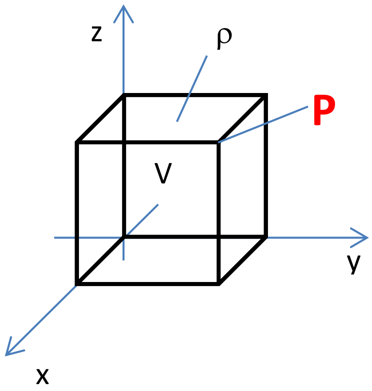
2.GYAKORLAT (4. oktatási hét) ÁRAMLÁSTAN BSc

Téma: Folyadékmozgás jellemzői, folytonosság (kontinuitás) tétele

Folyadékmozgás jellemzői, folytonosság (kontinuitás) tétele

PÉLDA



Egy ρ sűrűségű folyadékban a mellékelt ábrán látható, térben rögzített, dx=dy=dz=100mm élhosszúságú, kocka alakú V térrészre az alábbiak ismeretesek:

I.) Inkompresszibilis folyadék, $\rho=1000 kg/m^3$.
II.) Stacioner állapot.
III.) A $\underline{v}$ sebeségvektor egyik komponense sem változik saját irányától különböző irányban.
IV.) Az x irányú többlet tömegkiáramlás 10kg másodpercenként.
V.) Az áramlási sebességvektor y irányú komponense saját irányában 5m/s értékkel csökken méterenként.
VI.) Az áramlási sebességvektor z irányú komponense 5m/s értékkel csökken saját irányában méterenként.

KÉRDÉSEK:

A) Számítsa ki a lokális gyorsulásvektor *x* irányú komponensének értékét a kocka jelölt **P** csúcspontjában! $a_{lok,x}=0$
B) Számítsa ki a sebességtér divergenciáját! $div\underline{v}=0$
C) Mekkorák az *y* és *z* irányú többlet tömegkiáramlások másodpercenkénti értékei? $\Delta q_{m,y}=\Delta q_{m,z}=-5kg/s$
D) Forognak-e a folyadékrészek a *z* tengely körül? $\omega_z=0 1/s$

MEGOLDÁS

A.) Mivel az áramlás **stacioner**, az $\underline{a}_{lok}$ lokális gyorsulás vektor (és annak mindhárom komponense is) **zérus** a vizsgált térben, így a **P** csúcspontban is.

$\underline{a}_{lok}=\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}=0;$ és annak *x* irányú komponense is zérus: $a_{lok,x}=\frac{\partial v_x}{\partial t}=0$

B.)
Az alábbi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+div(\rho\underline{v})=0$$

alakú folytonosság tétel **összenyomhatatlan** közegre vonatkozó egyszerűbb

$$div(\underline{v})=0$$

alakja értelmében a sebességtér **divergenciája zérus**.

A sebességtér divergenciája ismeretében és a v_y és v_z komponensekre megadott V) és VI) feltételek alapján a sebességvektor x irányú komponensének x irányú megváltozását is megkapjuk:

$$div(\underline{v})=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0=\frac{\partial v_x}{\partial x}-5\frac{m/s}{m}-5\frac{m/s}{m}$$

Ezzel (bár nem volt kérdés) megkapjuk hiányzó tagot:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=10\frac{m/s}{m}=10\frac{1}{s}$$

De a IV) feltétel szerint ismert, hogy

$$dq_{m,x}=q_{m,x,KI}-q_{m,x,BE}=10kg/s$$

Valamint felírható, hogy:

$$dq_{m,x}=\rho\cdot v_x(x+dx)\cdot(dy\cdot dz)-\rho\cdot v_x(x)\cdot(dy\cdot dz)=10kg/s$$

$$dq_{m,x} = \rho \cdot (\mathrm{v}_x(x) + \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} dx)) \cdot (dy \cdot dz) - \rho \cdot \mathrm{v}_x(x) \cdot (dy \cdot dz) = 10kg/s$$

$$dq_{m,x} = \rho \cdot \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} dx \cdot (dy \cdot dz) = 10kg/s$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} = \frac{dq_{m,x}}{\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz} = \frac{dq_{m,x}}{\rho \cdot dV} = \frac{10kg/s}{1000kg/m^3 \cdot (0{,}1m)^3} = 10\frac{m/s}{m} = 10\frac{1}{s}$$

C.)

Mivel a IV) állítás szerint *x* irányban a többlet tömegkiáramlás másodpercenkénti értéke 10kg/s és az V.) és VI.) állítás szerint y és z irányban azonos a sebességváltozás méterenkénti mértéke, akkor inkompresszibilis közegben ez azt jelenti, hogy x irányon kívüli többi (y és z) irányokban összesen ugyanennyi többlet beáramlás (=negatív többet kiáramlás) szükséges. Azaz y és z irányokban külön-külön ennek a 10kg/s –nak a fele-fele mennyiségű többlet tömegbeáramlások szükségesek: egymással azonos, -5kg/s és -5kg/s értékű (negatív) többlet tömegkiáramlásnak, azaz y irányban 5kg/s és z irányban is 5 kg/s többlet tömegbeáramlásoknak kell létrejönnie.

D.)

A folyadéktér rotációja és a forgási szögsebességvektor közötti összefüggés:

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{2} rot\underline{v}$$

A szögsebességvektor *z* komponense:

$$\omega_z = \frac{1}{2}(rot\underline{v})_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y}\right)$$

A III. feltétel (*„A v sebeségvektor egyik komponense sem változik saját irányától különböző irányban.”*) szerint a zárójelben szereplő tagok zérus értékűek, így nem forognak a folyadékrészek a z tengely körül (és egyik tengely körül sem)

$$\omega_z = 0$$

Egyebek, ugyanez „máshogy”:

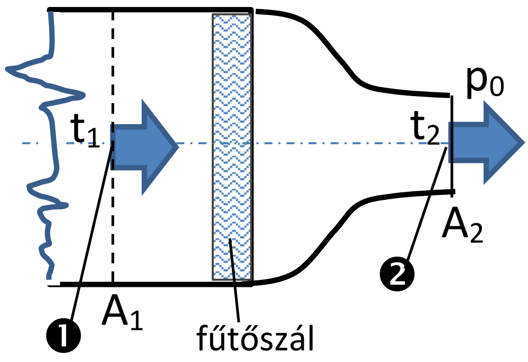
<u>Az V és VI állítás szerint:</u> A folytonosság tétel fenti div**v**=0 alapján a $\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z} = 0$ alak szerint az y és z sebességkomponensek saját irányuk szerinti megváltozásait kifejező tagok ismertek $\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} - 5\frac{\frac{m}{s}}{m} - 5\frac{\frac{m}{s}}{m} = 0$. Ebből megkapjuk a v_x sebességkomponens saját (x) irányában történő megváltozásának értékét: $\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} = 10\frac{\frac{m}{s}}{m} = 10\frac{1}{s}$.

<u>Ez a IV állításból is megkaphatjuk:</u> A 10kg/s-os x irányú többlet tömegkiáramlás másodpercenkénti értéke az x irányú be- és kiáramlás $q_{m,x}$ tömegáramainak a különbsége: $\Delta q_{m,x} = q_{m,x,KI} - q_{m,x,BE} = \rho \cdot \mathrm{v}_{x,KI} \cdot A_{x,KI} - \rho \cdot \mathrm{v}_{x,BE} \cdot A_{x,BE} = \rho \cdot \Delta \mathrm{v}_x \cdot A_x = \mathbf{1000} kg/m^3 \cdot \Delta \mathrm{v}_x \cdot \mathbf{0{,}01} m^2 = \mathbf{10} kg/s$.

Ebből: x irányban a v_x komponens sebességváltozása $\Delta \mathrm{v}_x = 1m/s$ (0,1 méteren a sebességkomponens megváltozása), tehát 10-szeresét növekedik 1 méteren: $\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} = 10\frac{\frac{m}{s}}{m} = 10\frac{1}{s}$. (De nem ez volt a kérdés.)

PÉLDA

Egy A_1=2m×2m négyzetes keresztmetszetű légcsatorna egy konfúzoron keresztül A_2=1m×1m négyzetes keresztmetszetre szűkül. Levegő (R=287J/(kgK)) áramlik a csatornában, melyről ismert, hogy a kilépő keresztmetszetben a térfogatáram $q_{V,2}=10m^3/s$ állandó értékű. A csatornában elhelyezett villamos fűtőszál a t_1=17°C hőmérsékletű levegőt t_2=47°C hőmérsékletűre melegíti fel. A közeg sűrűségének számításánál mindenhol p_0 vehető. A légcsatorna fala az „1” és „2” keresztmetszetek között zárt, nincs átáramlás rajta.



ADATOK: R=287J/(kgK), $p_0=10^5$Pa

KÉRDÉSEK: Számítással határozza meg

a) az A_1 és A_2 keresztmetszetbeli átlagsebességeket,

b) az A_1 keresztmetszetbeli térfogatáramot, és

c) az áramló levegő tömegáramát!

MEGOLDÁS *(a lap túloldalán is folytathatja)*

A légcsatorna áramcsőnek tekinthető, stacioner áramlás esetén a q_m[kg/s] tömegáram állandó az áramcső bármely keresztmetszetében.

$$q_m= \rho \cdot v \cdot A=\text{állandó}$$

Az „1” és „2” keresztmetszetekre felírt folytonosság tétele stacioner esetben:

$$\rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1= \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2$$

Az adott keresztmetszet és az ott érvényes átlagsebesség szorzata a $q_V[m^3/s]$térfogatáram.

Ahol a keresztmetszetbeli térfogatáramok:

$$q_{V,1} = v_1 \cdot A_1$$
$$q_{V,2} = v_2 \cdot A_2$$

Ezzel felírva a folytonosság tételre kapjuk:

$$\rho_1 \cdot q_{V,1}= \rho_2 \cdot q_{V,2}$$

A levegő sűrűsége (p_0=állandó esetén) a gáztörvénnyel számítható:

$$\rho_1=p_1/(R \cdot T_1) \cong p_0/(R \cdot T_1) = 1{,}20149 \text{ kg/m}^3$$
$$\rho_2=p_2/(R \cdot T_2) \cong p_0/(R \cdot T_2) = 1{,}08885 \text{ kg/m}^3$$

A kilépő keresztmetszetbeli térfogatáram $q_{V,2}=10m^3/s$ ismert adat, ebből a kilépő közeg átlagsebességét megkapjuk a térfogatáram és a keresztmetszet hányadosaként:

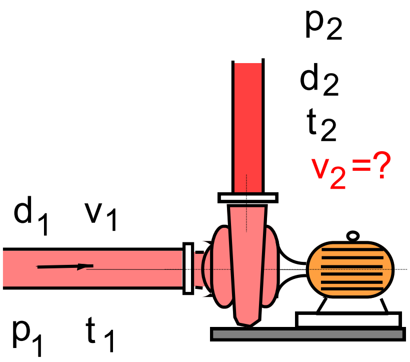
$$v_2=q_{V,2}/A_2=10m/s.$$

Majd a levegő sűrűségek (lásd fent) kiszámítása után a keresett sebességek, térfogatáram és tömegáram számíthatók:

$$v_1=2{,}266m/s$$
$$q_{V,1}=9{,}0625m^3/s$$
$$q_m=10{,}8885kg/s$$

PÉLDA

A mellékelt rajzon vázolt kompresszor q_m=213,09 kg/óra állandó tömegáramú levegőt szállít. A be- illetve kiáramlási keresztmetszetben a levegő nyomása és hőfoka rendre p_1 ill. p_2, valamint t_1 ill. t_2. A kompresszor áramcsőnek tekinthető.



ADATOK:

$p_1 = 10^5 Pa$ $\qquad$ $p_2 = 2.5 \cdot 10^5 Pa$;

$t_1 = 20°C$ $\qquad$ $t_2 = 65°C$;

d_1=65mm $\qquad$ d_2=32,5mm;

$R = 287 J/(kgK)$.

KÉRDÉSEK: Határozza meg a kompresszor „1" be- ill. „2" kilépő keresztmetszetein átáramló levegő átlagsebességét és térfogatáramát!

MEGOLDÁS *(a lap túloldalán is folytathatja)*

A kompresszor áramcsőnek tekinthető, ahol stacioner áramlás esetén a q_m=állandó az áramcső bármely keresztmetszetében.

A folytonosság tétele stacioner esetben: $\rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2$

$\rho_1 \cdot q_{V,1} = \rho_2 \cdot q_{V,2}$

Ahol a térfogatáramok: $q_{V,1} = v_1 \cdot A_1$

$q_{V,2} = v_2 \cdot A_2$

A levegő sűrűsége gáztörvénnyel számítható:

$\rho_1 = p_1/(R \cdot T_1) = 1,1892\ kg/m^3$

$\rho_2 = p_2/(R \cdot T_2) = 2,5772\ kg/m^3$

A kompresszor „1" be- ill. „2" kilépő keresztmetszetein átáramló levegő átlagsebessége és térfogatárama előzőekhez hasonlóan számítható.

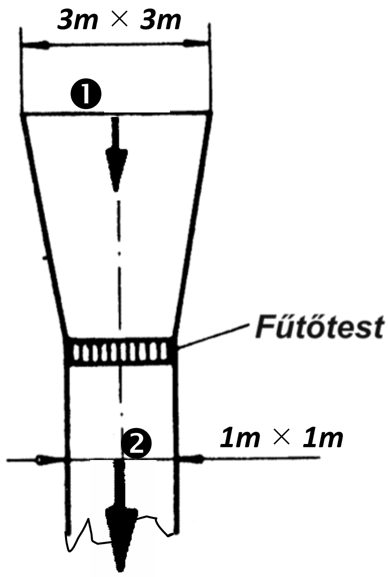
PÉLDA

Az A_1=3m×3m négyzetes belépő keresztmetszeten beszívott hideg (t_1=-3°C hőmérsékletű) levegő (R=287J/kgK) mennyisége ismert: 16200m^3/h. A beáramló levegőt utána egy fűtőtesttel melegítjük fel t_2=78°C hőmérsékletűre, így áramlik tovább az A_2=2m×2m légcsatornába. Stacioner áramlás. A közeg sűrűségének kiszámításánál mindenhol $p_0=10^5$Pa vehető. ***KÉRDÉSEK:***

a) Határozza meg az A_1 és A_2 keresztmetszetek átlagsebességeit!

b) Számítsa ki a A_2 keresztmetszetbeli térfogatáramot!

c) Számítsa ki a levegő tömegáramát!



MEGOLDÁS *(a lap túloldalán is folytathatja)*

Az idom áramcsőnek tekinthető, ahol a tömegáram q_m=állandó az áramcső bármely keresztmetszetében a stacioner feltétel esetén.

A folytonosság tétele stacioner esetben: $\rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2$

$\rho_1 \cdot q_{V,1} = \rho_2 \cdot q_{V,2}$

Ahol a térfogatáramok: $q_{V,1} = v_1 \cdot A_1$

$q_{V,2} = v_2 \cdot A_2$

A tömegáram: $q_{m,1} = \rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2 = q_{m,2}$

A levegő sűrűsége gáztörvénnyel számítható:

$\rho_1 = p_1/(R \cdot T_1) = 10^5/(287 \cdot (273-3)) = 1{,}290489$ kg/m^3

$\rho_2 = p_2/(R \cdot T_2) = 10^5/(287 \cdot (273+78) = 0{,}992684$ kg/m^3

Az „1” be- ill. „2” keresztmetszeteken átáramló levegő átlagsebessége és térfogatárama ill. a tömegáram számítható.

Ismert a térfogatáram: $q_{V,1}$=16200 m^3/h = 16200/3600 m^3/s = 4,5 m^3/s

Így ismert a sebesség $v_1 = q_{V,1}/ A_1 = 4{,}5 / 9 = 0{,}5$ m/s

A tömegáram: $q_{m,1} = \rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 = 1{,}290489 \cdot 4{,}5 \cdot 9 = 52{,}2648$ kg/s $= q_{m,2}$

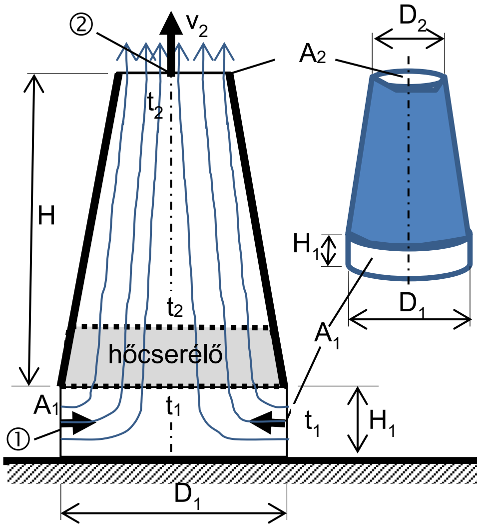
A „2” sebesség: $v_2 = q_m / (\rho_2 \cdot A_2) = 13{,}1625$ m/s

A „2” térfogatáram: $q_{V,2} = v_2 \cdot A_2 = 52{,}65$ m^3/s = 189 540 m^3/h

PÉLDA

Az ábrán látható H=100m magas erőművi hűtőtorony alsó, hengerpalást (H_1=4m; $\varnothing D_1$=40m) alakú A_1 belépő keresztmetszetén külső hideg (t_1=-7°C) levegő áramlik be, majd a hőcserélőn t_2=+77°C-ra felmelegedve, további hőmérsékletváltozás nélkül a hűtőtorony kéményének $\varnothing D_2$=10m átmérőjű kilépő (A_2) keresztmetszetén v_2=8m/s átlagsebességgel távozik a szabadba. A levegő sűrűségének kiszámításához $p_0=10^5$Pa vehető. Stacioner állapot. A hűtőtorony az A_1 és A_2 keresztmetszetek között áramcsőnek tekinthető.

KÉRDÉSEK: Határozza meg az A_1 keresztmetszetbeli átlagsebességet, az A_1 és A_2 keresztmetszetbeli térfogatáramokat, és a levegő tömegáramát!



MEGOLDÁS *(a lap túloldalán is folytathatja)*

Stacioner áramlás esetén a q_m=állandó az áramcső bármely keresztmetszetében.

A folytonosság tétele stacioner esetben:

$$\rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2$$
$$\rho_1 \cdot q_{V,1} = \rho_2 \cdot q_{V,2}$$

Ahol a térfogatáramok:

$$q_{V,1} = v_1 \cdot A_1$$
$$q_{V,2} = v_2 \cdot A_2$$

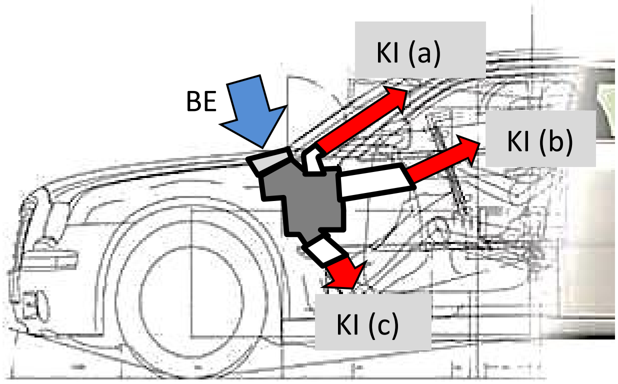
A levegő sűrűsége gáztörvénnyel számítható:

$$\rho_1 = p_1/(R \cdot T_1) \approx p_0/(R \cdot T_1)$$
$$\rho_2 = p_2/(R \cdot T_2) \approx p_0/(R \cdot T_2)$$

A megoldás az előzőekhez hasonló, de egyre kell figyelni, hogy az A_1 beáramlási keresztmetszet itt egy H_1 magasságú és $K=D_1\pi$ kerületű hengerpalást alakú keresztmetszet:

$$A_1 = K \cdot H_1 = D_1 \cdot \pi \cdot H_1$$

PÉLDA



Egy személyautó utastéri klímaventilátorának szívóoldali BElépő keresztmetszetén /A_{BE}=100cm^2/ beszívott külső /t_{BE}=20°C/ levegő térfogatárama $q_{V,BE}$=216m^3/óra. A levegőt azonos hőmérsékleten három helyen áramoltatjuk KI az utastérbe:

„KI = a)" felfelé (szélvédőre),
„KI = b)" középre (vezetőre, utasra) és
„KI = c)" lefelé (lábtérbe).

Az alábbi táblázatban ismertek az utastérbe kilépő keresztmetszetek, a levegő hőmérsékletek és kiáramlási sebességek. A rendszer mindenhol máshol le van zárva.

LÉGBEFÚVÓK	levegő hőmérséklet t [°C]	áramlási keresztmetszet A_i [cm^2]	átlagsebesség v [m/s]
a)felfelé, szélvédőre	20	2db×25 cm^2 = 50 cm^2	$v_{KI,a}$=1 m/s
b)középre	20	4db×25 cm^2 =100 cm^2	$v_{KI,b}$= ?
c)lábtérbe	20	2db×25 cm^2 = 50 cm^2	$v_{KI,c}$=1 m/s

Feltételek: A sűrűség számításához mindenhol $p_0=10^5$Pa vehető, R=287J/(kgK), μ=0., stacioner áramlás.

KÉRDÉSEK:

a) Határozza meg a $v_{KI,b}$ **középre** kifújt levegő sebességét, térfogatáramát és tömegáramát!

b) Hányszorosára változik a **szélvédőre** kifújt levegő sebessége, ha a középre és a lábtérbe való kiáramoltatást teljesen lezárjuk, miközben a befúvás tömegáramát nem változtatjuk? $v_{KI,a}'$=?

MEGOLDÁS *(a lap túloldalán is folytathatja)*

Stacioner áramlás esetén a q_m=állandó egy áramcső bármely keresztmetszetében.
Itt a belépő tömegáram számítható a belépő közeg sűrűsége és a térfogatárama alapján.

A folytonosság tétele stacioner esetben:

$$q_{m,BE} = q_{m,KI}$$

A kilépés itt háromfelé oszlik (a, b, c):

$$q_{m,BE} = q_{m,KI,a} + q_{m,KI,b} + q_{m,KI,c}$$

$$(\rho_{BE}\cdot q_{V,BE}) = (\rho_{KI,a}\cdot q_{V,KI,a}) + (\rho_{KI,b}\cdot q_{V,KI,b}) + (\rho_{KI,c}\cdot q_{V,KI,c})$$

$$(\rho_{BE}\cdot v_{BE}\cdot A_{BE}) = (\rho_{KI,a}\cdot v_{KI,a}\cdot A_{KI,a}) + (\rho_{KI,b}\cdot v_{KI,b}\cdot A_{KI,b}) + (\rho_{KI,c}\cdot v_{KI,c}\cdot A_{KI,c})$$

Mivel a hőmérséklet azonos mindenhol, a sűrűség állandó (ρ=konst.), így a folytonosság tétel a belépő-kilépő tömegáramok azonossága helyett a belépő-kilépő térfogatáramok azonosságára egyszerűsthető:

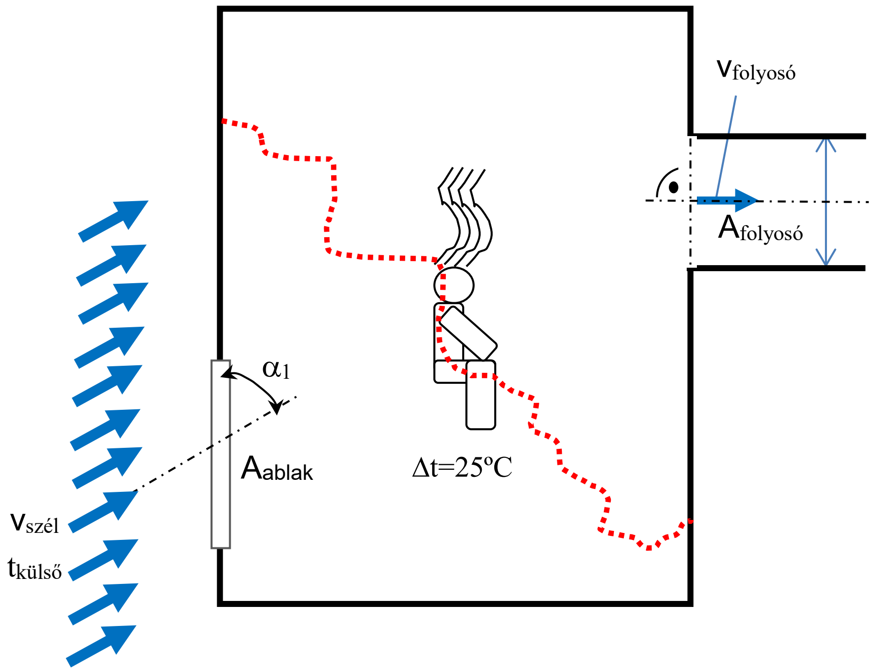
$$q_{V,BE} = q_{V,Ki,a} + q_{V,Ki,b} + q_{V,Ki,c}$$

$$v_{BE}\cdot A_{BE} = (v_{KI,a}\cdot A_{KI,a}) + (v_{KI,b}\cdot A_{KI,b}) + (v_{KI,c}\cdot A_{KI,c})$$

a)Fenti könnyen rendezhető az ismeretlen $v_{ki,b}$ sebességre.

b)Ebben az esetben a megváltozott $v_{ki,a}'$-re is könnyen rendezhető fenti egyenlet, mivel a b) és c) ágakat lezártuk, tehát azokon zérus a közeg áramlási sebessége. A növekedés mértéke ($v_{ki,a}'$/ $v_{ki,a}$) is kiszámítható, mivel az volt a kérdés, hogy hányszorosára változik a levegő sebessége.

PÉLDA



Felülnézetből látunk egy előadótermet, baloldali falon egy teljesen nyitott ablak, a jobboldalon egy folyosóra teljesen nyitott ajtó. Az előadóterem téglalap alakú (A_{ablak}=6m×3m) nyitott ablakán befúj a hideg ($t_{külső}$=10°C), állandó $v_{szél}$=3,6km/h sebességű és α_1=60° irányú szél (ld. ábra). Stacioner állapot.

A teremben ülő 100 hallgató és a téli fűtés miatt a levegő felmelegszik, és Δt=35°C hőmérséklet-növekedés után a folyosóra áramlik ki a nyitott ajtón keresztül. A folyosó a terem falára merőleges tengelyű, $A_{folyosó}$=4m×2m téglalap keresztmetszetű csatornának tekinthető. A terem mindenhol máshol zárt.

KÉRDÉSEK:

A) Határozza meg az ablakon beáramló ill. a folyosóra ki áramló levegő adott keresztmetszetbeli átlagsebességét, térfogatáramát és tömegáramát!

B) Határozza meg az előadóteremben a két falközött tetszőlegesen felvett (piros szaggatott) vonallal jelzett belső keresztmetszeten átáramló közeg tömegáramát!

Feltételek: stacioner állapot, levegőre R=287J/(kg.K); a levegő sűrűségének kiszámítása szempontjából a nyomás mindenhol $p_0=10^5$Pa értékűnek vehető.

MEGOLDÁS

Alkalmazzuk a belépő („ablak") keresztmetszetre és a kilépő („folyosó") keresztmetszetre a folytonosság tételét, változó hőmérsékletű (így változó sűrűségű), de stacioner közegáramlásra.

$$q_{m,BE} = q_{m,KI}$$

$$\rho_{BE} \cdot q_{V,BE} = \rho_{KI} \cdot q_{V,KI}$$

Az ablak keresztmetszetén beáramló és a folyosó keresztmesztetén átáramló közeg mennyiségének kiszámításához használjuk a térfogatáram vagy a tömegáram definícióját:

$$q_V = \int_A \underline{v} d\underline{A}$$

$$q_m = \int_A \rho \underline{v} d\underline{A}$$

Ügyeljünk arra, hogy: $\underline{v} d\underline{A} = |\underline{v}||d\underline{A}| \cos(\alpha)$!