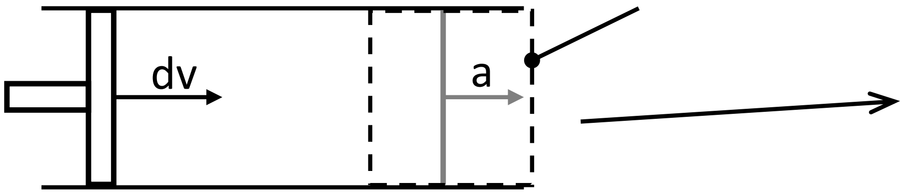
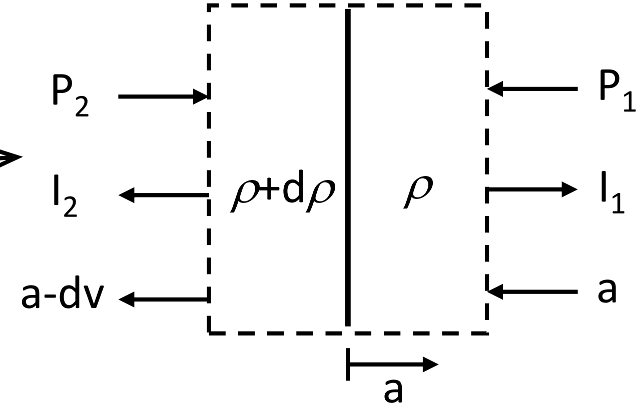
Emlékeztető: energiaegyenlet+gáztörvény $\dfrac{v^2}{2c_p} + T = áll.$ $\dfrac{p}{\rho^{\kappa}} = áll.$

Hullám terjedési sebességének megállapítása

Ellenőrző felület





Hullámterjedési sebesség

Abszolút rendszer:

v:	0+dv	0
p:	p+dp	p
ρ:	ρ+dρ	ρ
T:	T+dT	T

Impulzustétel:

$$I_1 - I_2 = P_2 - P_1$$

$$\rho a^2 \cancel{A} - (\rho + d\rho)(a - dv)^2 \cancel{A} = (\cancel{p} + dp)\cancel{A} - \cancel{p}\cancel{A}$$

$$\rho a^2 - (\rho + d\rho)(a^2 - 2adv + dv^2) = dp$$

$$\cancel{\rho a^2} - \cancel{\rho a^2} + 2\rho a dv - \cancel{\rho dv^2} - a^2 d\rho + \cancel{2ad\rho dv} - \cancel{d\rho dv^2} = dp$$

Másodrendűen kicsi Harmadrendűen kicsi

$$2\rho a dv - a^2 d\rho = dp$$

Kontinuitás:

$$\rho a \cancel{A} = (\rho + d\rho)(a - dv)\cancel{A}$$

$$\cancel{\rho a} = \cancel{\rho a} - \rho dv + a d\rho - \cancel{dv d\rho}$$

Másodrendűen kicsi

$$\rho dv = a d\rho$$

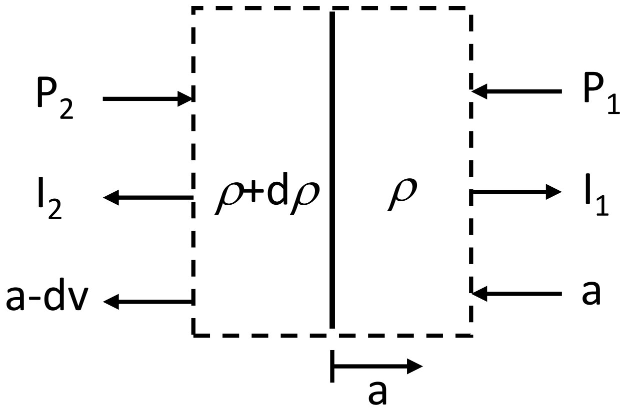
$$2\rho a dv - a^2 d\rho = dp$$

$$2a^2 d\rho - a^2 d\rho = dp$$

$$a^2 d\rho = dp$$

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Konkrétabban?



$$\frac{p}{\rho^\kappa} = áll. \rightarrow \frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \rightarrow p = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa}\rho^\kappa \rightarrow \frac{dp}{d\rho} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa}\kappa\rho^{\kappa-1} = \frac{p}{\rho^{\cancel{\kappa}}}\kappa\cancel{\rho^{\kappa-1}} = \frac{p}{\rho}\kappa = \kappa \cdot R \cdot T$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \kappa \cdot R \cdot T$$

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Vagyis: $a = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T}$

Tehát a hangsebesség gázokban csak a hőmérséklettől függ. Miért?

Mert a molekulák mozgása továbbítja a "jelet".
A hőmérséklet növelésével a molekulák gyorsabban mozognak: gyorsabban tudják továbbítani a jelet.

Áramlások hasonlósága összenyomható közegeknél

Navier-Stokes egyenlet X irányú komponensegyenlete:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

Dimenziótlanítás: $\cdot \frac{L_0}{v_0^2}$ $\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \longrightarrow \cancel{\frac{\partial\left(\frac{p-p_0}{\rho \cdot v_0^2}\right)}{\partial\left(\frac{x}{L_0}\right)}}$ Ez volt. ITT NEM JÓ!!!

Helyette: $\frac{1}{\frac{\rho}{\rho_0}} \frac{\partial\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\partial\left(\frac{x}{L_0}\right)} \frac{p_0}{\rho_0 \, v_0^2}$ mert a sűrűség nem állandó!

Vagyis: $\frac{p_0}{\rho_0 \, v_0^2} = áll. \; (= Eu)$

Energiaegyenlet:

$$\int_V \rho \underline{v}\, \underline{grad}\left(\frac{v^2}{2} + c_p T\right) dV = 0$$

Ennek teljesítéséhez $\underline{grad}(\dots) = 0$ De ekkor $\underline{v}\, \underline{grad}\left(\frac{v^2}{2} + c_p T\right) = 0$

Vagyis: $$v_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2} + c_p T\right) + v_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2} + c_p T\right) + v_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2} + c_p T\right) = 0$$

Dimenziótlanítás: $\cdot \frac{L_0}{v_0^3}$

Ekkor: $$\frac{v_x}{v_0} \frac{\partial}{\partial\left(\frac{x}{L_0}\right)} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 + \boxed{\frac{c_p T_0}{v_0^2}} \frac{T}{T_0}\right) + \dots = 0$$

$$\frac{c_p T_0}{v_0^2} = áll.$$

$$Eu = \frac{p_0}{\rho_0\, v_0^2} = áll. = \frac{R\, T_0}{v_0^2} = \frac{\kappa\, R\, T_0}{\kappa\, v_0^2} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{a_0}{v_0}\right)^2 = \frac{1}{\kappa}\, \frac{1}{Ma^2} = áll.$$

$$\frac{v_0}{a_0} = Ma$$

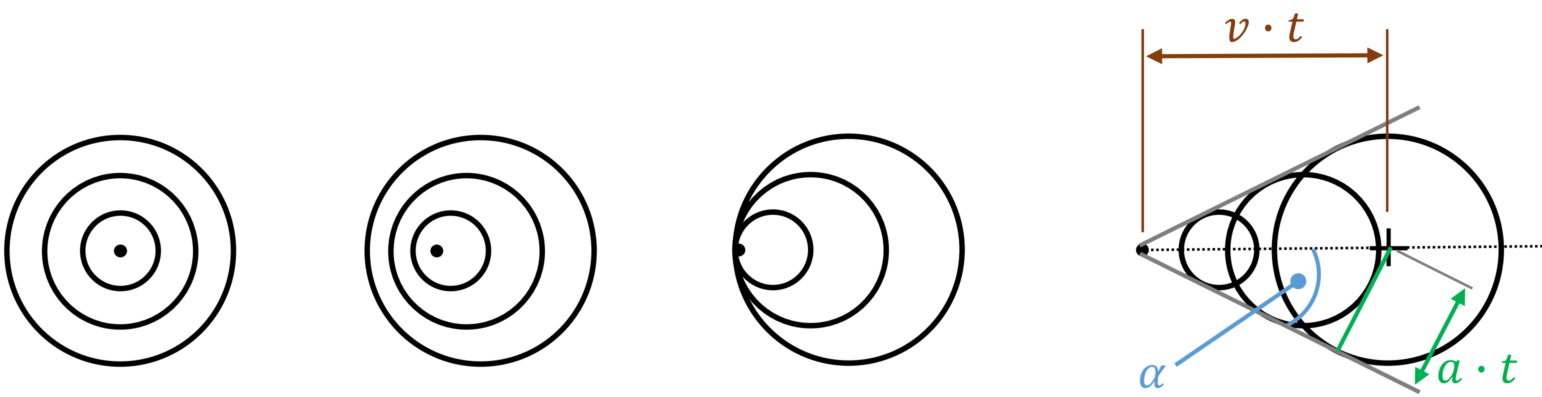
Mivel $\dfrac{c_p T_0}{v_0^2} = áll.$ és $\dfrac{p_0}{\rho_0\, v_0^2} = áll.$

$$\frac{\dfrac{p_0}{\rho_0\, v_0^2}}{\dfrac{c_p T_0}{v_0^2}} = áll. = \frac{p_0}{\rho_0\, \cancel{v_0^2}} \cdot \frac{\cancel{v_0^2}}{c_p T_0} = \frac{R\, \cancel{T_0}}{c_p \cancel{T_0}} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = 1 - \frac{c_v}{c_p} = 1 - \frac{1}{\kappa} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} = áll.$$

$$R = c_p - c_v$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa$$

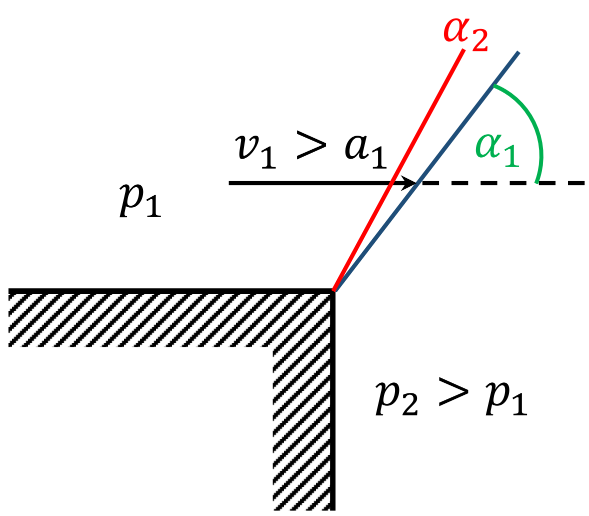
Hullámterjedés



$v = 0$ $\qquad$ $v < a$ $\qquad$ $v = a$ $\qquad$ $v > a$

$$\sin \alpha = \frac{a \cdot t}{v \cdot t} = \frac{1}{Ma}$$

Hullám kialakulása sarok környezetében



$$p_2 > p_1$$

$$v_2 < v_1$$

$$T_2 > T_1$$

$$a_2 > a_1$$

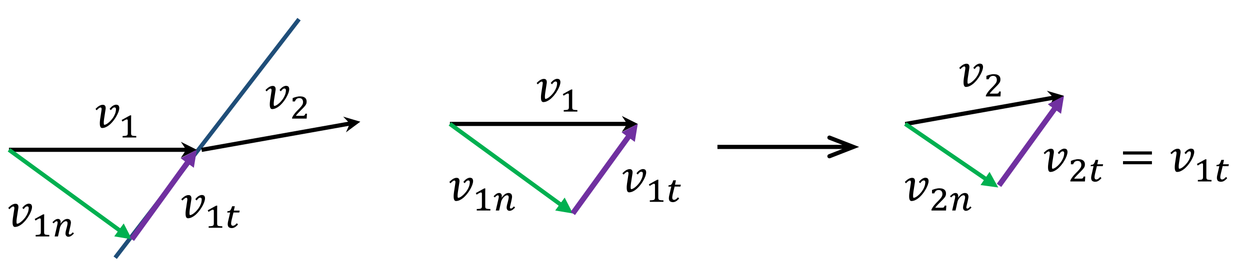
$$Ma_2 < Ma_1$$

$$\frac{1}{Ma_2} > \frac{1}{Ma_1}$$

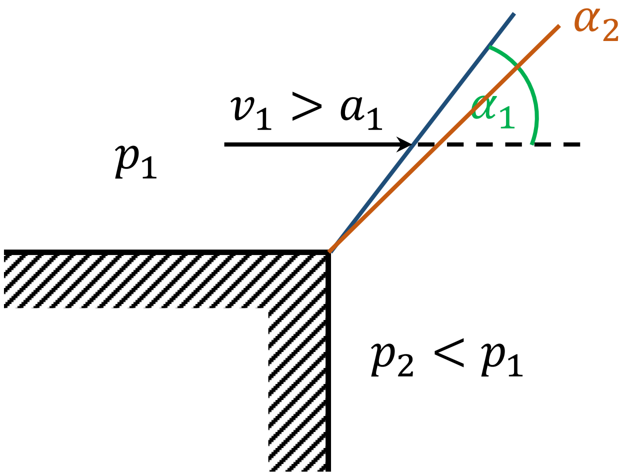
$$\alpha_2 > \alpha_1 \;\rightarrow ???$$

Egy vékony kompressziós hullám: lökéshullám.

A hullámra merőleges sebességkomponenst lassítja.



Hullám kialakulása sarok környezetében



$$p_2 < p_1$$

$$v_2 > v_1$$

$$T_2 < T_1$$

$$a_2 < a_1$$

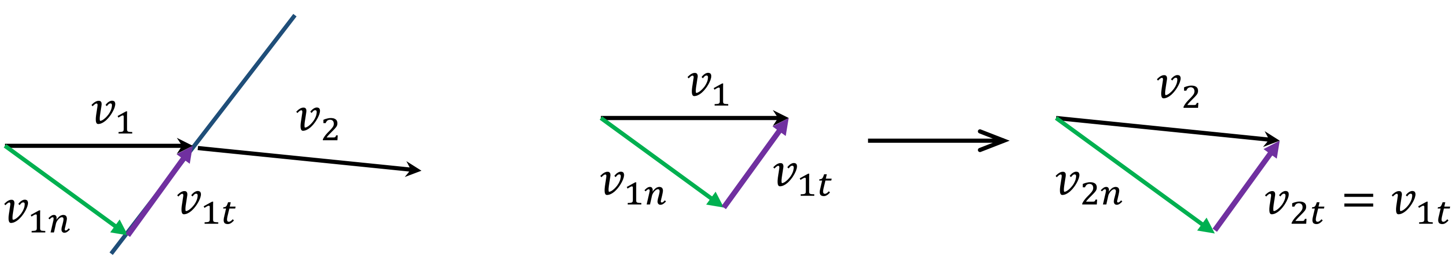
$$Ma_2 > Ma_1$$

$$\frac{1}{Ma_2} < \frac{1}{Ma_1}$$

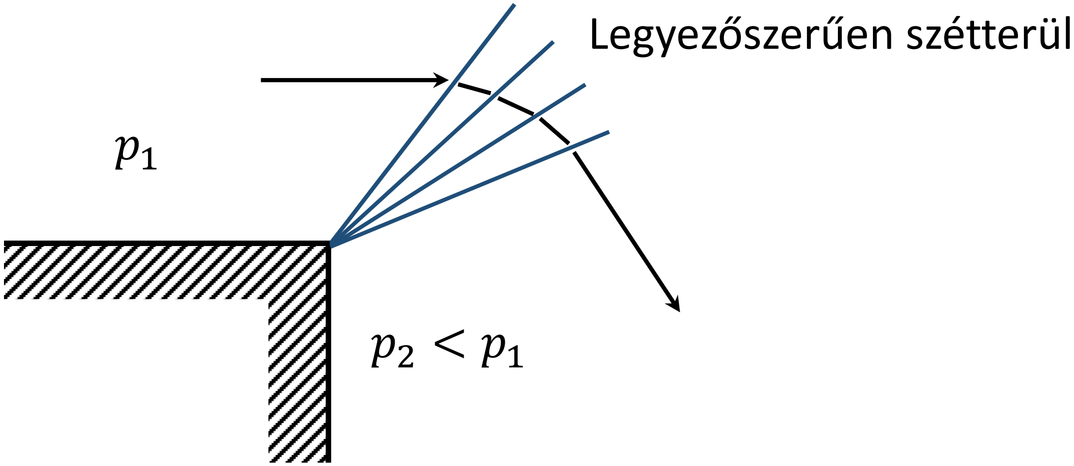
$$\alpha_2 < \alpha_1$$

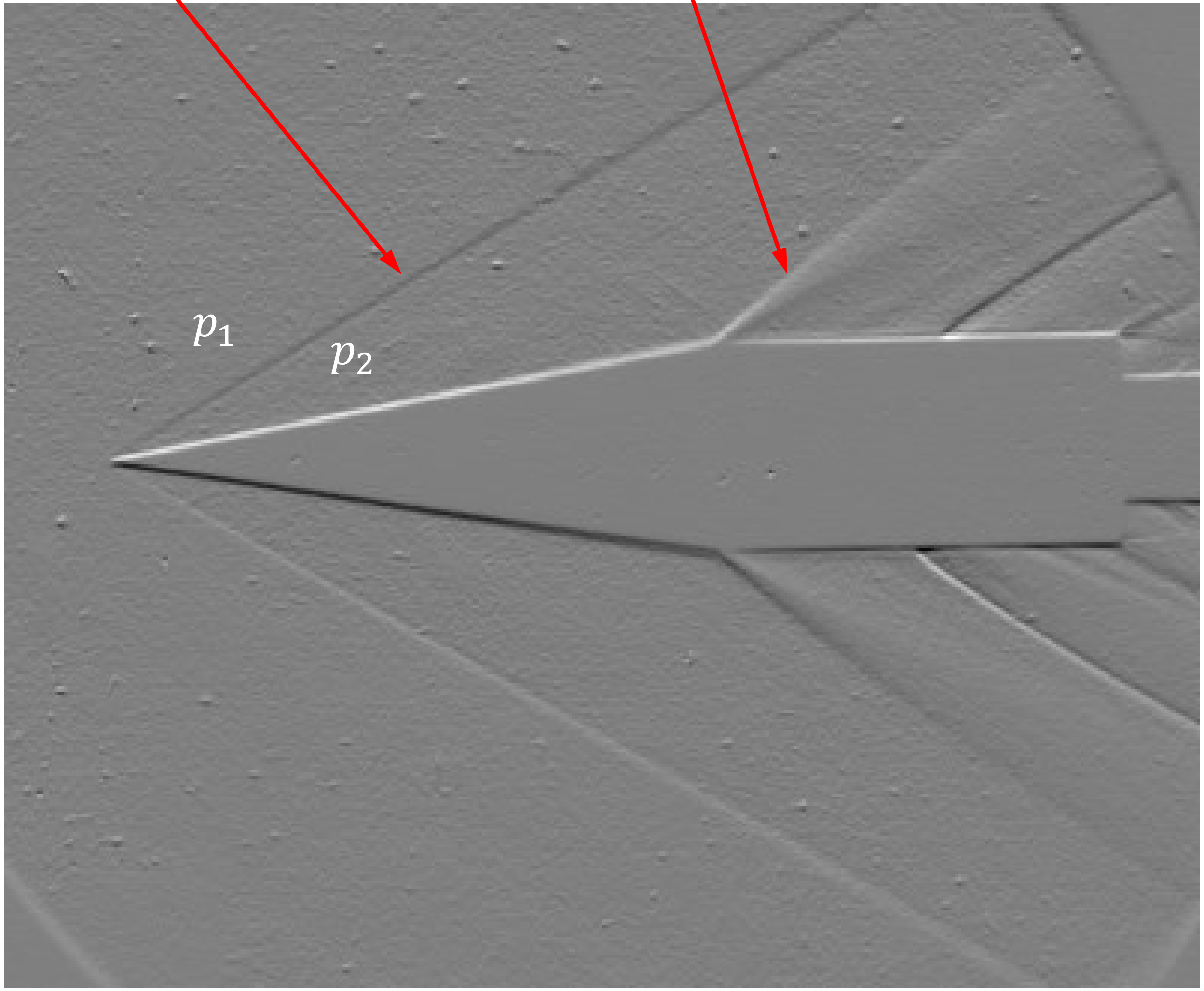
Legyezőszerűen szétterül: expanziós hullám.

A hullámra merőleges sebességkomponenst gyorsítja.



Hullám kialakulása sarok környezetében

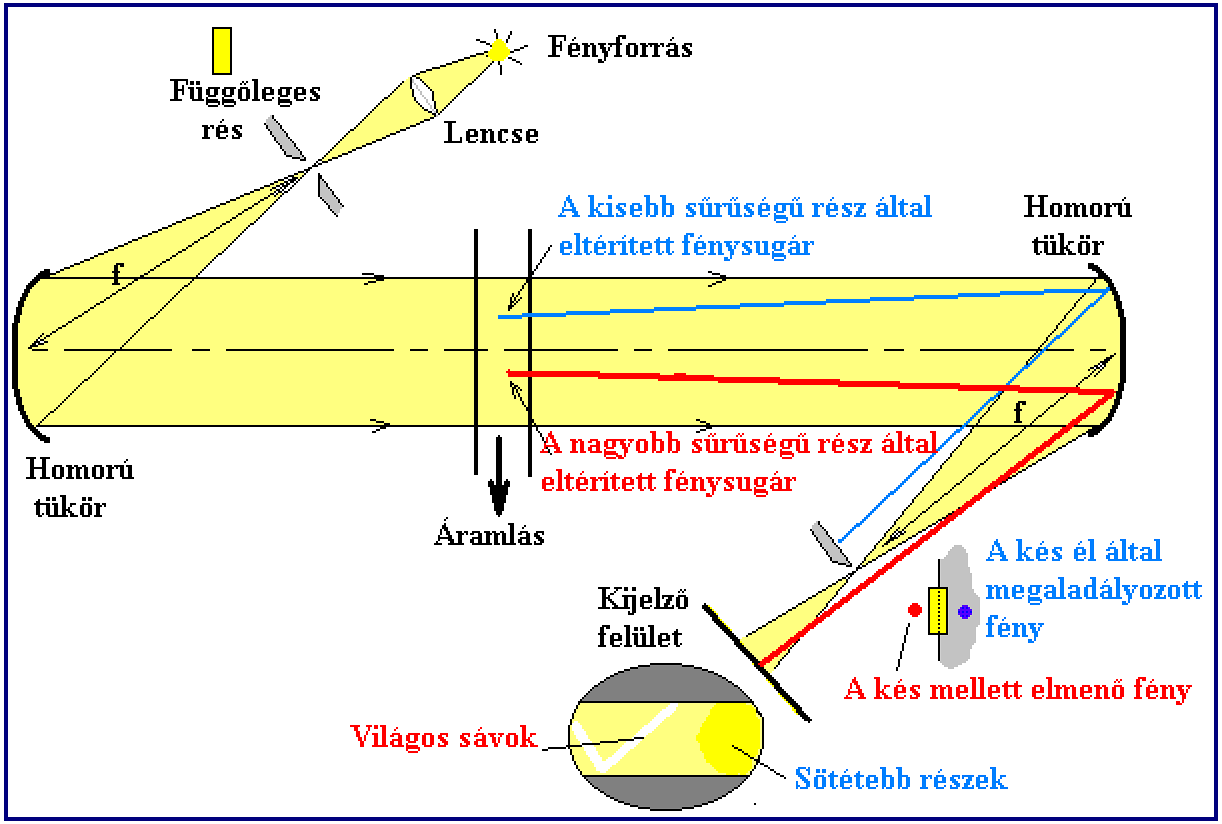




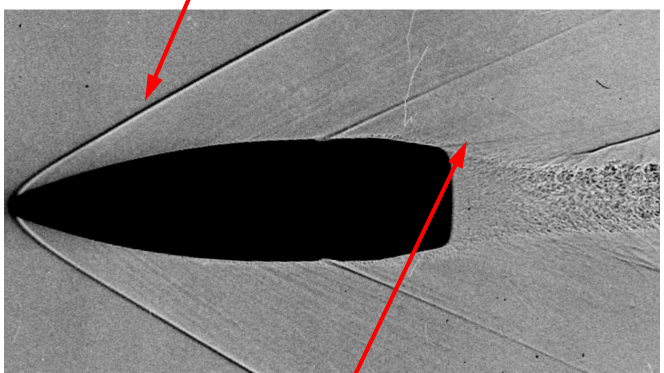
Torlópontban v = 0, tehát $p_2 > p_1$

Schlieren eljárás

http://www.ara.bme.hu/cfd/super2d/super2d.htm



Kompressziós hullám



Expanziós hullám