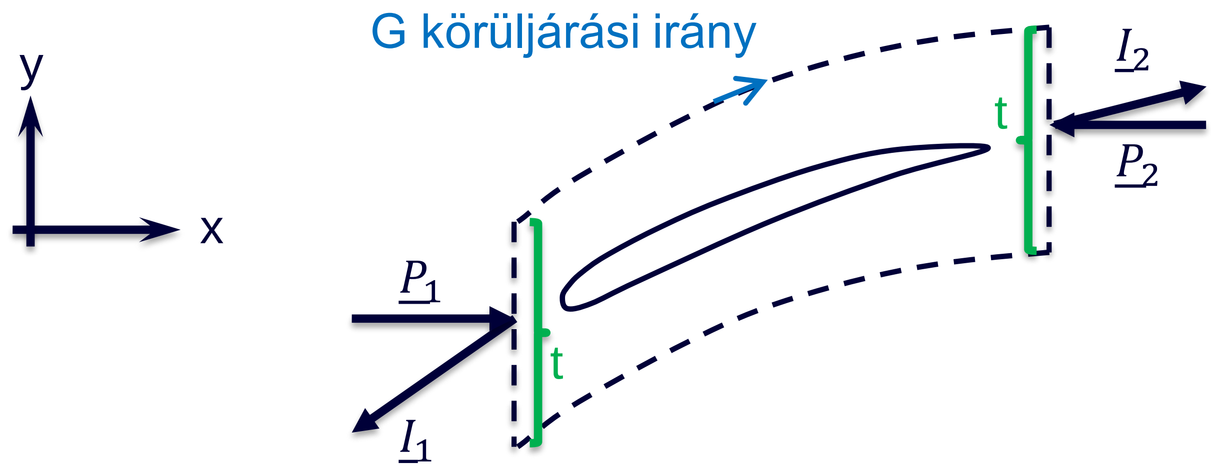
$$= -\frac{\rho}{2}\Gamma\left(v_{2y} + v_{1y}\right)$$

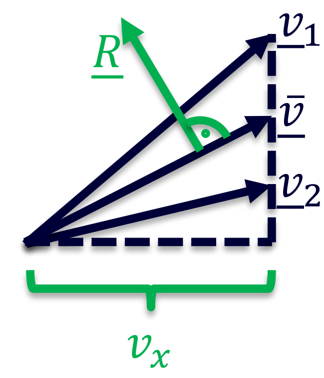
$$R_y = \rho v_x t\left(v_{1y} - v_{2y}\right) = \rho v_x \Gamma$$

$$\left|\underline{R}\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \rho\Gamma\sqrt{\left(\frac{v_{2y} + v_{1y}}{2}\right)^2 + v_x^2} = \rho \cdot \Gamma \cdot \underline{\bar{v}}$$



SZÁRNYRÁCS, KUTTA-ZSUKOVSZKIJ TÉTEL





$$v_{1x} = v_{2x}$$

$$\left|\underline{R}\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \rho\Gamma\sqrt{\left(\frac{v_{2y} + v_{1y}}{2}\right)^2 + v_x^2} = \rho \cdot \Gamma \cdot \left|\underline{\bar{v}}\right|$$

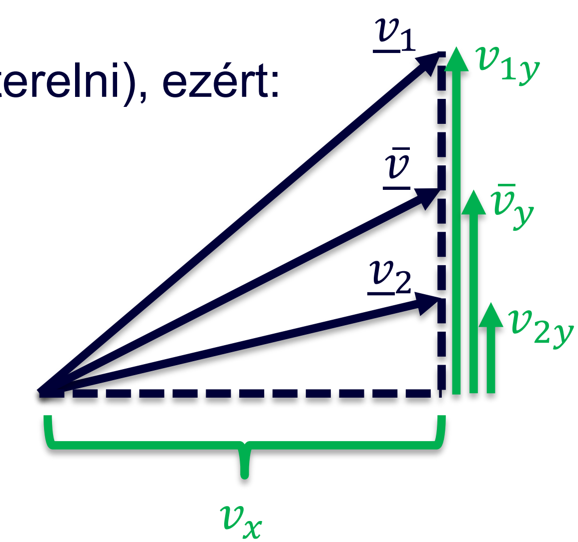
Ha $t \to \infty$ akkor $v_{1y} - v_{2y} \to 0$ (egyre kevésbé bírja elterelni), ezért:

$\underline{v}_2 \to \underline{v}_1$, vagyis $\underline{\bar{v}} \cong \underline{v}_1 = \underline{v}_\infty$, és

$(p_1 - p_2) \to 0$

Innen:

$\boxed{R = F_f = \rho \cdot \Gamma \cdot \left|\underline{v}_\infty\right|}$ Kutta-Zsukovszkij tétel



GYAKORLÓ FELADAT 1.

Egy szárny húrhossza $h = 1.3\ m$, húrra merőleges hossza $L = 1\ m$.
A levegő sűrűsége $\rho = 1.2\ \frac{kg}{m^3}$, a szárny haladási sebessége $v_\infty = 80\ \frac{m}{s}$.
A szárny felső részén az áramlási sebesség átlagosan $v_f = 1.1 \cdot v_\infty$,
az alsó részén átlagosan $v_a = 0.9 \cdot v_\infty$

Mekkora felhajtóerőt termel a szárny?

$$\Gamma = \oint_G \underline{v} d\underline{s} \cong v_f \cdot h - v_a \cdot h = 1.3 \cdot (0.2 \cdot v_\infty) = 0.26 \cdot v_\infty$$

$$F_f = \rho \cdot v_\infty \cdot \Gamma = 1997\ \frac{N}{m}$$

GYAKORLÓ FELADAT 2.

14

Hátrahajló lapátozású radiális ventilátor. $\rho = 1.2\,\frac{kg}{m^3}$, járókerék átmérője $D_2 = 500\,mm$, lapátszélesség $b = 60\,mm$, kilépő lapátszög $\beta_2 = 45°$, a kilépő sebesség sugárirányú (radiális) komponense $v_{2r} = 15\,\frac{m}{s}$, a fordulatszám $n = 1440\ \frac{1}{min}$, a belépés perdületmentes.

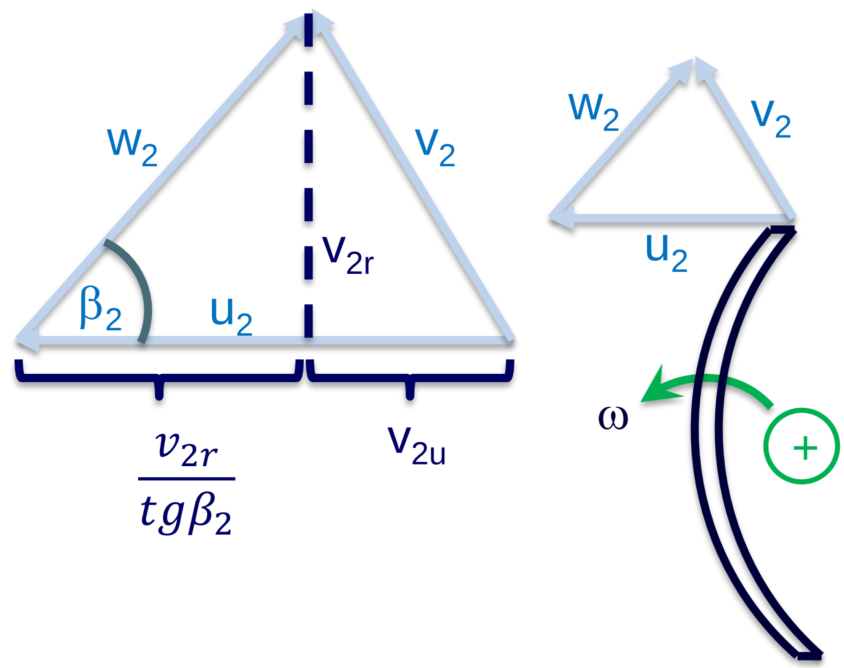
Kérdés: $q_v = ?\,, \Delta p_{ö} = ?\,, P = ?$

$$q_v = D_2 \pi b_2 v_{2r} = 1.41\,\frac{m^3}{s}$$

$$\omega = 2\pi n = 150\,\frac{1}{s}$$

Perdületmentes: $v_{1u} = 0$

$$\Delta p_{öid} = \rho \cdot (v_{2u}u_2 - v_{1u}u_1) = \rho \cdot v_{2u}u_2$$



$$u_2 = \frac{D_2}{2}\omega = 37.7\,\frac{m}{s}$$

$$v_{2u} = u_2 - \frac{v_{2r}}{tg\beta_2} = 22.7\,\frac{m}{s} \ \rightarrow \Delta p_{öid} = \rho \cdot v_{2u}u_2 = 1026\ Pa$$

$$P = q_v \cdot \Delta p_{öid} = 1.45\ kW$$