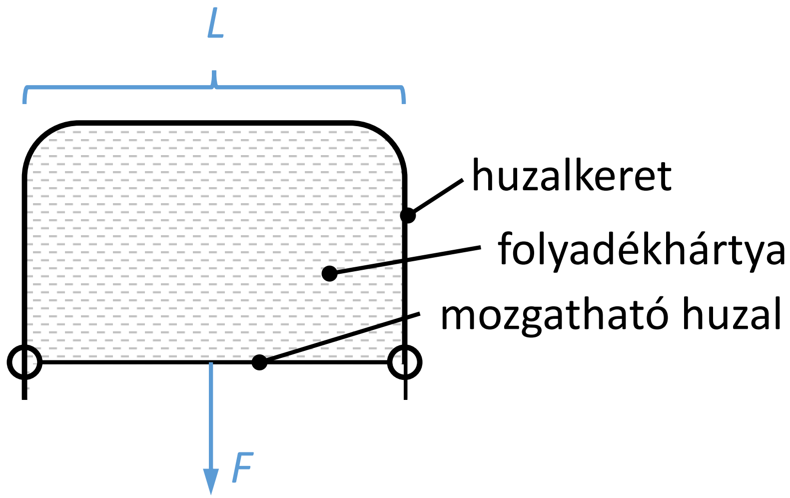
Felületi feszültség: cseppfolyós-gáz határfelületen a vonzerő kiegyensúlyozatlan: rugalmas hártyaként viselkedik.

Mérése:



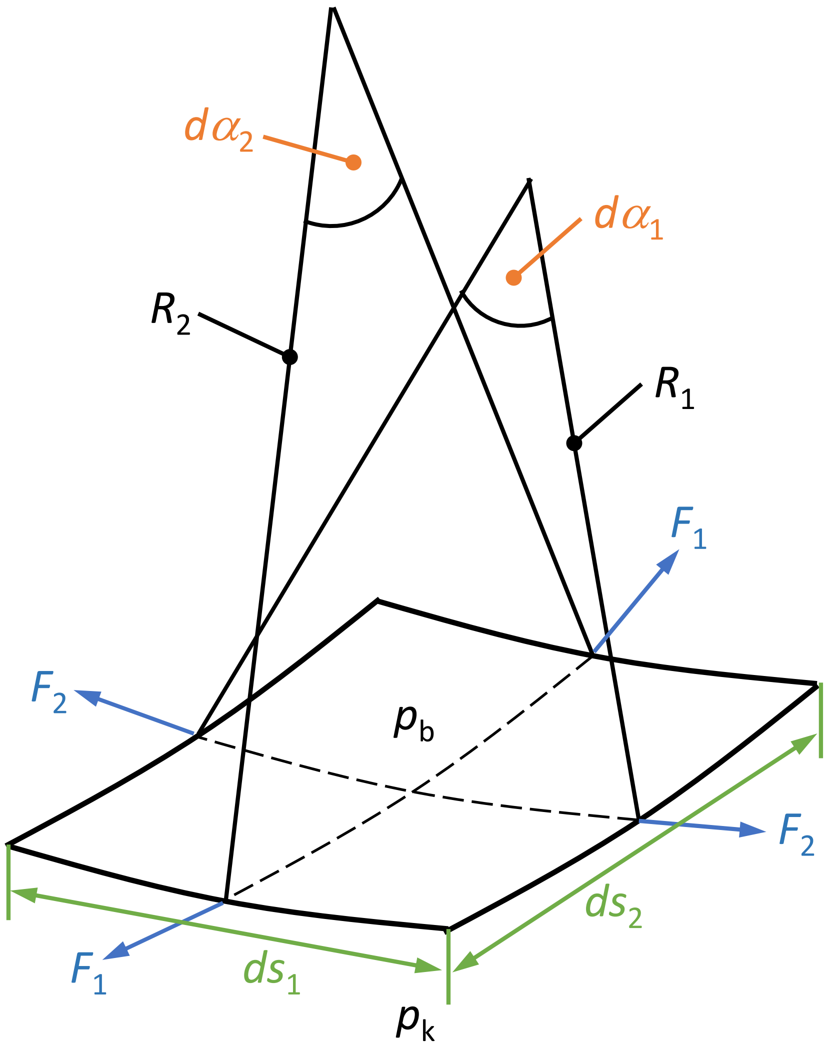
$F = 2 \cdot L \cdot \sigma$

két oldala van a hártyának

$\sigma \left[\frac{N}{m}\right]$: egységnyi hosszra ható, felületi feszültségből származó erő

Levegő-víz esetén $\sigma = 0.072\ \frac{N}{m}$

Ellipszoid alakú vízcsepp:

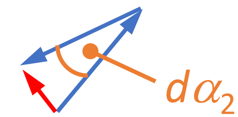


$$ds_1 = R_1 \cdot d\alpha_1 \to d\alpha_1 = \frac{ds_1}{R_1}$$

$$ds_2 = R_2 \cdot d\alpha_2 \to d\alpha_2 = \frac{ds_2}{R_2}$$

$$F_1 = ds_1 \cdot \sigma$$

$$F_2 = ds_2 \cdot \sigma$$



Eredő erő:

$$F_{e1} = ds_1 \cdot \sigma \cdot d\alpha_2$$

$$F_{e2} = ds_2 \cdot \sigma \cdot d\alpha_1$$

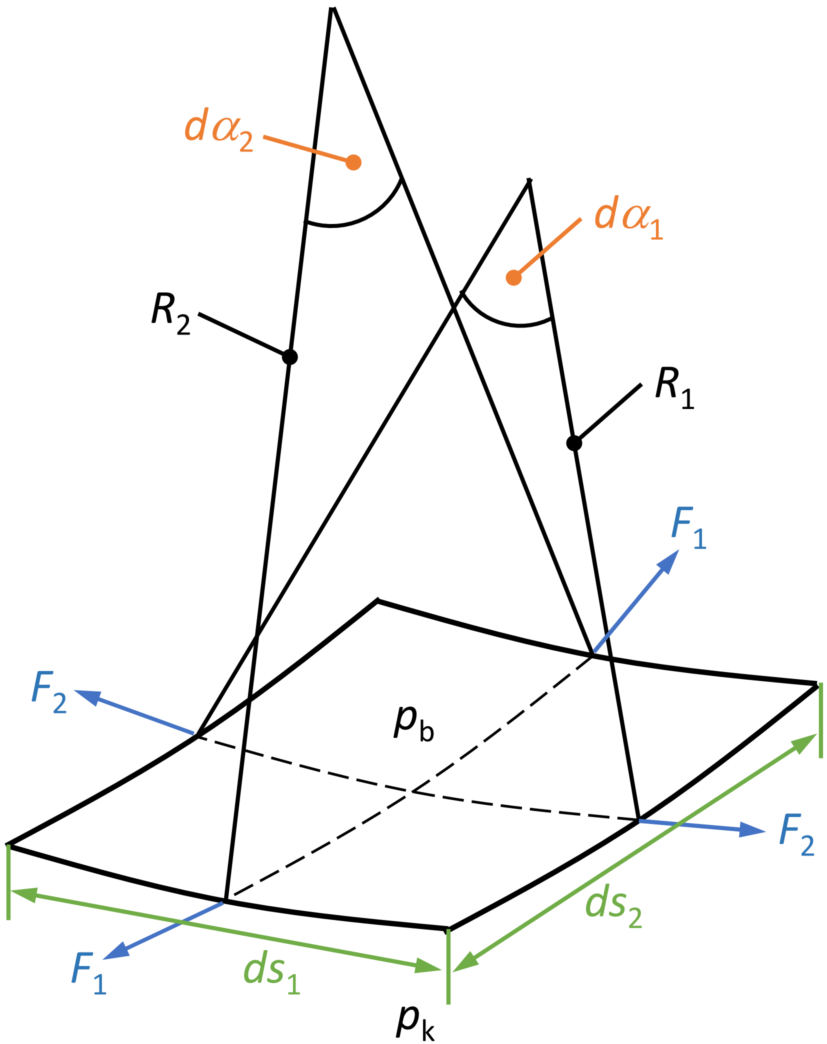
Erőegyensúly:

$$(p_b - p_k) ds_1 ds_2 = F_{e1} + F_{e2} =$$

$$= \sigma \cdot ds_1 \cdot d\alpha_2 + \sigma \cdot ds_2 \cdot d\alpha_1 =$$

$$= \sigma \cdot ds_1 \cdot ds_2 \cdot \frac{1}{R_2} + \sigma \cdot ds_2 \cdot ds_1 \cdot \frac{1}{R_1} =$$

$$= \sigma \cdot ds_1 \cdot ds_2 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$



$$(p_b - p_k)\cancel{ds_1}\cancel{ds_2} = \sigma \cdot \cancel{ds_1} \cdot \cancel{ds_2} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

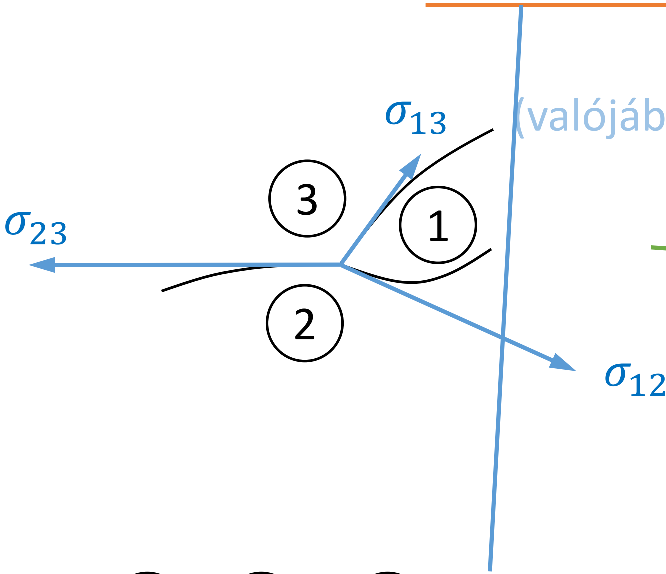
$$p_b - p_k = \sigma \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Ha gömb: $R_1 = R_2 \;\rightarrow p_b - p_k = \dfrac{2\sigma}{R}$

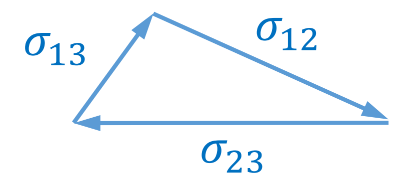
Ha hártya: $p_b - p_k = 2 \cdot \sigma \cdot \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)$

Ha gömbhártya: $p_b - p_k = \dfrac{4\sigma}{R}$

Folyadékcseppek alakja (pl. víz-olaj-levegő kombináció)



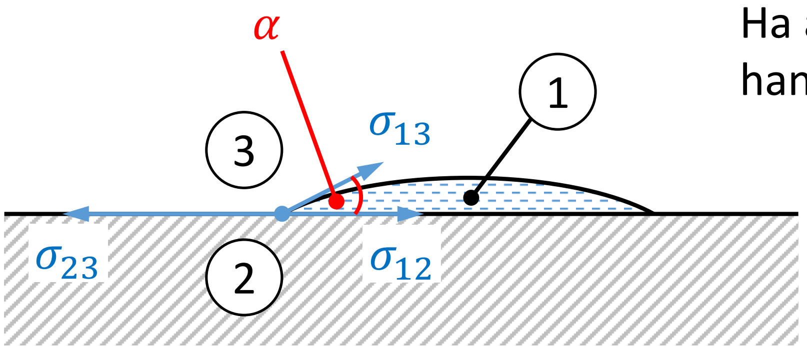
(valójában $\sigma_{13} \cdot ds$, de a ds mindenhonnan kiesik)



Ha a vektorháromszög nem záródik
(pl. $|\sigma_{23}| > |\sigma_{13}| + |\sigma_{12}|$)

akkor az 1 a 2 és 3 elválasztó felületén szétterjed.

Folyadékcsepp alakja ha a 3 anyagból az egyik szilárd:



Ha a 3 levegő, akkor σ_{23} nem felületi feszültség, hanem adhézió.

$$\sigma_{23} = \sigma_{12} + \sigma_{13} \cdot cos(\alpha) \qquad \text{ebből}$$

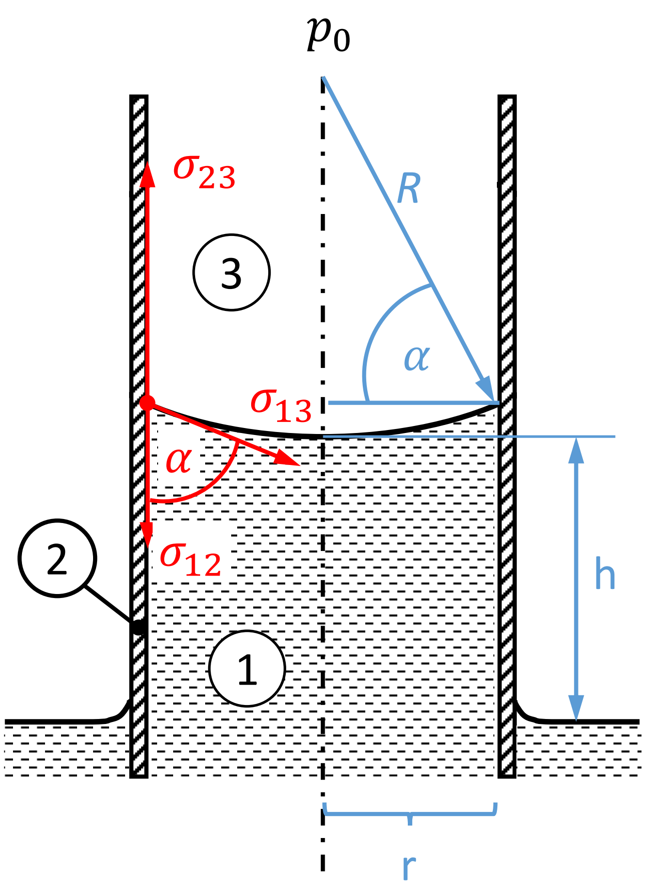
$$cos(\alpha) = \frac{\sigma_{23} - \sigma_{12}}{\sigma_{13}}$$

Lehetőségek:

- $\sigma_{23} > \sigma_{12} \rightarrow \alpha < 90°$
- $\sigma_{23} < \sigma_{12} \rightarrow \alpha > 90°$
- $|\sigma_{23}| > |\sigma_{12}| + |\sigma_{13}|$ ekkor az 1 a 2 felületén szétterjed

(pl. petróleum: "kimászik" az üvegből)

Kapilláris



$$p_0 - p_A = 2 \cdot \sigma_{13} \cdot \frac{1}{R} = 2 \cdot \sigma_{13} \cdot \frac{cos(\alpha)}{r}$$

$$p_0 - p_A = \rho \cdot g \cdot h$$

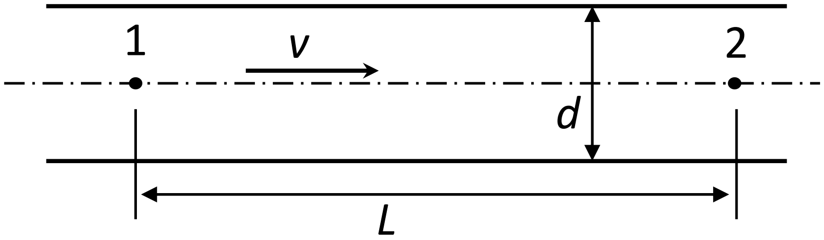
$$2 \cdot \sigma_{13} \cdot \frac{cos(\alpha)}{r} = \rho \cdot g \cdot h$$

$$h = \frac{2 \cdot \sigma_{13} \cdot cos(\alpha)}{\rho \cdot g \cdot r}$$

Ha $\alpha < 90° \rightarrow h > 0$ (pl. üveg-víz-levegő)

Ha $\alpha > 90° \rightarrow h < 0$ (pl. üveg-higany-levegő)

Dimenzióanalízis



$\Delta p' = ?$

$\Delta p' = f(L, \mu, \rho, d, v)$

Ezt kellene meghatározni

Probléma: legalább 5 változó van ☹

Kiindulás: a vizsgált fizikai mennyiségek dimenziói (mértékegységei) leírhatók fizikai alapmértékegységekkel: kg, m, s…

Mégpedig az alábbi módon: $Q = kg^{\alpha} \cdot m^{\beta} \cdot s^{\gamma}$

Itt Q-ból legalább 6 van (a $\Delta p'$ is az!).

Szeretnénk meghatározni a $f(Q_1, Q_2 \dots Q_n) = 0$ függvényt.

A fentiek szerint Q_n leírható:

$$[Q_1] = kg^{a_{11}} \cdot m^{a_{21}} \cdot s^{a_{31}}$$

$$[Q_2] = kg^{a_{12}} \cdot m^{a_{22}} \cdot s^{a_{32}}$$

$$\vdots$$

$$[Q_n] = kg^{a_{1n}} \cdot m^{a_{2n}} \cdot s^{a_{3n}}$$ ahol a_{ij} ismert.

Pl.: sebesség: $\frac{m}{s} \rightarrow kg^0 \cdot m^1 \cdot s^{-1}$

Dimenzióanalízis

Kérdés: létezik-e (léteznek-e) $\Pi = Q_1^{k_1} \cdot Q_2^{k_2} \dots Q_n^{k_n}$ alakú dimenziótlan csoport(ok), amely(ek) a szereplő fizikai mennyiségek dimenziós hatványaiból leírhatók?

$$\Pi = kg^0 \cdot m^0 \cdot s^0 = (kg^{a_{11}} \cdot m^{a_{21}} \cdot s^{a_{31}})^{k_1} \cdot (kg^{a_{12}} \cdot m^{a_{22}} \cdot s^{a_{32}})^{k_2} \dots$$

innen
$$\left.\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 \dots + a_{1n}k_n &= 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3 \dots + a_{2n}k_n &= 0 \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3 \dots + a_{3n}k_n &= 0 \end{aligned}\right\} \text{dimenziómátrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{bmatrix}$$

Ennek rangja *R*, ha **létezik** *R*-ed rendű nem-0 értékű aldeterminánsa, és **nem létezik** *R*+1-ed rendű nem-0 értékű aldeterminánsa.

Ha a dimenziómátrix rangja *R*, akkor az egyenletrendszernek *n*-*R* független megoldása van.

(*R* rendszerint megegyezik a fizikai alapmennyiségek számával, itt *R*=3)

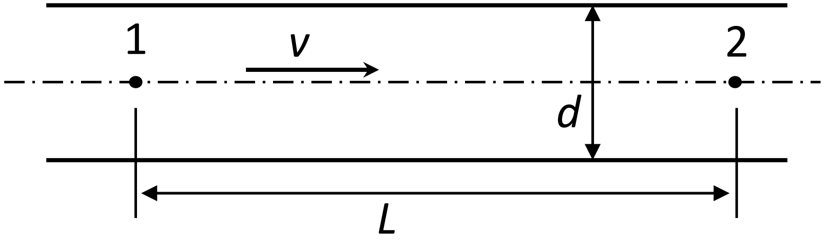
Azaz *n*-*R* dimenziótlan csoport képezhető. Itt 6-3=3 db.

Dimenzióanalízis

Eddigieket összefoglalva a dimenzióanalízis lépései:

- Fizikai alapmennyiségek meghatározása
- A jelenséget befolyásoló $Q_1, Q_2 \ldots\ Q_n$ fizikai mennyiségek meghatározása
- Dimenziómátrix felállítása, rangjának meghatározása
- Egyenletrendszer megoldása (*n*-*R* megoldás meghatározása)
- $\Pi_1, \Pi_2 \ldots \Pi_{n-R}$ dimenziótlan csoportok képzése
- $f(\Pi_1, \Pi_2 \ldots \Pi_{n-R}) = 0$ függvénykapcsolat kísérleti meghatározása.

Dimenzióanalízis alkalmazása



$$\Delta p' = f(L, \mu, \rho, d, v)$$

	$\Delta p'$	L	μ	ρ	d	v
kg	1	0	1	1	0	0
m	-1	1	-1	-3	1	1
s	-2	0	-1	0	0	-1

kiegészítő mátrix: $\underline{\underline{B}}$

négyzetmátrix: $\underline{\underline{A}}$

egységmátrix: $\underline{\underline{D}} =$

1	0	0
0	1	0
0	0	1

eredménymátrix: $\underline{\underline{C}} = -\left(\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}\right)^{T} =$

-1	0	-2
0	-1	0
-1	-1	-1

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eredmény:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{A}} \\ \underline{\underline{D}} & \underline{\underline{C}} \end{bmatrix} \rightarrow$$

	Δp'	*L*	*μ*	*ρ*	*d*	*v*
kg	1	0	1	1	0	0
m	-1	1	-1	-3	1	1
s	-2	0	-1	0	0	-1
Π_1	1	0	0	-1	0	-2
Π_2	0	1	0	0	-1	0
Π_3	0	0	1	-1	-1	-1

Konstanssal osztani vagy szorozni szabad

$$\Pi_1 = \Delta p' \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{v^2} \rightarrow \frac{\Delta p'}{\frac{\rho}{2} \cdot v^2}$$

$$\Pi_2 = \frac{L}{d}$$

$$\Pi_3 = \mu \cdot \frac{1}{\rho \cdot d \cdot v} \rightarrow \frac{v \cdot d}{\nu} = Re$$

Reciprokot venni is szabad

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Áramlások hasonlósága

Kisminta kísérlet a valódi helyett, de csak akkor, ha az eredmény felhasználható.

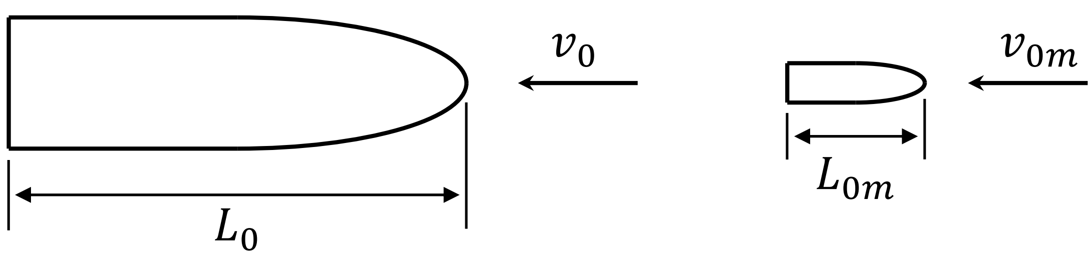
Mikor használható fel?

Ha az áramlás az eredetinél és a kismintánál hasonló.

Mikor hasonló?

Ha megegyező dimenziótlan függvények írják le a nyomás- és sebességeloszlást.

Vagyis: ugyanaz a dimenziótlan parciális diff. egy. rsz. és ugyanaz a dimenziótlan kezdeti- és peremfeltétel a dimenziótlan hely- és időkoordinátákban.



L_0: áramlásra jellemző méret
v_0: áramlásra jellemző sebesség

$\frac{L_0}{v_0} = t_0$: áramlásra jellemző idő

Megegyező dimenziótlan függvények írják le a nyomás- és sebességeloszlást.

$$\frac{v}{v_0} = f\left(\frac{x}{L_0}, \frac{y}{L_0}, \frac{z}{L_0}, \frac{t}{t_0}\right) \qquad \frac{p}{p_0} = f\left(\frac{x}{L_0}, \frac{y}{L_0}, \frac{z}{L_0}, \frac{t}{t_0}\right)$$

Ugyanaz a dimenziótlan parciális diff. egy. rsz. és ugyanaz a dimenziótlan kezdeti- és peremfeltétel a dimenziótlan hely- és időkoordinátákban.

Navier-Stokes egyenlet X irányú komponensegyenlete:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) \quad \Big/ \cdot \frac{L_0}{v_0^2}$$

Dimenziótlan Navier-Stokes egyenlet X irányú komponensegyenlete:

$$\frac{\partial\left(\frac{v_x}{v_0}\right)}{\partial\left(\frac{t}{L_0/v_0}\right)} + \frac{v_x}{v_0} \cdot \frac{\partial\left(\frac{v_x}{v_0}\right)}{\partial\left(\frac{x}{L_0}\right)} + \cdots = \frac{g_x L_0}{v_0^2} - \frac{\partial\left(\frac{p-p_0}{\rho \cdot v_0^2}\right)}{\partial\left(\frac{x}{L_0}\right)} + \frac{\nu}{v_0 L_0} \cdot \left(\frac{\partial^2\left(\frac{v_x}{v_0}\right)}{\partial\left(\frac{x}{L_0}\right)^2} + \cdots\right)$$

Ha $\rho =$ áll. akkor a dimenziótlan kontinuitásegyenlet felírható:

Dimenziós:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Dimenziótlan:

$$\frac{\partial\left(\frac{v_x}{v_0}\right)}{\partial\left(\frac{x}{L_0}\right)} + \frac{\partial\left(\frac{v_y}{v_0}\right)}{\partial\left(\frac{y}{L_0}\right)} + \frac{\partial\left(\frac{v_z}{v_0}\right)}{\partial\left(\frac{z}{L_0}\right)} = 0$$

Hasonlóság feltétele: ugyanaz a dimenziótlan parc. diff. egy. rsz. írja le az áramlást:

- Állandóknak és együtthatóknak ugyanolyan értékűnek kell lennie:

$$\frac{\partial\left(\frac{v_x}{v_0}\right)}{\partial\left(\frac{t}{L_0/v_0}\right)} + \frac{v_x}{v_0} \cdot \frac{\partial\left(\frac{v_x}{v_0}\right)}{\partial\left(\frac{x}{L_0}\right)} + \cdots = \frac{g_x L_0}{v_0^2} - \frac{\partial\left(\frac{p - p_0}{\rho \cdot v_0^2}\right)}{\partial\left(\frac{x}{L_0}\right)} + \frac{\nu}{v_0 L_0} \cdot \left(\frac{\partial^2\left(\frac{v_x}{v_0}\right)}{\partial\left(\frac{x}{L_0}\right)^2} + \cdots\right)$$

$$\frac{g_x L_0}{v_0^2} = \frac{g_{xm} L_{0m}}{v_{0m}^2} \qquad \frac{\nu}{v_0 L_0} = \frac{\nu_m}{v_{0m} L_{0m}}$$

- Dimenziótlan kezdeti- és peremfeltételek ugyanazok legyenek:

geometriai hasonlóság és a peremen hasonló viszonyok biztosítása.

Hasonlósági számok

$$\frac{\nu}{v_0 L_0} \rightarrow \frac{vL}{\nu} = Re$$ Reynolds-szám: tehetetlenségi erők és viszkózus erők között

$$\frac{g_x L_0}{v_0^2} \rightarrow \frac{v}{\sqrt{gL}} = Fr$$ Froude-szám: tehetetlenségi erők és nehézségi erők között

Probléma: *Re* azonosságából: $\frac{v_{0m}}{v_0} = \frac{L_0 \nu_m}{L_{0m} \nu} = \frac{L_0}{L_{0m}}$

Fr azonosságából: $\frac{v_{0m}}{v_0} = \sqrt{\frac{L_{0m}}{L_0}}$ mivel rendszerint $g_m = g$

Megoldás: ha az áramlás kitölti a teret (pl. búvárhajó), akkor *Fr* azonossága nem szükséges.

Hajóknál a hullámellenállás fontos → térerő fontos → *Fr* fontos:
külön kisminta *Re* és *Fr* számra.

További hasonlósági számok

Periodikus (instacioner) peremfeltétel: dimenziótlan időlépték ugyanaz legyen.

$$t_0 = \frac{L_0}{v_0} \rightarrow \frac{t_{pm}}{t_{0m}} = \frac{t_p}{t_0} \rightarrow \frac{t_{pm} v_{0m}}{L_{0m}} = \frac{t_p v_0}{L_0}$$

Mivel $t_p = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{t_p v_0}{L_0} = \frac{v_0}{L_0 f} \rightarrow Str = \frac{f L_0}{v_0}$ Strouhal-szám

Nyomás peremfeltétel biztosítása: $Eu = \frac{p - p_0}{\rho v_0^2}$ Euler-szám nyomásból származó erő és tehetetlenségi erő

Ha a felületi feszültség szerepe fontos (pl. porlasztás, befecskendezés):

$$\Delta p \sim \frac{\sigma}{R} \rightarrow \frac{\sigma}{L_0} \rightarrow Eu = \frac{\sigma}{\rho L_0 v_0^2} \rightarrow We = \frac{\rho L_0 v_0^2}{\sigma}$$

Weber-szám tehetetlenségi erő és a felületi feszültségből származó erő

A hasonlósági számok azonossága egyes esetekben nem követelmény hanem következmény:

pl. egy autó és modellje azonos dimenziótlan koordinátájú pontján az Eu-szám u.a.