

## Energiaegyenlet

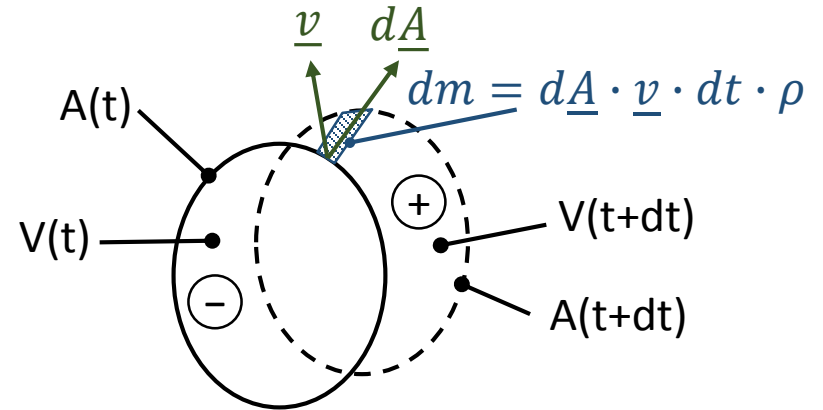
Áramló gáz egy gondolatban elhatárolt,  $V$  térfogatú elúszó része:

Van:

- belső energiája,
- mozgási energiája,
- helyzeti energiája.

Az energiáját megváltoztathatja:

- az erőtér által végzett munka,
- a felületi erők munkája, ezen belül
  - a nyomásból és
  - a súrlódásból származó erők munkája,
- hőközlés.




Legyen az áramlás stacioner, a térerőt elhanyagoljuk.

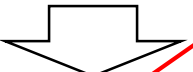
A gáz energiájának változása és a felületi munkavégzés és hőátvitel között:

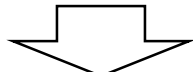
$$\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{v^2}{2} + c_v T \right) \rho dV = - \int_A \underline{v} p d\underline{A} + \int_A \underline{v} \tau \underline{e} |d\underline{A}| + \int_A \lambda \underline{\text{grad}} T d\underline{A}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{v^2}{2} + c_v T \right) \rho dV = - \int_A \underline{v} p d\underline{A} + \int_A \underline{v} \tau e |d\underline{A}| + \int_A \lambda \underline{\text{grad}} T d\underline{A}$$

  
 V térfogatban levő gáztömeg  
 mozgási és belső  
 energiájának egységnyi idő  
 alatti változása  
 $c_v$  : állandó térfogaton vett  
 fajhő

  
 Nyomásból  
 származó erő  
 teljesítménye

  
 Csúsztatóerőszül-  
 tésegből származó  
 nyíróerő  
 teljesítménye

  
 Környezetből  
 hővezetéssel  
 átadódó  
 hőmennyiség  
 $\lambda$  : hővezetési  
 tényező

Ha súrlódásmentes és hőszigetelt:

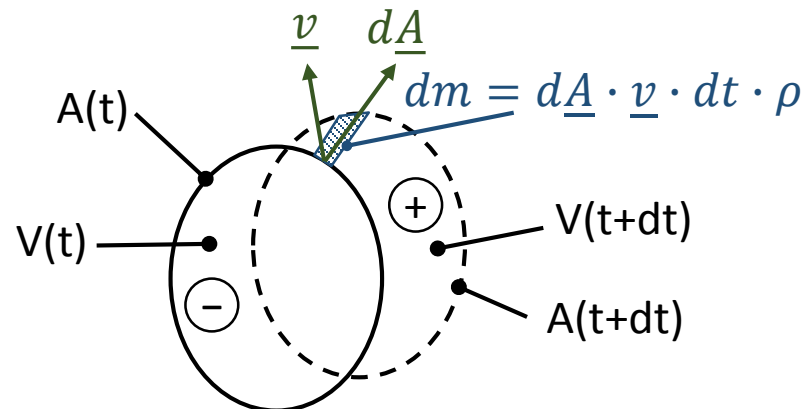
$$\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{v^2}{2} + c_v T \right) \rho dV = - \int_A \underline{v} p d\underline{A}$$

Emlékeztető: Impulzustétel levezetésénél volt:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{v} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \underline{v} dV + \int_A \underline{v} \rho \underline{v} d\underline{A}$$

Mivel az áramlás itt stacioner:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{v} dV = \int_A \underline{v} \rho \underline{v} d\underline{A}$$



Mivel az áramlás itt stacioner:  $\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{v} dV = \int_A \underline{v} \rho \underline{v} dA$

Ennek mintájára:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{v^2}{2} + c_v T \right) \rho dV = \int_A \left( \frac{v^2}{2} + c_v T \right) \rho \underline{v} dA = - \int_A \underline{v} p dA \quad / \cdot \frac{\rho}{\rho}$$

$$\int_A \left( \frac{v^2}{2} + c_v T \right) \rho \underline{v} dA = - \int_A \frac{p}{\rho} \rho \underline{v} dA \longrightarrow \int_A \left( \frac{v^2}{2} + c_v T + \frac{p}{\rho} \right) \rho \underline{v} dA = 0$$

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T = (c_p - c_v) T \longrightarrow c_v T + \frac{p}{\rho} = \cancel{c_v T} + c_p T - \cancel{c_v T} = c_p T = h \text{ (entalpia)}$$

$$\text{A fentiek alapján: } \int_A \left( \frac{v^2}{2} + c_p T \right) \rho \underline{v} dA = 0$$

Gauss-Osztrogradszkij alapján:

$$\int_A \left( \frac{v^2}{2} + c_p T \right) \rho \underline{v} dA = \int_V \operatorname{div} \left( \left( \frac{v^2}{2} + c_p T \right) \rho \underline{v} \right) dV$$

Emlékeztetőül (szorzat deriválási szabályok miatt):  $\operatorname{div}(\rho \underline{v}) = \underline{v} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \underline{v}$

$$\int_V \operatorname{div} \left( \left( \frac{v^2}{2} + c_p T \right) \rho \underline{v} \right) dV = \int_V \left( \rho \underline{v} \operatorname{grad} \left( \frac{v^2}{2} + c_p T \right) + \left( \frac{v^2}{2} + c_p T \right) \operatorname{div}(\rho \underline{v}) \right) dV$$

Kontinuitás:  $\operatorname{div}(\rho \underline{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  mert az áramlás stacioner.

Vagyis:  $\int_V \rho \underline{v} \operatorname{grad} \left( \frac{v^2}{2} + c_p T \right) dV = 0$

Ez akkor 0, ha az integrálon belüli kifejezés 0:  $\rho \underline{v} \operatorname{grad} \left( \frac{v^2}{2} + c_p T \right) = 0$

Ez pedig akkor 0, ha

- $\rho = 0$  (???)
- $\underline{v} = 0 \rightarrow$  hidrosztatika
- $\operatorname{grad} \left( \frac{v^2}{2} + c_p T \right) = 0 \rightarrow \frac{v^2}{2} + c_p T = \text{áll.}$
- $\operatorname{grad} \left( \frac{v^2}{2} + c_p T \right) \perp \underline{v} \rightarrow \frac{v^2}{2} + c_p T = \text{áll.}$  áramvonal mentén.

$$\frac{v^2}{2} + c_p T = \text{áll.} \quad / c_p \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{v^2}{2c_p}} + \boxed{T} = \text{áll.}$$

$T_{din}$                        $T_{stat}$

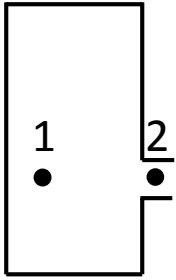
Energiaegyenlet:

Mozgási energia+entalpia = áll.

Összhőmérséklet = áll.

(súrlódásmentes, hőszigetelt, stacioner áramlás, térerő elhanyagolása mellett)

"Példa":



3  
torlópont-  
hőmérő

$$1 - 3: \frac{v_1^2}{2c_p} + T_1 = \frac{v_3^2}{2c_p} + T_3 \quad v_3 = v_1 = 0 \rightarrow T_1 = T_3$$

$$1 - 2: \frac{v_1^2}{2c_p} + T_1 = \frac{v_2^2}{2c_p} + T_2 \rightarrow T_2 = T_1 - \frac{v_2^2}{2c_p}$$

$= 0$

$$\rightarrow v_2 = \sqrt{(T_1 - T_2)2c_p}$$

## Bernoulli-egyenlet összenyomható gázokra

Kiindulás: általános eset, csak súrlódásmentesség feltételezése.

$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s} + \int_1^2 \underline{\text{grad}} \frac{v^2}{2} d\underline{s} - \int_1^2 \underline{v} \times \underline{\text{rot}} \underline{v} d\underline{s} = \int_1^2 \underline{g} d\underline{s} - \int_1^2 \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p d\underline{s}$$

További egyszerűsítés: hőszigetelt  $\rightarrow$  izentróp.

Ekkor  $\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{áll.}$  ahol  $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$  tehát a sűrűség csak a nyomás függvénye.

$$\text{Ezért: } \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p = \underline{\text{grad}} \left( \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \right)$$

További egyszerűsítés: stacioner, áramvonalon integrálunk, térerőt elhanyagoljuk.

$$\text{Valamint: } \int_1^2 \underline{\text{grad}} \frac{v^2}{2} d\underline{s} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \quad \text{és} \quad \int_1^2 \underline{\text{grad}} \left( \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \right) d\underline{s} = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho}$$

Eredmény:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho}$$

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho}$$

Mivel  $\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{áll.} = \frac{p_1}{\rho_1^\kappa} \rightarrow \rho = \frac{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{p_1^{\frac{1}{\kappa}}} \rho_1 \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_1} \frac{1}{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}$  ezért

$$- \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_1} \frac{dp}{p_1^{\frac{1}{\kappa}}} \rightarrow \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p_1^{\frac{1}{\kappa}}} dp = \int_{p_1}^{p_2} p^{-\frac{1}{\kappa}} dp = \left[ \frac{p^{-\frac{1}{\kappa}+1}}{-\frac{1}{\kappa}+1} \right]_1$$

Mivel  $1 - \frac{1}{\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa} - \frac{1}{\kappa} = \frac{\kappa - 1}{\kappa}$  ezért

$$\left[ \frac{p^{-\frac{1}{\kappa}+1}}{-\frac{1}{\kappa}+1} \right]_1 = \left[ \frac{\kappa}{\kappa - 1} p^{1-\frac{1}{\kappa}} \right]_1 \text{ és } \left[ p^{1-\frac{1}{\kappa}} \right]_1 = p_2^{1-\frac{1}{\kappa}} - p_1^{1-\frac{1}{\kappa}} = p_1^{1-\frac{1}{\kappa}} \left( \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right)$$

Innen:

$$- \int_{p_1}^{p_2} \frac{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_1} \frac{dp}{p_1^{\frac{1}{\kappa}}} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_1} p_1^{1-\frac{1}{\kappa}} \left( 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\frac{1}{\kappa}} \right) = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left( 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

ezért váltott előjelet



$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left( 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \quad \text{mivel} \quad \frac{p_1}{\rho_1} = RT_1 \quad \text{ezért}$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2\kappa}{\kappa - 1} RT_1 \left( 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)}$$

Tartály esetében:  $v_1 = v_{\text{tartály}} = 0$  ezért

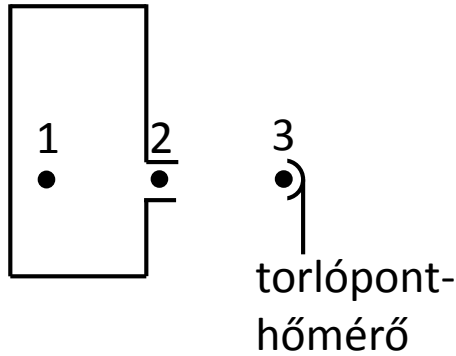
$$v_{ki} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} RT_t \left( 1 - \left( \frac{p_{ki}}{p_t} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)}$$

Mivel

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{áll.} \rightarrow \frac{p_1}{\rho_1^\kappa} = \frac{p_2}{\rho_2^\kappa} \rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2^\kappa}{\rho_1^\kappa} = \frac{p_2^\kappa}{\cancel{p_2^\kappa} T_2^\kappa} \frac{\cancel{R^\kappa} T_1^\kappa}{p_1^\kappa} = \frac{p_2^\kappa}{T_2^\kappa} \frac{T_1^\kappa}{p_1^\kappa} = \frac{p_2}{p_1} \rightarrow \frac{p_2^{1-\kappa}}{p_1^{1-\kappa}} = \frac{T_1^\kappa}{T_2^\kappa} = \frac{p_1^{\kappa-1}}{p_2^{\kappa-1}}$$

$$\text{Vagyis: } \frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad \text{ezért} \quad v_{ki} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} RT_t \left( 1 - \frac{T_{ki}}{T_t} \right)}$$

Példa:



A tartályban levegő van ( $R = 287 \frac{J}{kgK}$ ,  $\kappa = 1.4$ ),

hőmérséklete  $T_t = 20^\circ C$ ,

nyomása  $p_t = 1.8$  bar.

A külső nyomás  $p_0 = 1$  bar.

A tartály falán levő nyílás átmérője  $d = 4$  mm.

Mennyi a másodpercenként kiáramló közeg?

$$q_m = \rho_{ki} v_{ki} A$$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = 1.257 \cdot 10^{-5} m^2$$

$$\rho_t = \frac{p_t}{RT_t} = 2.14 \frac{kg}{m^3}$$

$$v_{ki} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} RT_t \left( 1 - \left( \frac{p_{ki}}{p_t} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)} = 301.7 \frac{m}{s}$$

$$c_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1} = 1004.5 \frac{J}{kgK}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \rightarrow \rho_{ki} = \rho_t \left( \frac{p_{ki}}{p_t} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = 1.4 \frac{kg}{m^3}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \rightarrow T_{ki} = T_t \left( \frac{p_{ki}}{p_t} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 248K$$

$$q_m = \rho_{ki} v_{ki} A = 0.0053 \frac{kg}{s}$$

$$v_{ki} = \sqrt{(T_t - T_{ki}) 2c_p} = 301.7 \frac{m}{s}$$