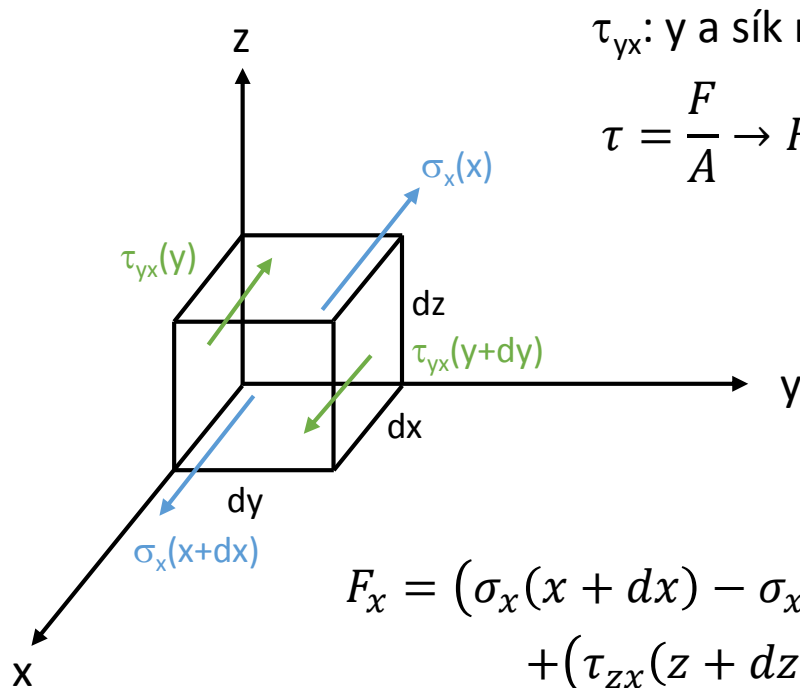


Ismétlés: Mozgásegyenlet

$F = m \cdot a$ Egységnyi tömegre ható erő = gyorsulás

$\underline{F} + \underline{g} = \frac{dv}{dt}$ Felületi (szomszédos részecskétől) + térerő = sebességváltozás

Elemi folyadék rész

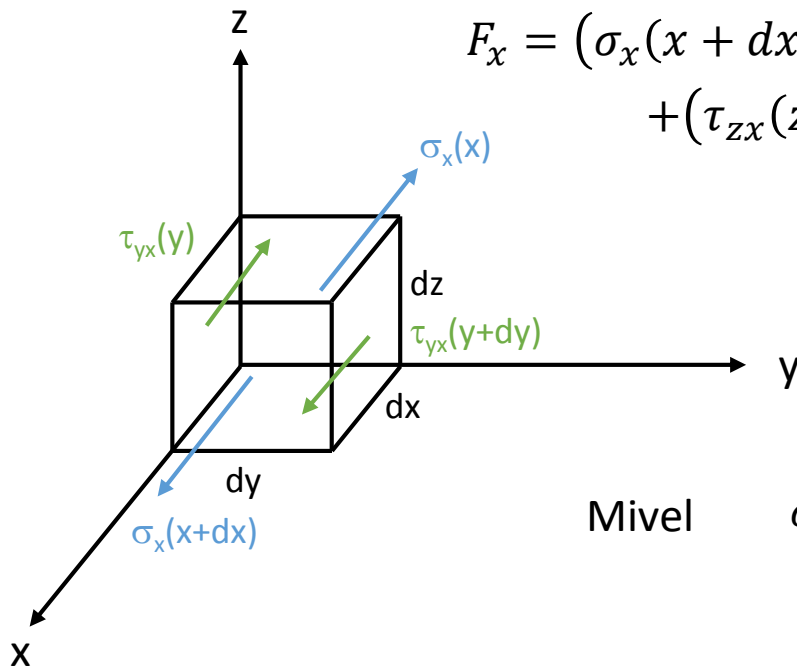


τ_{yx} : y a sík normálisa, x a feszültség iránya

$$\tau = \frac{F}{A} \rightarrow F = \tau \cdot A$$

$$F_x = (\sigma_x(x + dx) - \sigma_x(x))dydz + (\tau_{yx}(y + dy) - \tau_{yx}(y))dxdz + (\tau_{zx}(z + dz) - \tau_{zx}(z))dxdy$$

$$F_x = (\sigma_x(x + dx) - \sigma_x(x))dydz + (\tau_{yx}(y + dy) - \tau_{yx}(y))dxdz + (\tau_{zx}(z + dz) - \tau_{zx}(z))dxdy$$

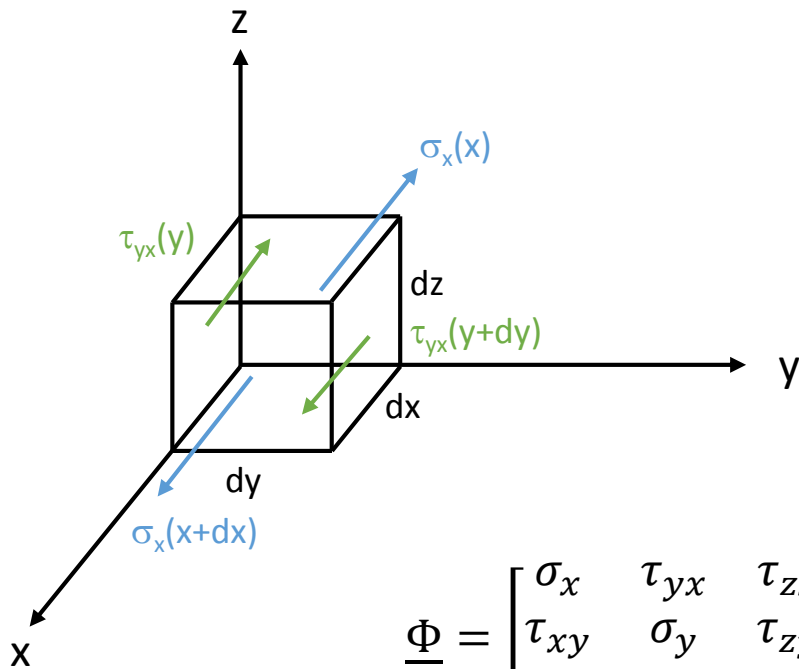


Mivel $\sigma_x(x + dx) = \sigma_x(x) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$

$$F_x = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dxdz + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dxdy$$

Egységnyi tömegre ható erő: $F_{xm} = \frac{F_x}{dm} = \frac{F_x}{\rho dxdydz}$

$$F_{xm} = \frac{1}{\rho dV} \cdot \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dV + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dV + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dV \right)$$



$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$F_{xm} = \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$F_m = \frac{1}{\rho} \cdot \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\nabla} \quad \text{ahol}$$

$$\underline{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \quad \text{és}$$

feszültségtenzor

Innen:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{v} = \underline{g} + \frac{1}{\rho} \cdot \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\nabla}$$

Mozgásegyenlet differenciál alakja

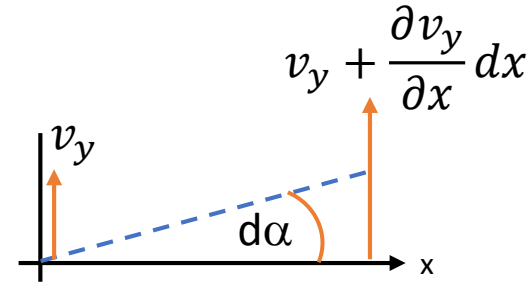
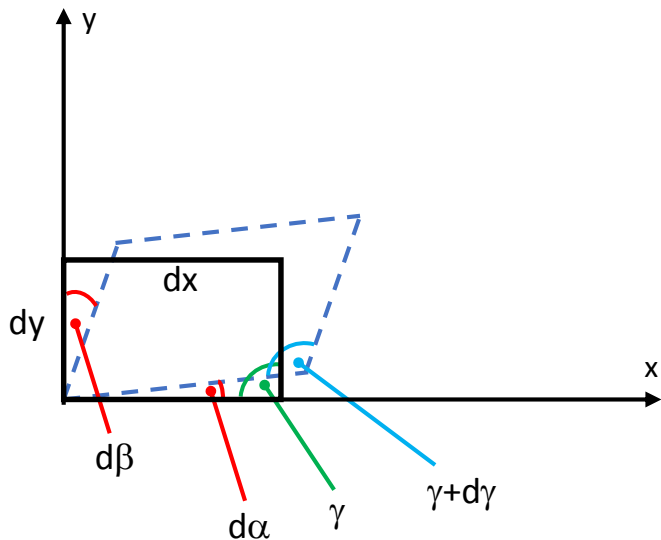
X irányban kifejtve:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = g_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

Feszültségállapot és sebességtér jellemzői közötti kapcsolat

Newtoni közeg: $\tau \sim \frac{d\gamma}{dt}$ azaz a feszültség arányos a deformációsebességgel.

Elemi folyadékhasáb:



$d\alpha$: dt idő alatti elmozdulás miatt

sebességkülönbség: $\frac{\partial v_y}{\partial x} dx$

dt idő alatti különbség a két végpont elmozdulásában: $\frac{\partial v_y}{\partial x} dx \cdot dt$

$$d\alpha: \frac{\text{elmozdulásbeli különbség}}{\text{két pont közti távolság}}: d\alpha = \frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} dx \cdot dt}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} dt \quad d\beta = \frac{\partial v_x}{\partial y} dt$$

$$d\gamma = d\alpha + d\beta \quad \text{és} \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} dt + \frac{\partial v_x}{\partial y} dt}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Mivel $\tau = \mu \cdot \frac{d\gamma}{dt}$ ezért $\tau_{yx} = \mu \cdot \frac{d\gamma_z}{dt} = \mu \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \tau_{xy}$

A hasáb egy éle irányába mutató csúsztatófeszültségek megegyeznek, azaz a feszültségtenzor szimmetrikus.

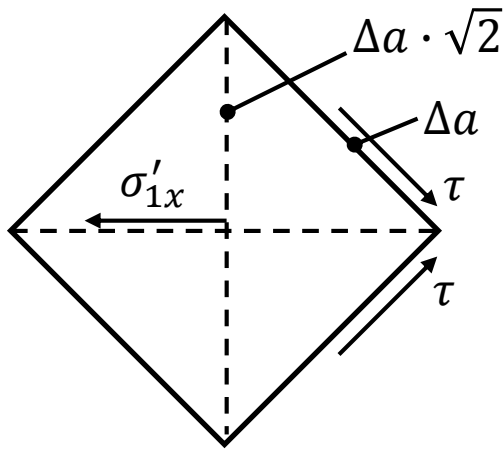
Statikus nyomás: főfeszültségek átlagából: $p_{stat} = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

Negatív előjel: mert a (húzó)feszültség és a nyomás ellentétes irányú.

$\sigma_x = -p_{stat} + \sigma_x'$ Statikus nyomásból+alakváltozási sebességből adódóan.

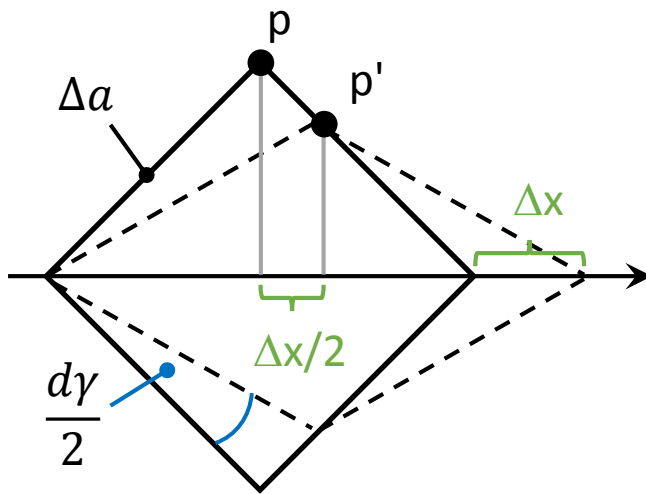
Alakváltozás miatti csúsztatófeszültségből felületre merőleges húzófeszültségek is keletkeznek.

Deformáció következtében keletkező feszültségek meghatározása:
 ábra síkjára merőlegesen egységnyi hosszúságú hasáb:



Erőegyensúly: $2 \cdot \Delta a \cdot \tau \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sigma'_{1x} \cdot \Delta a \cdot \sqrt{2}$

$$\tau = \sigma'_{1x}$$



Δx : nyúlás dt idő alatt.

$$\Delta x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \Delta a \cdot \sqrt{2} \cdot dt$$

$$\frac{\Delta x}{2} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \Delta a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot dt$$

$$\overline{pp'} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \Delta a \cdot dt$$

$$\frac{d\gamma}{2} = \frac{\overline{pp'}}{\Delta a} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dt$$

Mivel $\tau = \sigma'_{1x}$ és $\tau = \mu \cdot \frac{d\gamma}{dt}$

$$\sigma'_{1x} = \mu \frac{d\gamma}{dt} = 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

Ha **csak** tágul: minden irányba egyformán deformálódik: $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$ és $\frac{d\gamma}{dt} = 0$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{3} \operatorname{div} \underline{v} \quad \text{mert} \quad \operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Tehát az X irányú húzófeszültséget okozó deformációsebességet az alábbi kifejezés jellemzi:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \quad \text{helyett} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \underline{v}$$

Innen a deformáció miatti húzófeszültség: $\sigma'_x = 2\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \underline{v} \right)$

Azaz: tágulás (sűrűségváltozás), és a közeg egyéb, sűrűségváltozástól független deformációja esetén:

$$\sigma_x = -p + \sigma'_x = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \underline{v} \quad \text{innen a feszültségtenzor:}$$

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \underline{v} & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \mu \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \underline{v} & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \underline{v} \end{bmatrix}$$

A feszültségtenzor szimmetrikus.

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \underline{v} & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \mu \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \underline{v} & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \mu \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \underline{v} \end{bmatrix}$$

Felbontható:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \left(-p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \underline{v} \right) \cdot \underline{\underline{E}} + 2 \cdot \mu \cdot \underline{\underline{A}}_s \quad \underline{\underline{A}}_s = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

egységmátrix

alakváltozási sebesség tenzor

Mozgásegyenlet: $\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{D} \cdot \underline{v} = \underline{g} + \frac{1}{\rho} \cdot \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\nabla}$

Mozgásegyenlet legáltalánosabb alakja newtoni közegekre, X irányban:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = \\ & = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \underline{v} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right\} \end{aligned}$$

Mozgásegyenlet legáltalánosabb alakja newtoni közegekre, X irányban:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = \\ & = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \underline{v} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right\} \end{aligned}$$

Ismeretlenek: $v_x, v_y, v_z, p, \rho, \mu$

6 ismeretlen, 3 egyenlet (X, Y, Z irányú mozgásegyenlet)

+1: folytonosság (6/4)

p, ρ meghatározása, pl. gáztörvény segítségével

de: újabb ismeretlen: T (7/5)

+1: viszkozitás és hőmérséklet közti összefüggés (anyagjellemző) (7/6)

+1: energiaegyenlet (később) (7/7)

Vagyis: 7 ismeretlen, 7 egyenlet → elméletileg megoldható.

Gyakorlatban: csak korlátozott számú esetben. Vagy: egyszerűsítések, közelítések.

Tegyük fel, hogy a viszkozitás és a sűrűség is állandó. Ha $\rho = \text{áll.}$ akkor $\text{div} \underline{v} = 0$ (kontinuitás)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \cancel{\frac{2}{3} \mu \text{div} \underline{v}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right\} = \\ & = \frac{\mu}{\rho} \left(2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} \right) = \text{div} \underline{v} = 0 \\ & = \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ & = \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad \text{innen:} \end{aligned}$$

$$\text{X:} \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\text{Y:} \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\text{Z:} \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{X: } & \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\
 \text{Y: } & \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\
 \text{Z: } & \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)
 \end{aligned}$$

Navier-Stokes egyenlet

4 ismeretlen van: $v_x; v_y; v_z; p \rightarrow$ kell még egy egyenlet: Kontinuitás.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{ha } \rho = \text{áll.}), \text{ vagyis: } \operatorname{div} \underline{v} = 0$$

Vektoriális alak:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{D} \cdot \underline{v} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{D}^T \cdot \underline{v} + (\underline{D} - \underline{D}^T) \cdot \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \underline{\operatorname{grad}} p + \nu \cdot \Delta \underline{v}$$

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0$$

$$\Delta \underline{v} = \underline{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \underline{v} - \underline{\operatorname{rot}} \underline{\operatorname{rot}} \underline{v} = -\underline{\operatorname{rot}} \underline{\operatorname{rot}} \underline{v}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{v} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} \right) \end{bmatrix} = \underline{\underline{grad}} \frac{v^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T = 2 \cdot \underline{\underline{A}}_\Omega$$

$$\underline{\underline{A}}_\Omega \cdot d\underline{r} = \frac{1}{2} \underline{\underline{rot}} \underline{v} \times d\underline{r} \rightarrow 2\underline{\underline{A}}_\Omega \cdot \underline{v} = \underline{\underline{rot}} \underline{v} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{\underline{rot}} \underline{v}$$

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{D}^T \cdot \underline{v} + (\underline{D} - \underline{D}^T) \cdot \underline{v} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \underline{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \underline{grad} p + \nu \cdot \Delta \underline{v}$$

1

2

3

4

5

6

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{grad} \frac{v^2}{2} - \underline{v} \times \underline{rot} \underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \underline{grad} p - \nu \cdot \underline{rot} \underline{rot} \underline{v}$$

Navier-Stokes egyenlet vektoriális formája

(feltételek: $\mu = \text{áll.}$, $\rho = \text{áll.}$, newtoni közeg)

Euler egyenlet = Navier-Stokes, a 6. tag nélkül.

Euler egyenlet fennáll az alábbi esetekben:

- Potenciális áramlás: $\underline{rot} \underline{v} = 0$, ekkor a 3. és 6. tag zérus, vagy
- Állandó örvényesség: $\underline{rot} \underline{rot} \underline{v} = 0$, ekkor a 6. tag zérus.

Ilyenkor a súrlódásnak nincs szerepe, az áramlás súrlódásmentesként viselkedik.