

KÉREM, JELÖLJE BE jellel KÉPZÉSÉT!**Mechatronikai mérnök BSc (GPK)**

- AM01 Áramlástan I. „v” (1+2vk)
- AM11 Áramlástan I. „v” (0+4vk)
- AM21 Áramlástan I. „F” (100)

Környezetmérnök BSc(VBK)

- AKM1 Az áramlástan alapjai „v” (7+13vk)

Ipari termék- és formatervező BSc(GPK)

- AT01 Áramlástan „v” (61 + 18vk)

Név:

NEPTUN kód:ÜLŐHELY sorszám.....

PONTSZÁM: Σ25p / p

1 Egészítse ki a **folytonosság (kontinuitás) tétel alábbi integrál alakját** ! Adja meg az egyenletben szereplő minden mennyiség nevét és mértékegységét is!

$$-\int \text{---} dV = \int \text{div}(\text{---}) dV$$

2 Egészítse ki az **Euler-egyenletet**, és adja meg alkalmazásának feltételét! Adja meg az egyenletben szereplő minden mennyiség nevét és mértékegységét is!

$$\frac{d}{d} = \underline{g} \text{ --- grad}$$

3 Egészítse ki az **instacioner Bernoulli-egyenlet** alábbi alakját! Adja meg a kifejezésben szereplő minden mennyiség nevét és mértékegységét is!

$$\int_1^2 \frac{\partial}{\partial t} d\underline{s} + \left[\text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} \right]_1^2 =$$

4 Adja meg a **folytonosság (kontinuitás) tétel differenciál-egyenlet alakjának stacioner áramlás esetén érvényes egyszerűbb alakját** ! Adja meg az egyenletben szereplő minden mennyiség nevét és mértékegységét is!

$$= 0$$

5 Egészítse ki az **Izoterm atmoszféra** feltételezés esetén érvényes **nyomás függőleges (z) koordináta menti változását leíró függvényt!** Adja meg a kifejezésben szereplő minden mennyiség nevét és mértékegységét is!

$$p_1 = p_0 \cdot e$$

6 Adja meg a **folytonosság (kontinuitás) tétel integrál alakját!** Adja meg az Ön által beírt minden mennyiség nevét és mértékegységét is!

$$\int + \int = 0$$

7 Adja meg az alábbi integrál egyszerűsített paraméteres alakját összenyomhatatlan közeg esetén, ha az „1” ill. „2” pontok egy áramvonalon helyezkednek el, és ρ a sűrűség, p a nyomás, $d\underline{s}$ az elmozdulásvektor! Adja meg az Ön által az „=”-jel jobboldalára beírt minden mennyiség nevét és mértékegységét is!

$$-\int_1^2 \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \, d\underline{s} =$$

8 Soroljon fel legalább három feltételt, amely teljesülése esetén az alábbi integrál értéke zérus! (Az „1” ill. „2” pontok egy áramvonalon helyezkednek el, \underline{v} a sebességvektor, $d\underline{s}$ az elmozdulás vektor) Adja meg a kifejezésben szereplő minden mennyiség nevét és mértékegységét is!

$$-\int_1^2 \underline{v} \times \operatorname{rot} \underline{v} \, d\underline{s}$$

9 Karikázza be a jó válasz vagy válaszok(ok) betűjelét! Csak a teljesen jó megoldás ér pontot.

Az atmoszférában ρ =áll. feltétellel kiszámolt p_1 nyomás adott $z_1=5\text{km}$ magasságban ...

- A) ... kisebb, mint $p_0(z_0=0\text{m})$.
 B) ... nagyobb, mint $p_0(z_0=0\text{m})$.
 C) ... feleannyi, mint 10km magasságban.
 D) ... negyedannyi, mint 10km magasságban.

10 Karikázza be a jó válasz vagy válaszok(ok) betűjelét! Csak a teljesen jó megoldás ér pontot.

Egy görbült áramvonal adott pontjában, ahol az érintő kör R sugarú, a nyomásgradiens vektor normális irányú komponense ...

- A) ... $0 < R < \infty$ esetén zérustól eltérő értékű.
 B) ... $R = \infty$ esetén zérus értékű.
 C) ... $0 < R < \infty$ esetén a görbületi középpont felé sugárirányban haladva negatív előjelű.
 D) ... $0 < R < \infty$ esetén a görbületi középpontból sugárirányban kifelé haladva pozitív előjelű.

11. Karikázza be a jó válasz vagy válaszok(ok) betűjelét! Csak a teljesen jó megoldás ér pontot.

Az atmoszférában ρ =áll. feltétellel kiszámolt p_1 nyomás adott $z_1=5\text{km}$ magasságban ...

- E) ... kisebb, mint $p_0(z_0=0\text{m})$.
 F) ... nagyobb, mint $p_0(z_0=0\text{m})$.

12 Karikázza be a jó válasz vagy válaszok(ok) betűjelét! Csak a teljesen jó megoldás ér pontot.

Adott R görbületi sugarú áramvonal esetén a nyomás normális irányban ...

- E) ... a görbületi középpontból sugárirányban kifelé haladva nő.
 F) ... a görbületi középpontból sugárirányban kifelé haladva csökken.

1. példa (p) /

A mellékelt ábrán látható rendszerben a három különböző sűrűségű folyadék nyugalomban van. A baloldali tartály zárt, a folyadék (olaj) felszín felett $p_A = 140000\text{Pa}$ értékű nyomást tartunk fent. A jobboldali tartály p_0 nyomásra nyitott felszínű.

Adatok:

$g = 10\text{N/kg}$, $p_0 = 10^5\text{Pa}$

olaj $\rho_1 = 800\text{kg/m}^3$ $H_1 = 10\text{ m}$

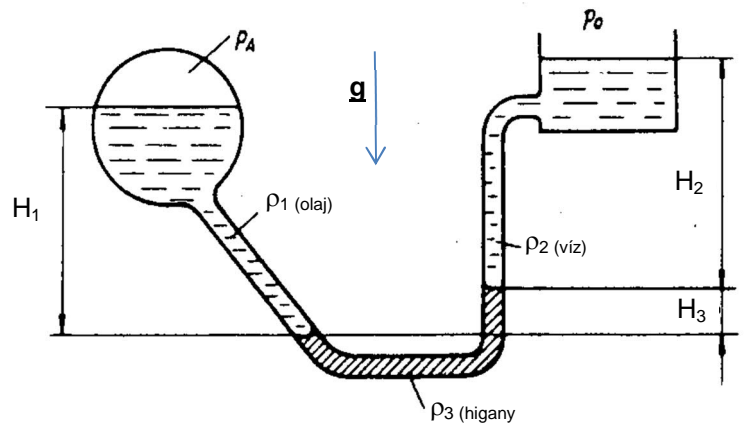
víz $\rho_2 = 1000\text{kg/m}^3$ $H_2 = 10\text{ m}$

higany $\rho_3 = 13600\text{kg/m}^3$ $H_3 = ?\text{ m}$

(Feltételek: stacioner állapot, súrlódásmentes, összenyomhatatlan közeg.)

KÉRDÉS:

Határozza meg, mekkora H_3 [m] értéke!



MEGOLDÁS

Manométer egyenlet: $p_A + \rho_1 g H_1 = p_0 + \rho_2 g H_2 + \rho_3 g H_3$

Rendezve a megoldás: $H_3 = 20/136\text{ m} = 0,1471\text{m}$

2. PÉLDA (p)

A mellékelt ábrán látható rendszerben a három különböző sűrűségű folyadék (víz, olaj, higany) nyugalomban van. A baloldali tartály zárt, a jobboldali tartály p_0 nyomásra nyitott felszínű. ($\rho = \text{áll.}$, $\partial/\partial t = 0$, $\mu = 0$)

Adatok:

$g = 10\text{N/kg}$, $p_0 = 10^5\text{Pa}$

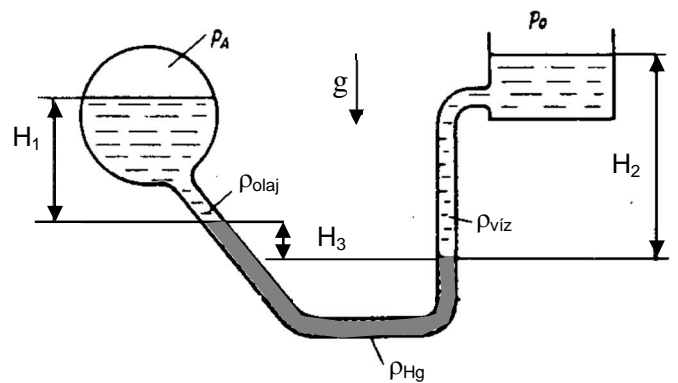
$\rho_{\text{olaj}} = 800\text{kg/m}^3$ $H_1 = 1\text{ m}$

$\rho_{\text{víz}} = 1000\text{kg/m}^3$ $H_2 = 1,6\text{ m}$

$\rho_{\text{Hg}} = 13600\text{kg/m}^3$ $H_3 = 50\text{mm}$

KÉRDÉS:

Határozza meg, hogy mekkora p_A nyomást kell ehhez az állapothoz a baloldali tartályban létrehozni!



3. példa (10pont)

A mellékelt ábrán látható rendszerben a három különböző sűrűségű folyadék van. A baloldali tartály zárt, a vízfelszín felett $p_A - p_0 = 1360 \text{ Pa}$ a túlnyomás. A jobboldali p_0 nyomásra nyitott felszínű.

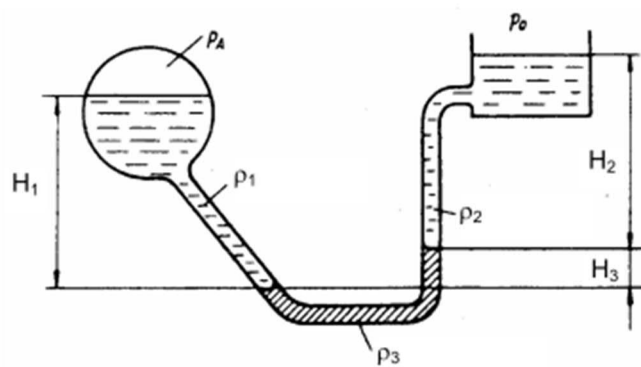
Adatok:

$g = 10 \text{ N/kg}$, $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$

víz $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$ $H_1 = 20 \text{ m}$

olaj $\rho_2 = 800 \text{ kg/m}^3$ $H_2 = 23,3 \text{ m}$

higany $\rho_3 = 13600 \text{ kg/m}^3$ $H_3 = ? \text{ m}$



(Feltételek: stacioner állapot, súrlódásmentes, összenyomhatatlan közeg.)

KÉRDÉS:

Határozza meg, mekkora H_3 higanyoszlop magasság olvasható le ebben az állapotban!

1. példa (5pont) /

Szalacsi a jobb időkre várva sok bort rejtett el egy függőleges tengelyű, 1m×1m alapterületű tartályban. De már elfelejtette, hogy mennyit is. Arra emlékszik, hogy először óvatosan betöltött 100 liter higanyt (eredetileg atomtámadás ellen vásárolta), majd rátöltötte a sok bort, végül a tetejére az összes (212,5 liter) tartalék étolaját is ráöntötte, nehogy elpárologjon a bor. Annyit ő is tudott, hogy a három összenyomhatatlan folyadék nem keveredik, nyugalomban van az ábrán látható elrendezésben. A tartály felszíne p_0 nyomásra nyitott. Egyedül a tartály legaljához csatlakozik egy folyadékszintjelző mérőcső, amely függőleges, felül p_0 -ra nyitott szakaszában $\Delta H=250\text{mm}$ magasságban áll a higany. Szalacsi ezen kívül még le tudta olvasni egy mérőpálcán az olajréteg vastagságát: $H_3=0,2125\text{m}$ (bár ezt amúgy is tudhatta volna). **Adatok:** $g=10\text{N/kg}$, $p_0=10^5\text{Pa}$

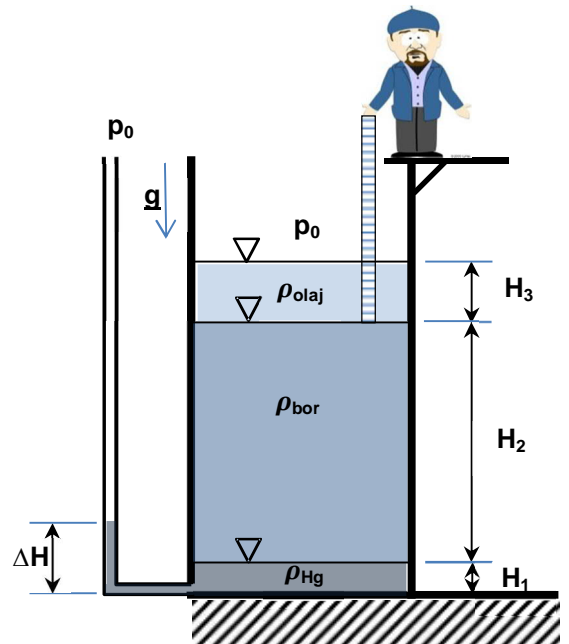
$$\rho_{\text{olaj}}= 800\text{kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{bor}}= 1000\text{kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{Hg}}=13600\text{kg/m}^3$$

KÉRDÉS: Mennyi bort rejtett el Szalacsi? $V=? [\text{m}^3]$, [liter] vagy $H_2=? [\text{m}]$

MEGOLDÁS



1. példa (5pont) /

Szalacsi a jobb időkre várva 2011.12.11-én 1000 liter bort rejtett el egy függőleges tengelyű, 1m×1m alapterületű tartályban. Először óvatosan betöltött 200 liter higanyt (eredetileg atomtámadás ellen vásárolta), majd rátöltötte a sok bort, végül a tetejére az összes (400 liter) tartalék étolaját is ráöntötte, nehogy elpárologjon a bor. Annyit ő is tudott, hogy a három összenyomhatatlan folyadék nem keveredik, nyugalomban van az ábrán látható elrendezésben. A tartály felszíne p_0 nyomásra nyitott. Egyedül a tartály legaljához csatlakozik egy folyadékszintjelző mérőcső, amely függőleges, felül p_0 -ra nyitott szakaszában egy éve ΔH_1 magasságban állt a higany (nem emlékszik értékére, csak bejelölte a csövön).

Egy év alatt 365 liter bort ivott meg a tartályból. (olaj vagy higany nem fogyott)

Ma, 2012.12.11-én is bejelölte a csövön a higany szintjét: ΔH_2 .

Adatok: $g=10\text{N/kg}$, $p_0=10^5\text{Pa}$

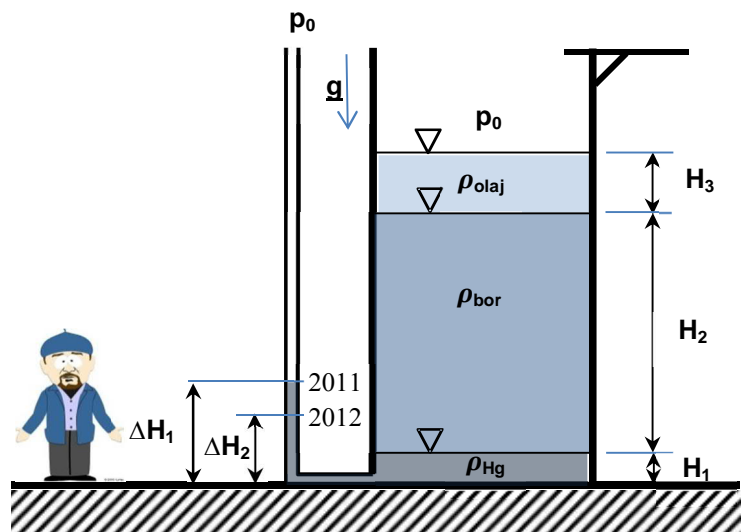
$$\rho_{\text{olaj}}= 800\text{kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{bor}}= 1000\text{kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{Hg}}=13600\text{kg/m}^3$$

KÉRDÉS: Mekkora két jelölés közötti szintkülönbség? $\Delta H_1-\Delta H_2=? [\text{mm}]$

MEGOLDÁS



2. FELADAT (6p) /

A Magas-Tátra legmagasabb, 2632m magas Lomnici-csúcsáról utazunk vissza lanovkával Tátralomnicra. Az indulás és érkezés között 1722 méter a szintkülönbség.

Leérkezve Tátralomnicra mekkora és milyen irányú \underline{F} [N] erő hatna a kabin legnagyobb, $A=0,8\text{m}^2$ felületű ablakára, ha a lanovka kabinját a csúcson induláskor tökéletesen hermetikusan be tudnánk zárni és az atmoszférát:

- a) állandó sűrűségűnek tételezzük fel? * (1p)
- b) izotermikusnak tételezzük fel? (5p)



A tengerszinten érvényes ISA (International Standard Atmosphere) szabvány adatok: $z_0=0\text{m}$ szinten $p_0=101325\text{Pa}$, $T_0=288\text{K}$. További adatok: $g=9.81\text{ N/kg}$, $R=287\text{ J/(kgK)}$.

***Megjegyzés:** Az a) kérdés esetében a sűrűséget a tengerszinten érvényes adatokból számítsa ki!

MEGOLDÁS

2. FELADAT (6p) /

Egy GPK-s hegymászó a GTK-s feleségétől Karácsonyra kapott egy gagyi kínai magasságmérős karórát, mivel épp a Mount Everest-re ($z_{\text{max}}=8850\text{m}$) készültek. Odautaznak, felmászhatnak egészen a csúcsra. Ekkor a hegymászó az új órájára pillantva elcsodálkozik, mert csupán 2969m értéket olvas le (ld. baloldali kép). De felesége szól, hogy fordítva vette fel az új óráját! De az óra helyesen (ld. jobboldali kép) leolvastva is csak 6962m értéket mutat, pedig a csúcson 8850m magasan vannak. A hegymászó leveszi az óráját, nézegeti, mi lehet a gond, és a hátlapon ezt látja: „Méréshatár: $\text{max. depresszió} = N \cdot p_{0,ISA}$ ”, „ $N[\%]$ értékét lásd honlapunkon: www.gagyichinaclock.com”. Felesége sajnálattal bevallja, hogy erre nem figyelt vásárláskor.



A hegymászó otthon megnézi a honlapon N értékét és megérti, miért „állt meg” az órája pont 6962 méteren.

ADATOK: ISA (International Standard Atmosphere) szabvány adatok $z_0=0\text{m}$ szinten $p_0=101325\text{Pa}$, $T_0=288\text{K}$, valamint $g=9.81\text{ N/kg}$, és levegőre $R=287\text{ J/(kgK)}$.

KÉRDÉS:

Határozza meg, 6962m magasan mekkora a $p[\text{Pa}]$ nyomás izotermikus atmoszféra feltételt használva! /Tehát mekkora $N[\%]$ értéket talált a hegymászó a honlapon? $N=? [\%]$ /

MEGOLDÁS

+1. FELADAT (+25p) /

Egy hegymászó a feleségével a Karácsonyt épp a Mount Everestre ($z_{\max}=8850\text{m}$) felmászva töltik.

A hegymászó feleségétől így egy magasságmérő karórát kapott (ld. kép). Ő pedig a feleségének egy igen ritka, rózsailatú parfümöt ajándékoz, de meglepetésként, azaz nem adta oda otthon előre, mert a hegyen szeretné átadni.

A hegymászó, félve attól, hogy felfelé mászva elillan a drága rózsailat az eredeti túlnyomásos fiolából, a parfümöt a tengerszinten ($z=0\text{m}$) áttöltötte egy tökéletesen hermetikusan zárható, kis fém gömbbe, és benne a tengerszinten érvényes p_0 nyomás kb. felét: pontosabban épp 50000Pa abszolút nyomást (azaz depressziót) hozott létre.



Feleségének csak annyit mondott, hogy „*pontosan addig másznak, amikor már éppen érezni a rózsailatát*”. Feleségének tetszett a titokzatos ötlet, persze még nem értette, miről van szó.

A hegymászó és felesége először akkor álltak meg pihenni, amikor a karórájára pillantva az 2969m értéket mutatott. De felesége szólt, hogy fordítva vette fel az új óráját, már sokkal többet másztak, az most 6962m értéket mutat valójában.



Nagyon megijedt a hegymászó, hogy túlmászták a kívánt magasságot, mi lesz a drága parfümmel, ha felesége kinyitja a szelepet...

A tengerszinten érvényes szabvány adatokkal tisztában van:

$z_0=0\text{m}$: $p_0=101325\text{Pa}$, $T_0=295\text{K}$, $g=9.81\text{ N/kg}$, levegőre $R=287\text{ J/(kgK)}$.

A hegymászó izoterm atmoszféra feltételt használva gyors számítással leellenőrzi, hogy kellett-e ilyen (6962m) magasra mászniuk, vagy előbb is megállhattak volna már, vagy még mindig nem érte el a kívánt magasságot és magasabbra kell még menniük?

Tegye meg ezt az ellenőrző számítást Ön is!

Azaz a kérdés:

Melyik az a magasság ($z=?$), amin a szelepet kinyitva már épp érezni lehet a rózsailatot, ha a felesége kinyitja a szelepet?

3. példa (10pont)

Az „A” és a „B” fedőnevű titkosügynökök a Mount Everest-en mászva menekülnek üldözőik elől. Az „A” fedőnevű ügynökre sajnos rátaláltak, a pozíciója ismert: jelenleg éppen $z_A=3000\text{m}$, míg „B” ügynököt még nem látják. Tudva, hogy beszélgetésüket lehallgatják, „B” ügynök csak annyit mond a telefonba „A” ügynöknek, hogy nála most a nyomás pontosan 20000Pa értékkel kisebb, mint „A” ügynöknél.

ISA adatok ($z=0\text{m}$): $p_0=101325\text{Pa}$, $T_0=288\text{K}$, levegőre: $R=287\text{ J/(kgK)}$, $g=9.81\text{ N/kg}$

Kérdések:

a) Hol van „B” ügynök, ha az egész légkörben *állandónak* tételeznénk fel a *levegő sűrűségét*? $z_{\text{B}}=?$

4663m

b) Hol van „B” ügynök az ún. *izotermikus atmoszféra* feltételezéssel? $z_{\text{B}}=?$

5789m

5. FELADAT

(20p) /

Egy utasszállító repülőgépen a fedélzeti műszerek közül többek között a magasságmérő elromlik, így csak egy külső légnyomás ($p=339,8\text{ hPa}$) és külső hőmérsékletmérő ($t=-54\text{ °C}$) egységre hagyatkozhat. A pilóta útvonalterve szerint néhány kilométer múlva át kell repülnie egy 6000 méter magas hegyvonulat felett, de zárt felhőben, ködben, viharban stb. repülnek, így nincs kilátás, nem tudja, hogy jelenleg milyen magasan repülnek.

Gyors kérdést tesz fel az utasok felé: ki tud neki abban segíteni, hogy emelkednie kell-e vagy sem a hegy átrepüléséhez?

(...a kormánymű is elromlik, kikerülni nem tudja hegyet...)

Ön sajnos ezen a gépen utazik. Hogyan segítené neki eldönteni ezt a fontos a kérdést?

A tengerszinten érvényes ISA (International Standard Atmosphere) adatok ismertek:

$p_0=101325\text{ Pa}$, $T_0=288\text{ K}$, valamint $g=9,81\text{ N/kg}$, és levegő gázállandója $R=287\text{ J/(kgK)}$

1. PÉLDA

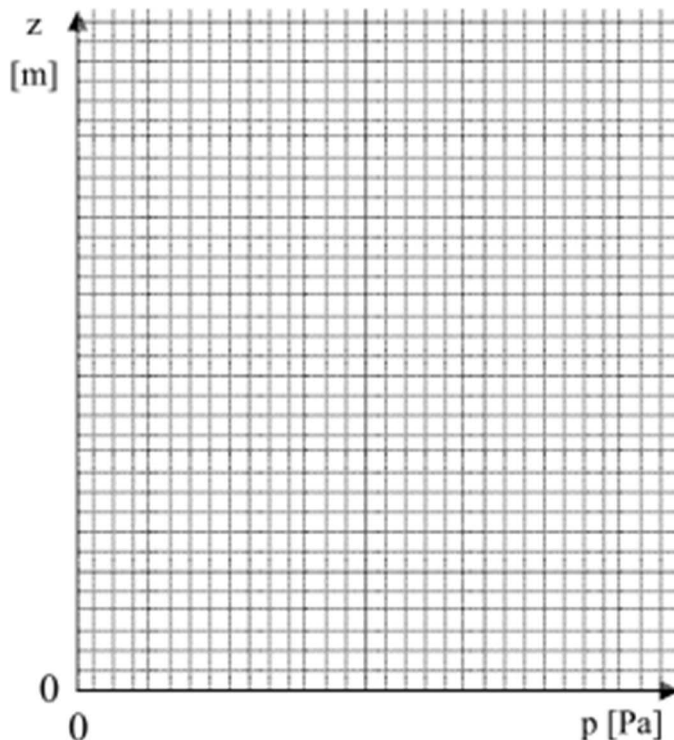
(10 p)

A Föld felszínén ($z_0=0m$) az ISA (*International Standard Atmosphere*) szerint a nyomás $p_0=1,01325 \cdot 10^5 Pa$, a hőmérséklet pedig $T_0=288K$. Levegő gázállandója $R=287 J/(kgK)$. Ebben a példában számoljon $g=9.81 N/kg$ értékkel!

Kérdések:

a) Határozza meg, hogy a Föld felszínétől számolva milyen H magasságban csökkenne le a p nyomás zérusra, ha az egész légkörben $\rho_{lev}=\text{állandó}$ feltételezéssel élnénk! Rajzolja fel a nyomás magasság szerinti változását a mellékelt diagramba!

b) Mekkora viszont a p nyomás a légkör a) részben kiszámolt H magasságában az ún. $T_0=\text{állandó}$ (izotermikus atmoszféra) feltételezéssel? Rajzolja fel a nyomás magasság szerinti változását a mellékelt diagramba!



3. FELADAT (6p) /

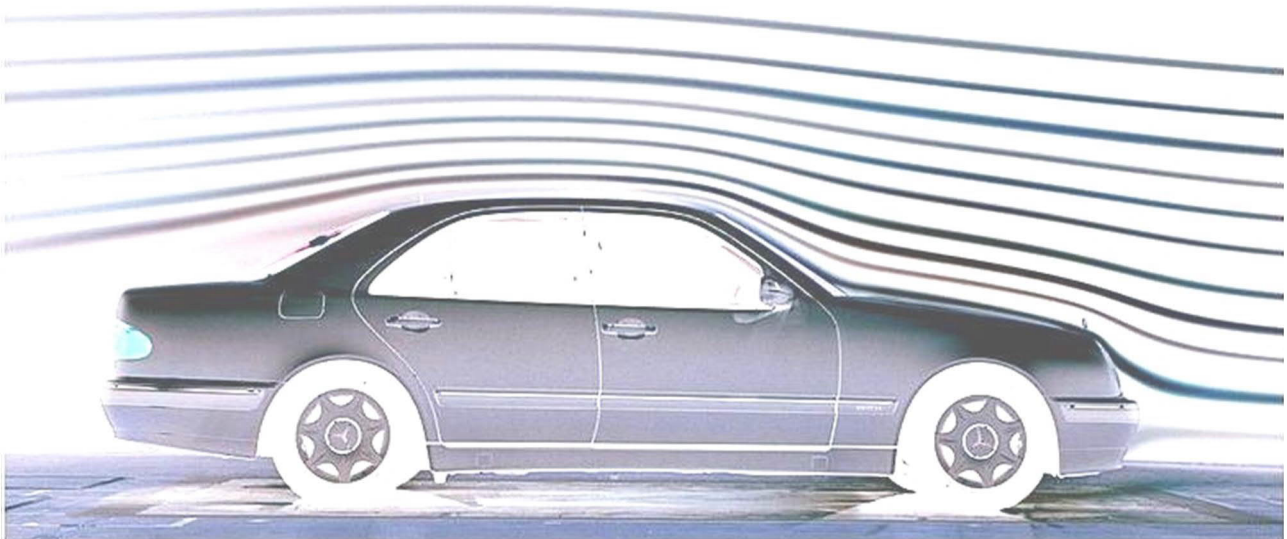
- a) Írja fel a nehézségi erőtér hatását elhanyagolva az Euler-egyenlet normális irányú komponensegyenletét! (2p)
- b) Jelölje (+) ill.(-) jelekkel az alábbi ábrán látható személyautó karosszériáján a túlnyomásos ill. depressziós helyeket! (2p)
- c) Jelölje be (**T**) betűvel a karosszérián a torlópontot, és számítsa ki a torlóponthoz tartozó nyomást ($p_T=?$), ha az autó áll a szélcsatornában és távol az autó előtt a mérőtérbeli megfúvási sebesség $v_\infty=180\text{km/h}$, a levegő hőmérséklete $t_0=20^\circ\text{C}$, $R=287\text{ J/(kgK)}$, a környezeti nyomás pedig $p_0=100500\text{ Pa}$! (2p)

MEGOLDÁS

- a) Euler-egyenlet normális irányú komponensegyenlete:
(a nehézségi erőtér hatása elhanyagolható)



b)



c)

3. FELADAT (6p) /

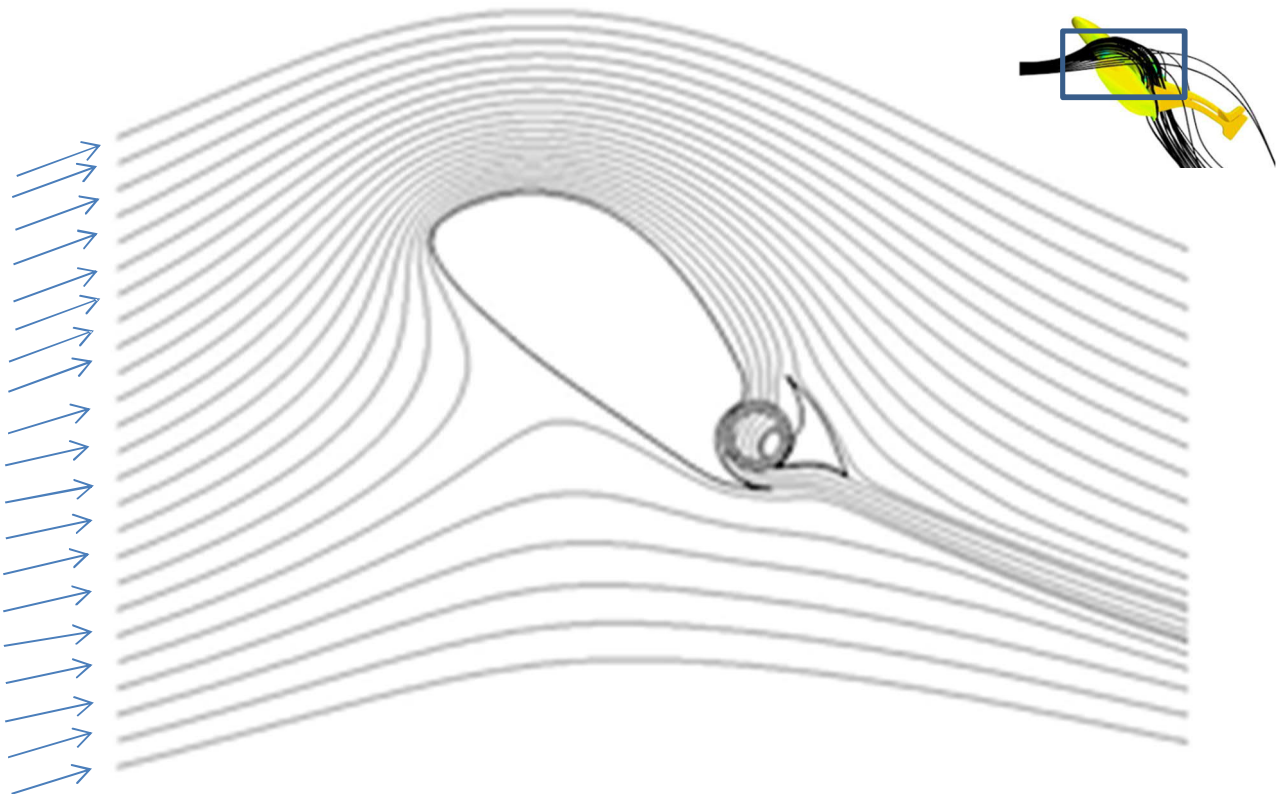
- a) Írja fel a nehézségi erőtér hatását elhanyagolva az **Euler-egyenlet normális irányú komponensegyenletét!** (2p)
- b) Az alábbi ábrán egy szárnyprofil és áramvonalak láthatók. Jelölje (+) ill. (–) jelekkel a szárnyprofil **teljes kontúrvonalán körben** a túlnyomásos ill. depressziós helyeket! (2p)
- c) Jelölje be az ábrába egyértelműen egy **x** jellel a **torlópont helyét** és húzza be a hozzá tartozó torlóponthoz tartozó áramvonalat! (1p)
- d) Számítsa ki a torlóponthoz tartozó nyomást, ha az szárny áll a szélcsatornában és távol előtte a mérőtérbeli megfűvási sebesség $v_\infty=360\text{km/h}$, a levegő hőmérséklete $t_0=27^\circ\text{C}$, $R=287\text{ J/(kgK)}$, a környezeti nyomás pedig $p_0 = 99015\text{ Pa}$! (1p)

MEGOLDÁS

- d) Euler-egyenlet normális irányú komponensegyenlete:
(a nehézségi erőtér hatása elhanyagolható)



e) , c)



d)

6. PÉLDA (15 p)

a) Vázlatrajz segítségével definiálja, mit jelent áramlástanban az ún. természetes koordináta rendszer!

MEGOLDÁS (a) rész

b) Kérem, vezesse le és értelmezze a fenti ábrája alapján a természetes koordináta-rendszerben felírt Euler-egyenlet **normális irányú komponens egyenletét!** Kérem, adja meg a levezetett összefüggés érvényességének feltételeit, és a levezetés minden lépését indokolja!

MEGOLDÁS (b) rész)

c) Jelölje be a mellékelt ábrán az autó körüli áramlási tér középsík-jában (ld. áramvonalak síkja) a **nyomás legrohamosabb növekedésének** irányát (nyíllal), illetve jelölje az autó karosszérián, ahol helyileg **túlnyomás (+)** ill. **depresszió (-)** uralkodik!

MEGOLDÁS (c) rész)

