Technische und Wirtschaftswissenschaftliche Universität Budapest (BME)
Lehrstuhl für Strömungslehre

Dr. Tamás LAJOS

Strömungslehre

Vorlesungsskript

zu den Vorlesungen der Deutschsprachigen Ingenieurausbildung

2005

Inhalt

Kapitel der Strömungslehre

	Hydrostatik	Aerostatik	Hydrodynamik	Gasdynamik
$\underline{\mathbf{v}}$ Geschwindigkeit				
p Druck				
ρ Dichte				
	ruhende Flüssigkeit in Kraftfeld	ruhendes Gas in Kraftfeld (Atmosphere)	sich bewegende Flüssigkeit	sich bewegendes Gas mit erheblicher Dichteveränderung

Bewegungszustand $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r},t)$ v_x, v_y, v_z

Druckverteilung $p = p(\underline{r},t)$ p

Dichteverteilung $\rho = \rho(\underline{r},t)$ ρ

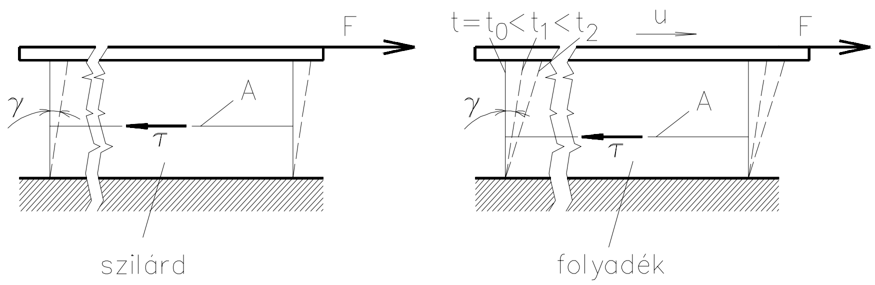
Temperaturverteilung $T = T(\underline{r},t)$ T

6 Größen $\Rightarrow$ 6 Gleichungen

Massenerhaltung (Kontinuitätsgleichung)	1 (skalar)
Kräftegleichgewicht (Bewegungsgleichungen)	3 (vektoriell)
Energiesatz	1 (skalar)
Zustandsgleichung	1 (skalar)

1. Eigenschaften von Fluiden

Vergleich von Festkörper und Fluiden



$\tau = F/A$ [Pa] Schubspannung

Festkörper	γ, <u>Deformation</u> ist proportional zur Schubspannung τ
Fluiden (newtonsche)	dγ/dt, <u>Deformationsgeschwindigkeit</u> ist proportional zur Schubspannung τ

nicht-newtonsche Fluiden

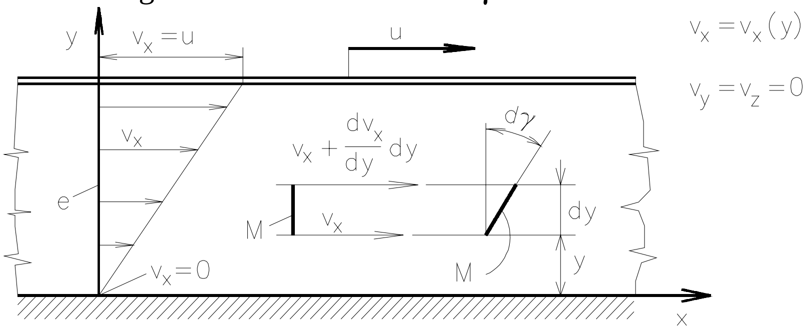
Erfahrungen mit Fluiden

- Haftbedingung
- Deformation verursacht keine Veränderung der inneren Struktur

- kontinuierliche Deformation wenn Schubspannung wirkt
- keine Schubspannung bei ruhenden Fluiden

Viskosität

Geschwindigkeitsverteilung
Verdrehung des Stäbchens M in dt: dγ

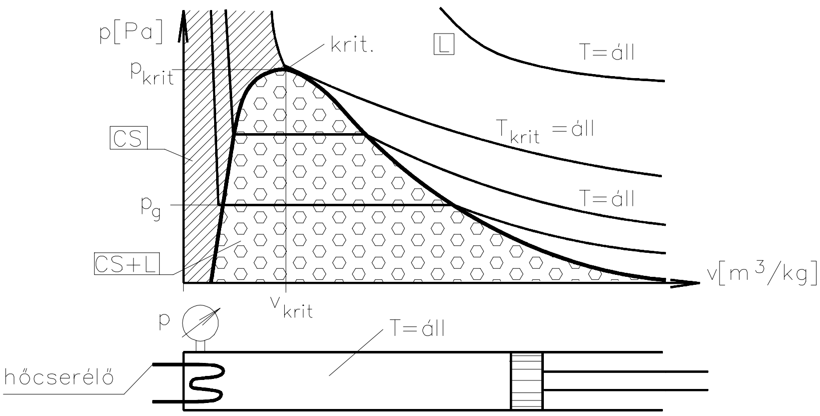


$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{dv_x}{dy}. \qquad \boxed{\tau_{xy} = \mu \frac{dv_x}{dy} = \mu \frac{d\gamma}{dt}.}$$ Newtonscher Viskositätssatz

$$[\mu] = [\tau]\left[\frac{\partial y}{\partial v_x}\right] = \frac{kg\,m}{s^2 m^2}\,\frac{m}{m/s} = \frac{kg}{ms}.$$ dynamische Viskosität

$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho}} \quad [m^2/s]$$ kinematische Viskosität

Kompression von Wasserdampf



Wenn $T >> T_{krit}$ (O_2 und N_2 $\rightarrow T_{krit}$ 154 [K] and 126 [K])

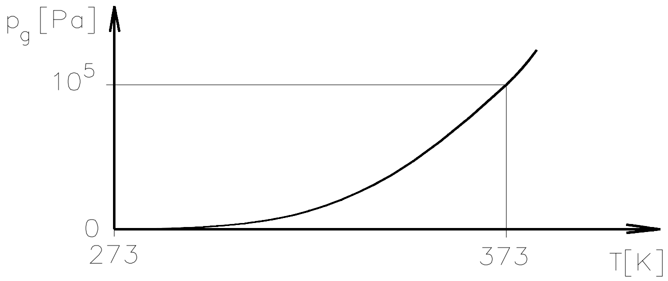
$$pv = \boxed{\frac{p}{\rho} = RT}$$ ideale Gasgleichung

wo p[Pa], ρ [kg/m³], T [K], $R = R_u / M$, R_u = 8314.3 J/kg/K universelle Gaskonstante, M [kg/kmol] molare Masse, für Luft: M=29 kg/kmol, so R=287 J/kg/K.

Kavitation

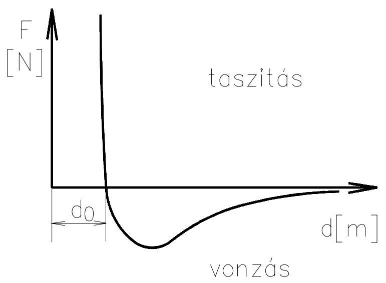
Sättigungsdruck (Dampfdruck) - Temperatur Wasser 15 ^{0}C, p_s = 1700 Pa, 100 ^{0}C, $p_s = 1.013*10^5$ Pa Standard-Druck der Atmosphäre

Kavitationserosion



Vergleich von Flüssigkeiten und Gasen

Wechselwirkung von Molekülen (Anziehung und Abstoßung)



d_0 Moleküldurchmesser

	Flüssigkeiten	Gase
Abstand zwischen den Molekülen	klein ≅ d_0	groß ≅ 10d_0
Die Rolle der Wechselwirkung zwischen den Molekülen	wichtig ⇒ freie Onberfläche	kleine⇒ das Gas füllt das verfügbare Volumen aus
Einfluß des Druckes auf das Volumen	klein ⇒ 1000 bar verursacht 5% Abnahme von V	groß ⇒ im Falle T=const V proportional zu 1/p
Grund der Viskosität	Anziehungskraft zwischen Moleküle	Impulsaustausch der Moleküle
Beziehung zwischen Viskosität und Temperatur Viskosität und Druck	T nimmt zu, μ nimmt ab unabhängig	T nimmt zu, μ nimmt zu unabhängig

2. Beschreibung des Strömungfeldes

Skalarfelder

Dichte $\rho_v = \lim_{\Delta V \Rightarrow \varepsilon^3} \frac{\Delta m}{\Delta V} \left[kg / m^3 \right]$, ΔV Volumen Inkrement, $\varepsilon >> \lambda$ (mittlere freie Weglänge)

Kontinuum $\rho=\rho(\underline{r},t)$ $\rho=\rho(x,y,z,t)$

Druck

$p = |\Delta F| / |\Delta A|$ [N/m^2], [Pa].

$p=p(\underline{r},t)$, $p=p(x,y,z,t)$

Temperatur

$T=T(\underline{r},t)$

Vektorfelder

Geschwindigkeitsfeld

$\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}, t)$ Eulersche Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes

Kraftfelder

$\lfloor \underline{g} \rfloor = N / kg = m / s^2$.

Schwerekraftfeld: $\underline{g} = -g_g \underline{k}$ $g_g = 9.81$ N/kg, 1 kg 9.81 N

Trägheitskraftfeld: sich beschleunigendes Koordinatensystem ($\underline{a} = a\underline{i}$) $\underline{g_t} = -a\underline{i}$.

Zentrifugalfeld: rotierendes Koordinatensystem $\underline{g_c} = \underline{r}\omega^2$

Charakterisierung der Felder

Charakterisierung der Skalarfelder:

$$\text{gradp} = \frac{\partial p}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\underline{k} = \frac{\partial p}{\partial \underline{r}}$$ Gradientvektor

4 charakteristische Kennzeichen des Gradientvektores:
Der gradp Vektor

- ist parallel mit der Richtung der schnellsten Veränderung von p,
- ist senkrecht auf p = Konst. Fläche,
- zeigt in die Richtung der Zunahme von p.
- Seine Länge ist proportional zu dem Grad der Veränderung von p.

Die Veränderung der Skalargröße:

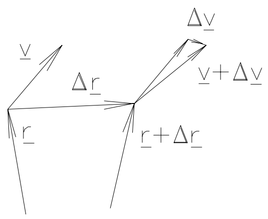
$$\Delta p = p_B - p_A \cong \mathrm{grad}\,p\,\Delta\underline{s} = \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial p}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial p}{\partial z}\Delta z$$

<u>Charakterisierung der Vektorfelder:</u>

$$\underline{v} = v_x\,\underline{i} + v_y\,\underline{j} + v_z\,\underline{k} = \underline{v}(\underline{r}, t).$$

Vektorfeld = 3 Skalarfeld

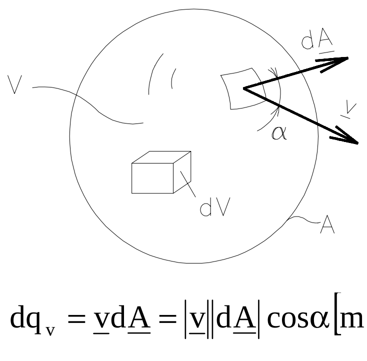
$$v_x = v_x(x, y, z, t),\ v_y = v_y(x, y, z, t),\ v_z = v_z(x, y, z, t).$$



$$\Delta v_x \cong \mathrm{grad}\,v_x\,\Delta\underline{r} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\Delta z\ .$$

$$\Delta\underline{v} \cong \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\Delta z \\ \frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\Delta z \\ \frac{\partial v_z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_z}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z \end{bmatrix}$$

<u>Divergenz</u>: $\mathrm{div}\,\underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$,



$$dq_v = \underline{v}\,d\underline{A} = |\underline{v}||d\underline{A}|\cos\alpha\,[m^3/s]$$

$$\boxed{\int_A \underline{v}\,d\underline{A} = \int_V \mathrm{div}\,\underline{v}\,dV}$$ <u>Gaußscher Integralsatz</u>

<u>Rotation</u>

$$\mathrm{rot}\,\underline{v} = \underline{\nabla}\times\underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\underline{v} = 2\underline{\Omega}}$$

$$\boxed{\Gamma = \oint_G \underline{v}d\underline{s} = \int_A \mathrm{rot}\,\underline{v}d\underline{A}}$$ Stokesscher Integralsatz

Potentialströmungen

$\underline{v} = \mathrm{grad}\varphi$ Voraussetzung: $\Gamma = \oint_G \underline{v}d\underline{s} = 0$, oder $\mathrm{rot}\,\underline{v} = 0$

Beispiel: für das Schwerekraftfeld g: $\oint_G \underline{g}d\underline{s} = 0$ die Arbeit des Kraftfeldes

U [m^2/s^2] Potenzial des Vektorfeldes

$$\boxed{\underline{g} = -\mathrm{grad}U}$$

Schwerekraftfeld: $\underline{g}_g = -g_g\underline{k}$ $\boxed{U_g = g_g z + \mathrm{konst.}}$

Trägheitskraftfeld: sich beschleunigendes Koordinatensystem $\underline{g}_t = -a\underline{i}$ $\boxed{U_t = ax + \mathrm{konst.}}$

Zentrifugalfeld: rotierendes Koordinatensystem $\underline{g}_c = \underline{r}\omega^2$ $\boxed{U_c = -\frac{r^2\omega^2}{2} + \mathrm{kost.}}$

3. Kinematik und Kontinuität

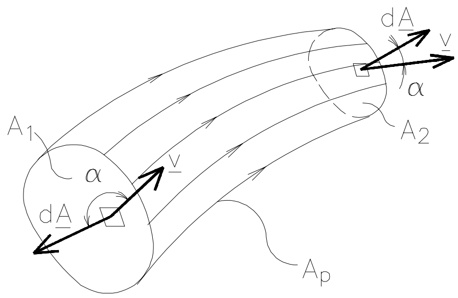
Definitionen

Streichlinie verbindet die Flüssigkeitsteilchen die einen Punkt des Raumes nacheinander passieren. Zb. Photo: (Momentaufnahme) Rauchfaden aus ein Schornstein, Öldampffaden um ein Fahrzeugmodell im Windkanal.

Bahnlinie verbindet die aufeinanderfolgende Positionen eines Flüssigkeitsteilchens (Zeitaufname).

Stromlinie: die Kurve, die durch die Geschwindigkeitsvektoren tangiert wird. ($\underline{v}$ x $d\underline{s}$ = 0.)

Stromfläche, Stromrögre: keine Strömung durch die Fläche.



Zeitverhalten der Strömungen

Instationäre Strömungen: $\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}, \mathbf{t})$

Stationäre Strömungen: $\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}})$

In vielen Fällen kann die Zeitabhängigkeit der Strömung durch Koordinatentransformation aufgehoben werden.

In stationären Strömungen fallen die Strom-, Bahn- und Streichlinien zusammen, in instationären Strömungen im allgemeinen nicht.

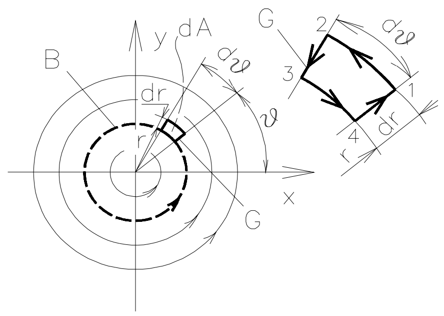
Sichtbarmachung der Strömungen

quantitative und/oder qualitative Informationen

Durchsichtige Fluiden, reflektierende Teilchen, die sich zusammen mit dem Fluid bewegen:
- Teilchen von gleicher Dichte oder
- sehr kleine Teilchen (großer aerodynamischer Widerstand).

Öldampf, Rauch, Wasserstoff-Bläschen, Farbe, Kunststoffkugeln in Wasser,
Wollfaden in Luft,
PIV (Particle Image Velocimetry), LDA Laser Doppler Anemometry)

Potentialwirbel



Ebene (Zweidimensionale, 2D) Strömungen: $v_z = 0, \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0.$

Aufgrund Kontinuitätsüberlegung: v = v(r) **v(r) = ?**

Bestimmung von rot$\underline{v}$ mit Anwendung des Stokesschen Integralsatzes: $\boxed{\Gamma = \oint_G \underline{v} d\underline{s} = \int_A \text{rot} \underline{v} d\underline{A}}$

$$\oint_G \underline{v}d\underline{s} = \int_1^2 \underline{v}d\underline{s} + \underbrace{\int_2^3 \underline{v}d\underline{s}}_{=0} + \int_3^4 \underline{v}d\underline{s} + \underbrace{\int_4^1 \underline{v}d\underline{s}}_{=0}$$

Da $\underline{v} \perp d\underline{s}$ im 2. und 4. Integral, und $\underline{v}$ und $d\underline{s}$ bilden 0^0 oder 180^0 im 1. und 3. Integral

$$\oint_G \underline{v}d\underline{s} = (r+dr)d\vartheta v(r+dr) - rd\vartheta v(r)$$

Da $v(r+dr) = v(r) + \frac{dv}{dr}dr$

nach Substitution

$$\oint_G \underline{v}d\underline{s} = rd\vartheta\frac{dv}{dr}dr + drd\vartheta v(r) + \underbrace{drd\vartheta\frac{dv}{dr}dr}_{\approx 0}$$

Bei ebenen Strömungen ist nur $(rot\underline{v})_z \neq 0$.

$$\int_{dA} rot\underline{v}d\underline{A} = (rot\underline{v})_z rd\vartheta dr$$

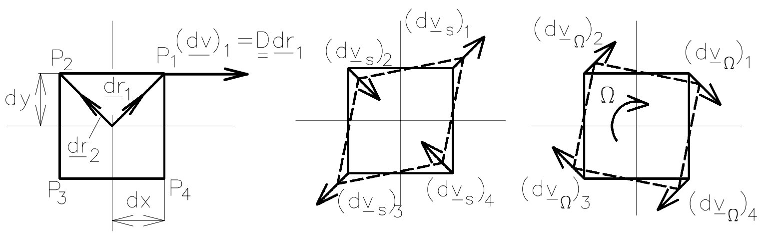
$$\boxed{(rot\underline{v})_z = \frac{dv}{dr} + \frac{v}{r}}.$$

Beispiel: $v = r\omega \Rightarrow (rot\,\underline{v})_z = 2\omega$

Im Falle $rot\underline{v} = 0$

$\frac{dv}{v} = -\frac{dr}{r} \Rightarrow \ln v = -\ln r + \ln const \Rightarrow \boxed{v = \frac{K}{r}}$. Geschwindigkeitsverteilung in Potentialwirbel.

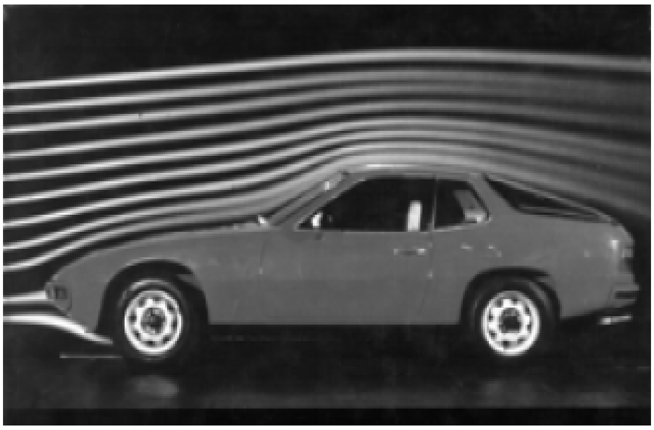
Die Bewegung kleiner Flüssigkeitsteilchen

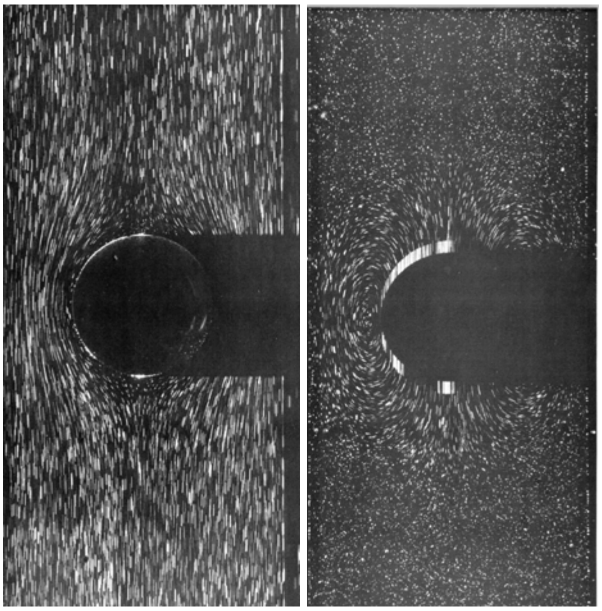


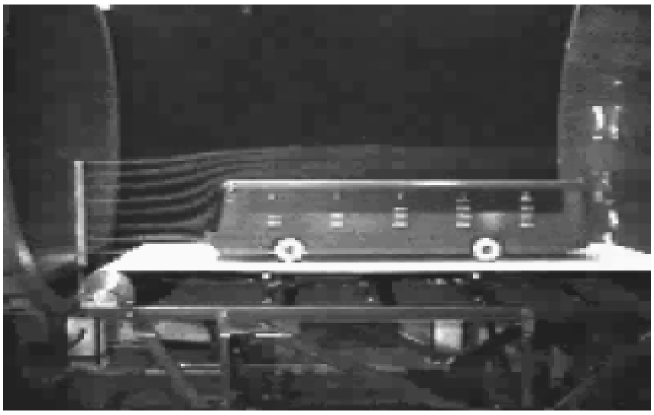
Die Bewegung von Teilchen kann als Superposition von Parallelverschiebung, Deformation und Rotation hergestellt werden.

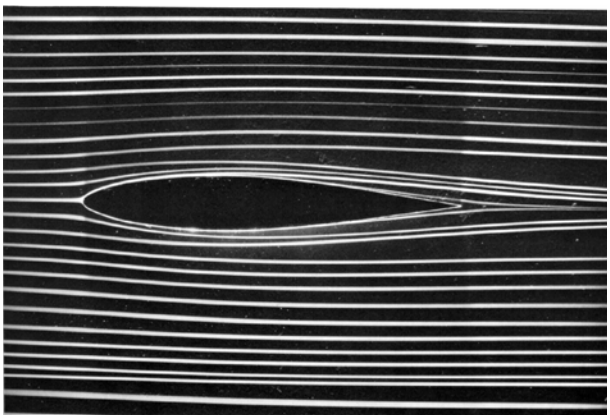
In Potentialströmungen gibt es keine Rotation.

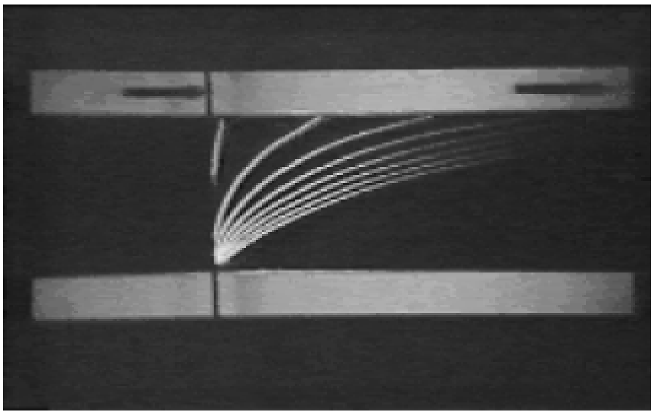
Beispiele für die Sichtbarmachung der Strömungen

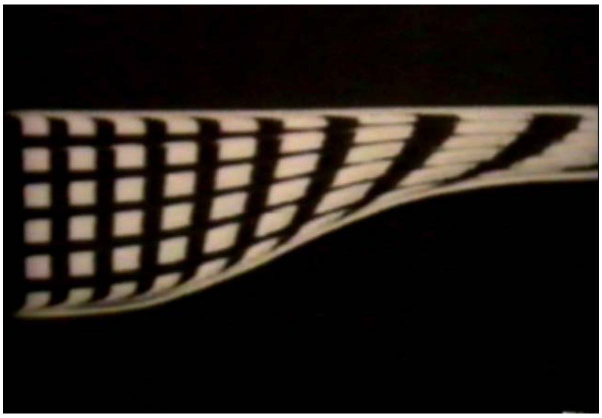


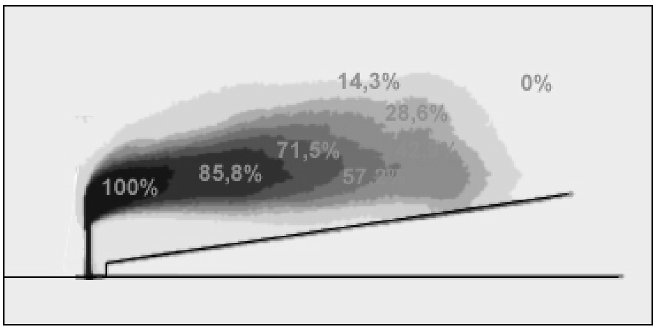


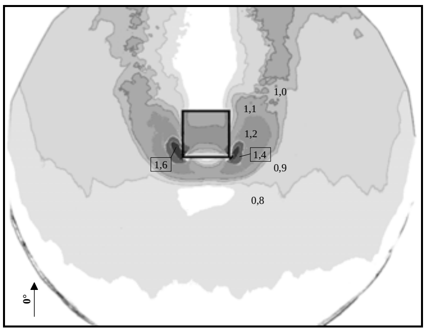




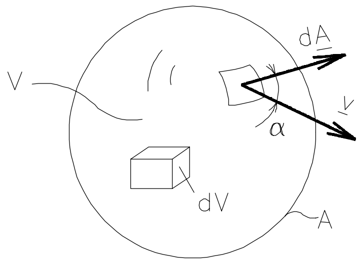








Kontinuitätsgleichung



$$dq_m = \rho \underline{v} d\underline{A} = \rho |\underline{v}| |d\underline{A}| \cos\alpha \left[m^3 / s\right]$$

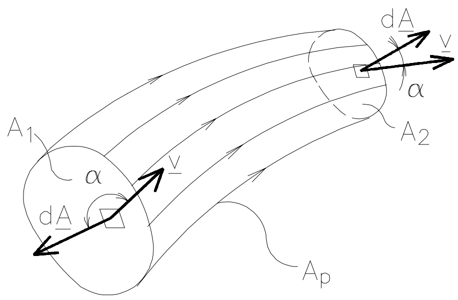
Integralform der Kontinuitätsgleichung: $\boxed{\int_A \rho \underline{v} d\underline{A} + \int_V \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV = 0}$

Differentialform: $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0}$, wenn die Strömung stationär ist: $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}) \Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0}$,

wenn die Fluiden inkompressibel sind: ρ= const. $\boxed{\operatorname{div}\underline{v} = 0}$

Verwendung der Kontinuitätsgleichung auf ein Stromfaden

Stationäre Strömung, keine Strömung durch den Mantel des Stromrohres.

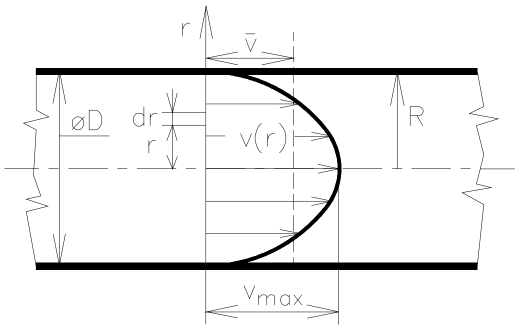


Integralform der Kontinuitätsgleichung für stationäre Strömung: $\int_A \rho \underline{v} d\underline{A} = 0$. "A" enthält den Mantel A_p ($\underline{v} \perp d\underline{A}$), A_1 und A_2, die Ein- und Ausflussquerschnitte. $\int_{A_1} \rho \underline{v} d\underline{A} + \int_{A_2} \rho \underline{v} d\underline{A} = 0$.

Da $\underline{v} d\underline{A} = |\underline{v}| |d\underline{A}| \cos\alpha$, $\int_{A_1} \rho |\underline{v}| |d\underline{A}| \cos\alpha + \int_{A_2} \rho |\underline{v}| |d\underline{A}| \cos\alpha = 0$ Annahmen: über A_1 und A_2 $v \perp A$ und über A_1 $\rho = \rho_1$ =const, über A_2 $\rho = \rho_2$ =const'.

Das Ergebnis ist: $\rho \bar{v} A$ = const, wo $\bar{v}$ die Durchschnittsgeschwindigkeit ist. Bei sich veränderndem Querschnitt einer Rohrleitung: $\boxed{\rho_1 \bar{v}_1 A_1 = \rho_2 \bar{v}_2 A_2}$ $\Rightarrow$ $\bar{v}_2 = \bar{v}_1 \frac{\rho_1 D_1^2}{\rho_2 D_2^2}$

Bestimmung der Durchschnittsgeschwindigkeit in einem Rohr mit Kreisquerschnitt



$\bar{v}$=? Durchschnittsgeschwindigkeit

In dem Rohrquerschnitt von Durchmesser D läßt sich die Geschwindigkeitsverteilung mit einem Paraboloid beschrieben. Der Unterscheid zwischen v_{max} und v(r) hängt von n. Exponent von r ab, so $v(r) = v_{max}\left[1-(r/R)^n\right]$.

Durchschnittsgeschwindigkeit:

$\bar{v} = \frac{4q_v}{D^2\pi}[m/s]$ wo $q_v[m^3/s]$ der Volumenstrom ist.

Der Volumenstrom durch den Elementarquerschnitt eines Kreisringes (Radius r, Dicke dr, Querschnitt $2r\pi dr$) ist

$dq_v = 2r\,\pi\, v(\underline{r})\, dr \Rightarrow q_v = \int_0^R 2r\pi v_{max}\left[1-(r/R)^n\right] dr$.

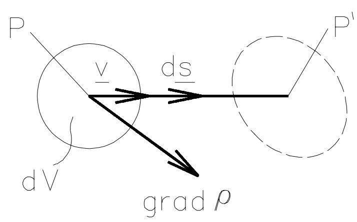
Die Integration ergibt: $q_v = R^2\pi v_{max}\frac{n}{n+2}$, so ist die Durchschnittsgeschwindigkeit:

$$\bar{v} = \frac{n}{n+2} v_{max} .$$

Im Fall eines Paraboloids von n = 2 ist die Durchschnittsgeschwindigkeit die Hälfte der Maximalgeschwindigkeit.

Substantielle, lokale und konvektive Veränderung von Variablen

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\underline{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{v}\operatorname{grad}\rho + \rho\operatorname{div}(\rho\underline{v}) = 0$$



Die Geschwindigkeit in Punkt P ist $\underline{v}$, die örtliche Veränderung der Dichte kann durch gradρ beschrieben werden. Instationäre Strömung: $\partial\rho / \partial t \neq 0$. Gesucht ist die Dichteveränderung dρ in der Zeit dt.

Zwei Ursachen der Veränderung von ρ:

a) Die Zeitabhängigkeit der Dichte ($\partial\rho / \partial t \neq 0$) $\Rightarrow$ die Veränderung der Dichte in der Zeit *dt* in Punkt P: $d\rho_l = \frac{\partial\rho}{\partial t} dt$

b) Das Flüssigkeitsteilchen hinterlässt in *dt* Zeit einen Elementarweg $d\underline{s} = \underline{v} dt$ und erreicht Punkt P', wo die Dichte sich von der Dichte in Punkt P mit $d\rho_k = \mathrm{grad}\rho\, d\underline{s} = \mathrm{grad}\rho\, \underline{v} dt$ unterscheidet.

- $d\rho_l$ ist die lokale Veränderung der Dichte (nur bei instationären Strömungen)
- $d\rho_k$ ist die konvektive Veränderung der Dichte, die durch die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen und die örtliche Vänderung der Dichte verursacht wird.

Die substantielle Veränderung der Dichte in der Zeit *dt* ist: $d\rho = d\rho_l + d\rho_k = \frac{\partial\rho}{\partial t} dt + \underline{v}\,\mathrm{grad}\rho\, dt$

Die Veränderung pro Zeiteinheit: $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{v}\,\mathrm{grad}\rho$. Die Kontinuitätsgleichung kann umgeformt werden: $\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\underline{v}) = 0} \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{v}\,\mathrm{grad}\rho + \rho\,\mathrm{div}(\rho\underline{v}) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\underline{v} = 0}$

4. Hydrostatik

Ruhende Fluiden: Die Kraft die auf die Masse wirkt (z.B. Gewicht), wird von den Kräften die auf der Oberfläche wirken (Druckkräfte und die Kräfte infolge der Schubspannung) ausgeglichen.

$$\rho\, dx\, dy\, dz\, g_x + dy\, dz\, p(x) - dy\, dz \left(p(x) + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) = 0$$

$\rho\, g_x = \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\mathrm{grad}\, p = \rho\, \underline{g}}$ Grundgleichung der Hydrostatik.

Annahme: $\underline{g} = -\mathrm{grad}\, U$ (Potentialkraftfeld).

Da $\mathrm{grad}\, p = -\rho\ \mathrm{grad}\, U \Rightarrow$ *p = const* Ebenen fallen mit der *U = const* (Äquipotentialfläche) zusammen.

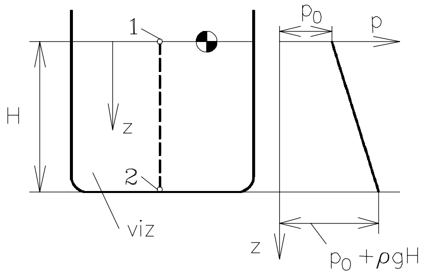
Die Oberfläche (Wasserspiegel) einer Flüssigkeit fällt mit der *U = const* Äquipotentialfläche zusammen $\Rightarrow$ die Flüssigkeits-Oberfläche ist senkrecht auf den Kraftfeld-Vektor.

Annahme: $\underline{g} = -\mathrm{grad}\, U$ (Potentialkraftfeld), $\rho = const$ (inkompressible Fluiden)

$$\frac{1}{\rho} \mathrm{grad}\, p = \mathrm{grad}\, \frac{p}{\rho} = -\,\mathrm{grad}\, U \Rightarrow \mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho} + U \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{p}{\rho} + U = \mathrm{const}}$$

$\boxed{\frac{p_1}{\rho_1} + U_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + U_2}$: unvollständige Bernoulli-Gleichung.

Druckverteilung in einem ruhenden und in einem sich beschleunigenden Behälter



Aus der Grundgleichung der Hydrostatik: $\underline{g}_g = g\underline{k}$, wo $g = 9.81\,\mathrm{N/kg}$. $\frac{\partial p}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\underline{k} = \rho g \underline{k}$

$dp/dz = \rho g$, $\rho = \text{const} \Rightarrow p = \rho g z + \text{const}$.

In $z = 0$, $p = p_0$. $\Rightarrow$ Const. $= p_0 \Rightarrow \boxed{p = p_0 + \rho g z}$. $\Rightarrow$ In z = H (Punkt 2) $p_2 = p_0 + \rho g H$

Bernoulli-Gleichung $\boxed{\frac{p_1}{\rho_1} + U_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + U_2}$.

Punkt 1 auf der Oberfläche (z = 0), Punkt 2 am Behälterboden (z = H).
Wenn die Koordinate z nach unten zeigt: $U = -gz$, $p_1 = p_0, z_1 = 0$, $p_2 = ?, z_2 = H$.

$\boxed{p_2 - p_0 = \rho g H}$.

Wenn der Behälter sich nach oben beschleunigt, ist das Wasser nur in dem Koordinatensystem in Ruhe, das sich nach oben beschleunigt. In diesem Fall muss eine zusätzliche (Trägheits-) Kraftfeld berücksichtigt werden: $g_i = a\,\underline{k}$:

$U_i = -az \quad U = U_g + U_i = -(g + a)z \Rightarrow \boxed{p_2 - p_0 = \rho(g + a)H}$.

5. Euler und Bernoulli-Gleichung

Beschleunigung der Flüssigkeitsteilchen

Die Veränderung von v_x pro Zeiteinheit, d.h. die Beschleunigung der Flüssigkeitsteilchen in x Richtung ist :

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \underline{v}\,\mathrm{grad}\,v_x .$$

Das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung ist die lokale Beschleunigung, das zweite Glied die konvektive Beschleunigung.

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$
$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$$
$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Bestimmung des Differentiales von $\underline{v}(\underline{r},t)$: $d\underline{v} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}dt + \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{r}}\frac{\partial \underline{r}}{\partial t}dt$.

$d\underline{v}$ kann auf Zeiteinheit bezogen werden, dh. mit dt dividieren:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{r}}\frac{\partial \underline{r}}{\partial t}\text{, wo } \partial\underline{r}/\partial t = \underline{v}\,.$$

Wenn die Strömung instationär ist, ist die lokale Beschleunigung ungleich 0. Die konvektive Beschleunigung existiert, wenn die Größe und/oder die Richtung der Geschwindigkeit sich in die Richtung der Bewegung des Füssigkeitsteilchens verändert.

Der Ausdruck für die Beschleunigung kann transformiert werden:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{v^2}{2} - \underline{v}\times\operatorname{rot}\underline{v}\,.$$

Euler - Gleichung

Reibungsfreie Strömung: $\boxed{\mu = 0}$

Die Resultierende der Kräfte = Masse · Beschleunigung
Reibungsfreie Strömung: die Kräfte werden durch den Druck und das Kraftfeld verursacht (keine Schubspannung).

Die Beschleunigung eines Würfels von Kantenlängen dx, dy, dz in x Richtung und die Kräfte die auf den Würfel in x Richtung wirken können in einer Gleichung in Zusammenhang gebracht werden:

$$\rho\, dx\, dy\, dz \frac{dv_x}{dx} = \rho\, dx\, dy\, dz\, g_x + p\, dy\, dz - (p + \frac{\partial p}{\partial x}dx)\, dy\, dz$$

$$\frac{dv_x}{dx} = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\underline{v} - \underline{v}\times\operatorname{rot}\underline{v} = \underline{g} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\underline{p}}\ \text{: Euler-Gleichung}$$

Wenn $\rho = \rho(p)$, $-\dfrac{1}{\rho(p)}\operatorname{grad}p = -\operatorname{grad}\displaystyle\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho(p)}$

Wenn ρ = const die unbekannte Variablen sind: v_x, v_y, v_x, p

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$ Vier unbekannte Variablen, vier Gleichungen.

Bernoulli Gleichung

Reibungsfreie Strömung: $\boxed{\mu = 0}$

$$\underbrace{\int_1^2 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s}}_{I} + \underbrace{\int_1^2 \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} d\underline{s}}_{II} - \underbrace{\int_1^2 \underline{v} \times \operatorname{rot} \underline{v}\, d\underline{s}}_{III} = \underbrace{\int_1^2 \underline{g} d\underline{s}}_{IV} - \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p\, d\underline{s}}_{V}$$

a) Da $\int_1^2 \operatorname{grad} f\, d\underline{s} = f_2 - f_1$ Integral II $= \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2}$

b) Wenn $\underline{g}$ = - gradU Integral IV = – $(U_2 - U_1)$

c) Wenn die Strömung stationär ist: $\left(\dfrac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \underline{0}\right)$ Integral I =0

d) Intergral III = 0, wenn
   a. $\underline{v}$ = 0 ruhende Fluiden
   b. rot$\underline{v}$ = 0 Potentialströmung
   c. d$\underline{s}$ fällt in die Ebene bestimmt durch $\underline{v}$ und rot$\underline{v}$ Vektor
   d. d$\underline{s}$ || $\underline{v}$ (Integrieren entlang Stromlinie)
   e. d$\underline{s}$ || rot$\underline{v}$ (Integrieren entlang Wirbellinie)

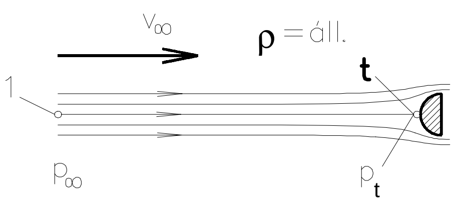
e) Wenn $\rho = \text{const}$, Integral V = $-\dfrac{p_2 - p_1}{\rho}$, wenn $\rho = \rho(p)$, Integral V = $\displaystyle\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho(p)}$

Im Fall von reibungsfreier stationärer Strömung von inkompressiblen Fluiden ($\rho = \text{const.}$), wenn $\underline{g}$ = - gradU und wenn das Integrieren entlang Stromlinie erfolgt:

$$\boxed{\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + U_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + U_2}$$

Die Bernoullische Summe = const entlang der Stromlinie.

Statischer, dynamischer und Gesamtdruck



$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + U_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + U_2$$

Im Staupunkt $\underline{v}$ = 0, deshalb $p_\infty + \dfrac{\rho}{2} v_\infty^2 = p_t$

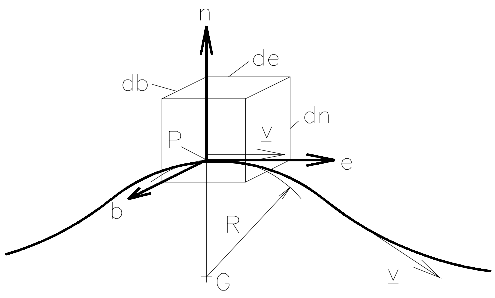
$p_d = \dfrac{\rho}{2} v_\infty^2$: dynamischer Druck

p_∞ : statischer Druck

p_t Gesamtdruck, Staudruck

Im Fall von reibungsfreier, stationärer Strömung von inkompressiblen Fluiden und bei Vernachlässigung der Kraftfelder ist der Gesamtdruck entlang Stromlinien konstant.

Euler Gleichung in "natürlichem" Koordinatensystem



Stationäre Strömung reibungsfreier (μ=0) Fluide.

e (Bahnrichtung) Koordinate ist Tangente der Stromlinie (in stationärer Strömung auch Bahnlinie),
n (Hauptnormalenrichtung) steht senkrecht auf die Stromlinie und passiert den Krümmungsmittelpunkt der Stromlinie,
b (Binormalenrichtung) ist senkrecht auf e und n.

Bahnrichtung **e**

Die Kraft die auf ein infinitesimales Flüssigkeitsteilchen mit Kantenlängen db, dn und de (Masse: $dm = \rho dbdnde$) in die e Richtung wirkt:

$$dF_e = pdbdn - \left[p + \left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)de\right]dbdn + \rho dbdndeg_e ,$$

wo g_e die e Komponente des Kraftfeldes ist.

Da die Strömung stationär ist, existiert nur konvektive Beschleunigung, und da

$$v_n = v_b = 0\,,\; a_{conv} = v\frac{\partial v}{\partial e}\ .$$

$$\rho dbdndev\frac{\partial v}{\partial e} = -\frac{\partial p}{\partial e}dedbdn + \rho dbdndeg_e\ .$$

$$\boxed{v\frac{\partial v}{\partial e} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial e} + g_e}$$

Hauptnormalenrichtung **n**

$dm\dfrac{v^2}{R}$ Zentripetalkraft ist nötig, wenn sich die Masse dm mit Geschwindigkeit v entlang einer Stromlinie mit dem Krümmungsradius R bewegt:

$$-\rho dedbdn\frac{v^2}{R} = pdbde - \left[p + \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)dn\right]dbde + \rho dedbdng_n$$

$$\boxed{-\frac{v^2}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + g_n}.$$

Binormalenrichtung b $\boxed{0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b} + g_b}$.

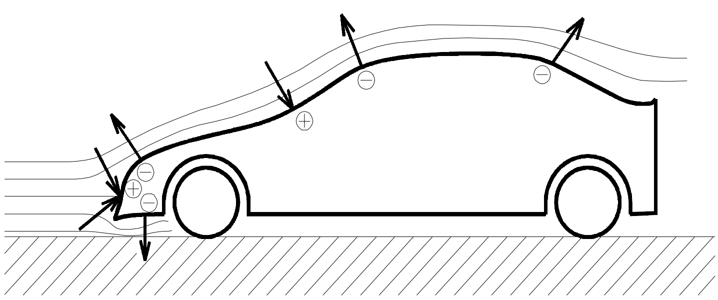
Falls in der Gleichung der Hauptnormalenrichtung g_n unberücksichtigt ist:

$$\boxed{\frac{v^2}{R} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$$

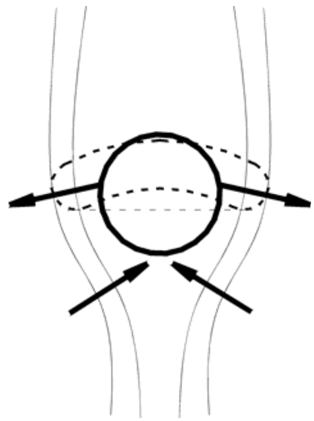
Folgerungen:

a) wenn die Stromlinien parallele Geraden sind (R=∞), verändert sich der Druck senkrecht auf die Stromlinien nicht,

b) wenn die Stromlinien gekrümmt sind, nimmt der Druck senkrecht auf die Stromlinien und auswärts vom Krümmungsmittelpunkt zu.



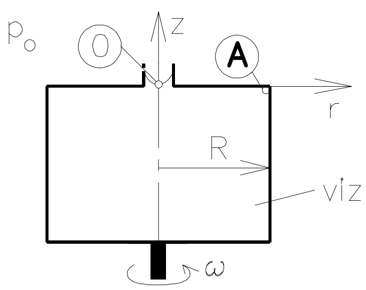
Pkw



Regentropfen

6. Anwendungen

Der rotierende Behälter



In absolutem Koordinatensystem rotiert das Wasser als Starrkörper mit Winkelgeschwindigkeit $\omega[1/s]$.

$p_A - p_0 = ?$

3 verschiedene Lösungsmöglichkeiten:

a) im mitrotierenden Koordinatensystem: Hydrostatik
b) im absoluten Koordinatensystem: Bernoulli-Gleichung;
c) im absoluten Koordinatensystem: Euler Gleichung in natürlichem Koordinatensystem

ad a) $p_A - p_0 = -\rho(U_A - U_0) = -\rho\left(-\frac{R^2\omega^2}{2} - 0\right) = \rho\frac{R^2\omega^2}{2}$

ad b) $\int_0^A \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\underline{s} + \int_0^A \text{grad}\frac{v^2}{2} d\underline{s} - \int_0^A \underline{v}\times \text{rot}\underline{v} d\underline{s} = \int_0^A \underline{g} d\underline{s} - \int_0^A \frac{1}{\rho}\text{grad} p d\underline{s}$.

I II III IV V

stationäre Strömung: Integral I =0, Integral II = $\left(v_A^2 - v_0^2\right)/2$, Integral III $\neq 0$ da $\text{rot}\underline{v} \neq 0$ und Punkte 0 und A liegen nicht auf der gleichen Stromlinie. Integral IV =0, da $\underline{g} \perp d\underline{s}$ Integral V = $-\left(p_A - p_0\right)/\rho$, da ρ = const.

$$p_A - p_0 = \rho\int_0^A \underline{v}\times \text{rot}\underline{v} d\underline{s} - \rho\frac{v_A^2 - v_0^2}{2}.$$

$|\underline{v}| = \omega r$ und $\left(\text{rot}\underline{v}\right)_z = dv/dr + v/r \Rightarrow \left(\text{rot}\underline{v}\right)_z = 2\omega$. $\underline{v}$, $\text{rot}\underline{v}$ und $d\underline{s}$ Vektoren stehen senkrecht aufeinander, und $|d\underline{s}| = dr$, weiterhin $v_A = R\omega$ und $v_0 = 0$:

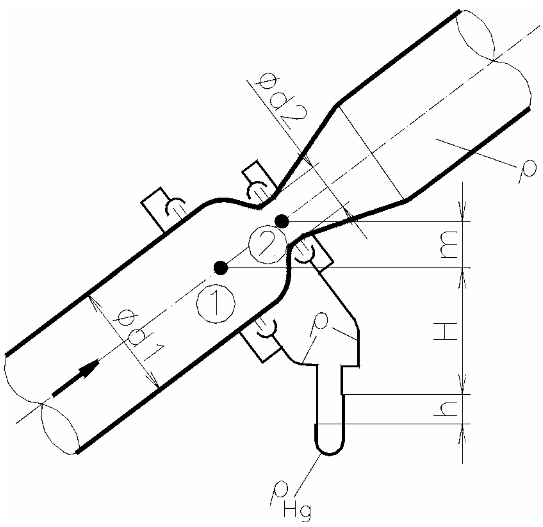
$$p_A - p_0 = \rho\int_0^R (r\omega)2\omega dr - \rho\frac{R^2\omega^2}{2} = \rho R^2\omega^2 - \rho\frac{R^2\omega^2}{2} = \rho\frac{R^2\omega^2}{2}.$$

ad c) $\frac{v^2}{R} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} - g_n$

R = r, dn = dr (Stromlinien sind konzentrische Kreise), $g_n = 0$

$$\int_{p_0}^{p_A} dp = \int_0^R \rho\frac{v^2}{r} dr = \int_0^R \rho r\omega^2 dr \Rightarrow p_A - p_0 = \rho\frac{R^2\omega^2}{2}$$

Messung des Volumenstromes mit Venturi–Rohr



h [m]= f(q_v) = ? ρ und ρ_{Hg}: Dichte des Wassers und Quecksilbers

$$\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+U_1=\frac{v_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+U_2$$

U-Rohr Manometer:

$$p_1+\rho g(H+h)=p_2+\rho g(m+H)+\rho_{Hg}gh$$

$$p_1-p_2=(\rho_{Hg}-\rho)gh+\rho gm\,.$$

$$\frac{v_2^2}{2}-\frac{v_1^2}{2}=\frac{v_1^2}{2}\left[\left(\frac{v_2^2}{v_1^2}\right)^2-1\right]=\frac{p_1-p_2}{\rho}-gm=\frac{\rho_{Hg}-\rho}{\rho}gh$$

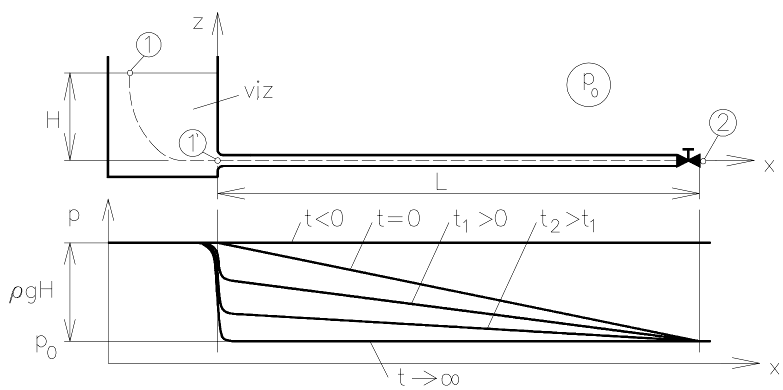
Kontinuitätsgleichung:

$v_1A_1 = v_2A_2 \Rightarrow v_2/v_1 = (d_1/d_2)^2$

$$v_1=\sqrt{\frac{\left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho}-1\right)2gh}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1}}$$

Volumenstrom: $\boxed{q_v=\frac{d_1^2\pi}{4}v_1=K\sqrt{h}}$

Instationärer Ausfluss aus einem Behälter



.

$$\int_1^2\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}d\underline{s}+\int_1^2 \operatorname{grad}\frac{v^2}{2}d\underline{s}-\int_1^2\underline{v}\times\operatorname{rot}\underline{v}d\underline{s}=\int_1^2\underline{g}d\underline{s}-\int_1^2\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p\,d\underline{s}$$

I II III IV V

$$\int_1^2\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}d\underline{s}+\left[\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+U\right]_1^2=0$$

In Punkt 1 $p_1=p_0$, $z=H$, v = 0. In Punkt 2 $p_2=p_0$. $z=0$, die Geschwindigkeit ist $v_2=v(t)$.

$$\int_1^2\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}d\underline{s}=\int_1^{1'}\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}d\underline{s}+\int_{1'}^2\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}d\underline{s}\,.$$

wo $\partial\underline{v}/\partial t$ ist der Beschleunigungsvektor, $|\partial\underline{v}/\partial t|$ ist mit a bezeichnet, $\partial\underline{v}/\partial t \parallel d\underline{s}$, die Vektoren $\partial\underline{v}/\partial t$ und $d\underline{s}$ zeigen in die gleiche Richtung.

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \;\Rightarrow\; a_1 A_1 = a_2 A_2$$

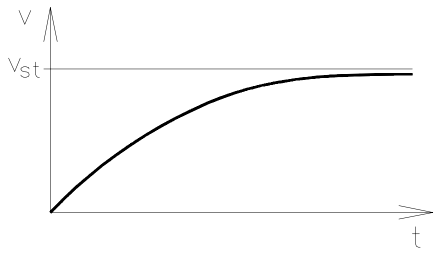
$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}\, d\underline{s} = \int_{1'}^2 a\,ds = aL$$

$$\frac{dv}{dt}L + \frac{v^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + gH$$

Im Falle stationärer Strömung $\left(\frac{dv}{dt} = 0\right)$ $\frac{v_{st}^2}{2} = gH$

$$\frac{dv}{v_{st}^2 - v^2} = \frac{dt}{2L}. \quad \int_0^{v/v_{st}} \frac{d\frac{v}{v_{st}}}{1-\left(\frac{v}{v_{st}}\right)^2} = \frac{v_{st}}{2L}\int_0^t dt.$$

$$\operatorname{arth}\frac{v}{v_{st}} = \frac{t v_{st}}{2L} \qquad \tau = \frac{2L}{v_{st}} \qquad \boxed{\frac{v}{v_{st}} = \operatorname{th}\frac{t}{\tau}} \text{ wo } v_{st} = \sqrt{2gH}.$$



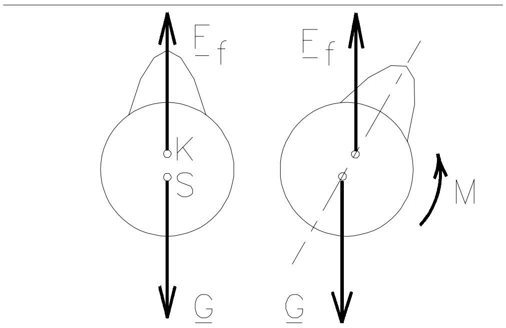
Schwimmen von Körpern

Volumen des Körpers: ΔV, die Druckverteilung in der Flüssigkeit ist durch $\operatorname{grad} p$ charakterisiert.
Druckkraft: $\Delta\underline{F} \cong -\operatorname{grad} p\, \Delta V$, $\Delta\underline{F} = -\rho\underline{g}\Delta V$.
Der hydrostatische Auftrieb im Schwerekraftfeld = Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.
Der hydrostatische Auftriebsvektor passiert den Mittelpunkt des verdrängten Volumens.

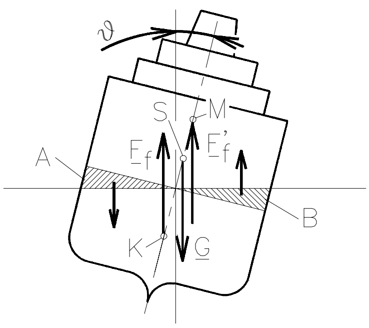
Ein Körper schwimmt, wenn seine Durchschnittsdichte ist gleich oder kleiner als die Dichte der Flüssigkeit.

<u>Stabilität des schwimmenden Körpers</u>: Unterseeboote und Schiffe.

Wenn der Schwerpunkt S unter dem Mittelpunkt des verdrängten Volumens K liegt, entsteht ein Drehmoment M, das den Neigungswinkel reduziert. Das U-Boot ist in stabilem Zustand.



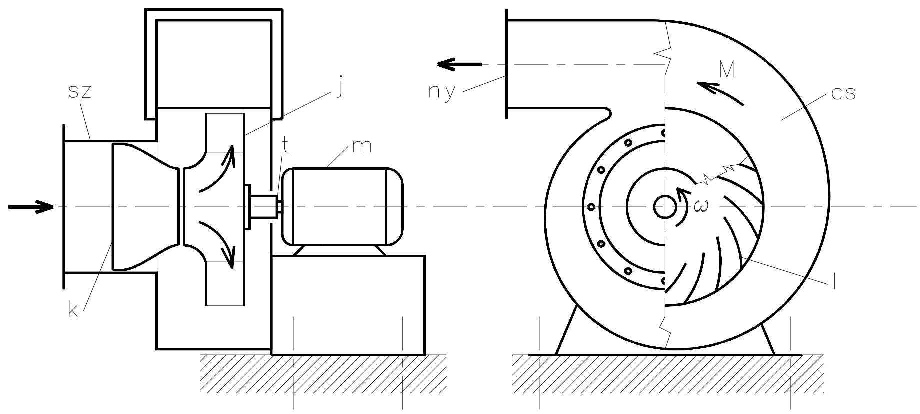
Falls ein Drehmoment M entsteht, das den Neigungswinkel reduziert, Schiffe können bis einem gewissen Neigungswinkel stabil bleiben auch dann, wenn sich der Schwerpunkt S über dem Mittelpunkt des verdrängten Volumens K befindet.



Bei der Neigung des Schiffes verändern sich die Größe des Gewichtes und Auftriebes nicht, aber die Angriffslinie des Auftriebes verschiebt sich. (Als Folge der Neigung taucht ein keilförmiger Teil des Schiffskörpers (A) empor, und Volumen B versinkt. So entsteht ein Kräftepaar, das den Auftriebsvektor verschiebt.)

Die neue Angriffslinie passiert die Symmetrieebene des Schiffes in Punkt M (Metazentrum). Wenn der Schwerpunkt S unter dem Metazentrum M liegt, entsteht ein Drehmoment M, das den Neigungswinkel reduziert. So ist das Schiff in stabilem Zustand.

Radialventilator, Eulersche Turbinengleichung



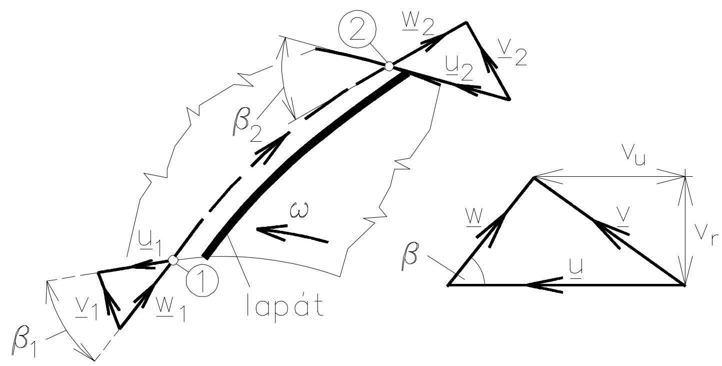
sz: Saugstutzen, k: Saugtrichter, j: Laufrad, l: Schaufel, cs: Spiralgehäuse, ny: Druckstutzen, t: Achse, m: Elektromotor, M: Drehmoment, ω: Winkelgeschwindigkeit.

Die Aufgabe der Ventilatoren ist den Gesamtdruck des Gases zu erhöhen:

$$\Delta p_g = p_{dg} - p_{sg} = \left(p + \frac{\rho}{2}v^2\right)_d - \left(p + \frac{\rho}{2}v^2\right)_s$$

nutzbare Leistung: $\boxed{P = q_v \Delta p_g}$, wo q_v [kg/m³] der Volumenstrom ist.

Bernoulli Gleichung im relativen Koordinatensystem (stationäre Strömung inkompressibler und reibungsfreier Fluide) zwischen den Punkten 1 und 2 die auf der gleichen Stromlinie liegen:



$$\int_1^2 \frac{\partial \underline{w}}{\partial t} d\underline{s} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} - \int_1^2 \underline{w} \times \mathrm{rot}\,\underline{w}\,d\underline{s} = \int_1^2 \underline{g}\,d\underline{s} - \int_1^2 \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}p\;d\underline{s}\,.$$

I II III IV V

$$g = g_c + \underline{g}_{Cor} = -\mathrm{grad}(U_g + U_c) + 2\underline{w} \times \underline{\omega},\; U_g \cong 0,\; U_c = -\frac{r^2\omega^2}{2}$$

$$\int_1^2 \underline{g}\,d\underline{s} = \left(\frac{r_2^2\omega^2}{2} - \frac{r_1^2\omega^2}{2}\right) + \int_1^2 2\underline{w} \times \underline{\omega}\,d\underline{s}\,,$$

Da $\underline{v} = \underline{w} + \underline{u}$, if $\mathrm{rot}\,\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \mathrm{rot}\,\underline{w} = -\mathrm{rot}\,\underline{u}$, und $|\underline{u}| = r\omega$ rot $\underline{u} = 2\underline{\omega}$.

$$-\int_1^2 \underline{w} \times \mathrm{rot}\,\underline{w}\,d\underline{s} = -\int_1^2 \underline{w} \times (-2\underline{\omega})\,d\underline{s} = \int_1^2 2\underline{w} \times \underline{\omega}\,d\underline{s}$$

Schließlich:

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - \frac{r_1^2\omega^2}{2} = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - \frac{r_2^2\omega^2}{2}$$

$$\underline{w} = \underline{v} - \underline{u} \Rightarrow w^2 = v^2 + u^2 - 2\underline{u}\,\underline{v}$$

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} - \underline{v}_2\underline{u}_2 - \frac{r_2^2\omega^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} + \underline{v}_1\underline{u}_1 + \frac{r_1^2\omega^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0.$$

$$u_1 = r_1\omega$$

$$\Delta p_g = p_{2g} - p_{1g} = \left(p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2\right) - \left(p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2\right) = \rho(\underline{v}_2\underline{u}_2 - \underline{v}_1\underline{u}_1).$$

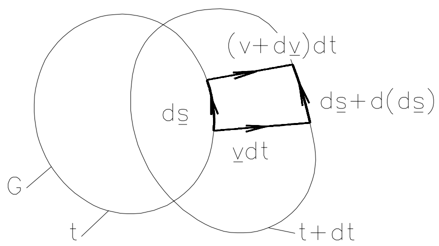
$\underline{v}_2 \underline{u}_2 = v_{2u} u_2$,

$$\boxed{\Delta p_{g\,id} = \rho (v_{2u} u_2 - v_{1u} u_1)}$$

Wenn $\underline{v}_{1u} = 0 \Rightarrow \Delta p_{g\,id} = \rho v_{2u} u_2$.

7. Wirbelsätze: Thomsonscher Satz und Helmholtzsche Sätze

Thomsonscher Satz (reibungsfreie Fluiden)



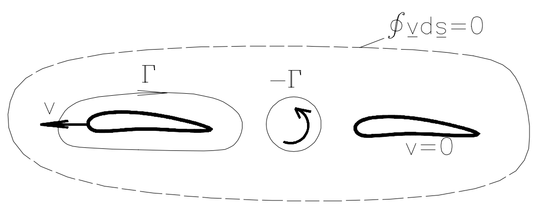
Zirkulation: $\Gamma = \oint_G \underline{v}\, d\underline{s}$. Zeitliche Veränderung der Zirkulation entlang einer geschlossenen flüssigen Linie $\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_G \underline{v}\, d\underline{s} = ?$ Falls $\underline{g} = -\text{grad}U$ und ρ=const, oder ρ=ρ(p), mit Euler Gleichung:

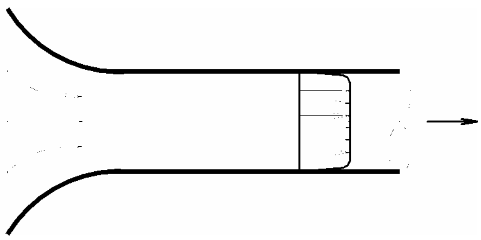
$$\boxed{\frac{d}{dt} \oint_G \underline{v} d\underline{s} = 0}$$

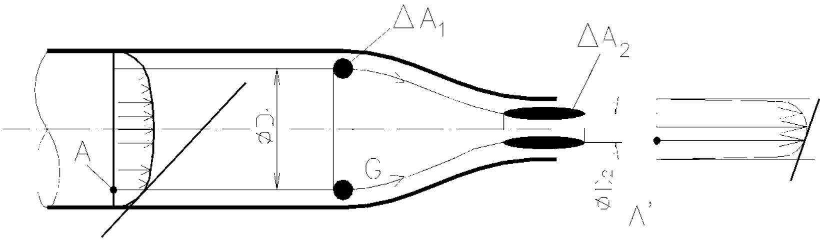
In der Strömung von reibungsfreien und inkompressiblen Fluiden in potentialem Kraftfeld entsteht keine Rotation.

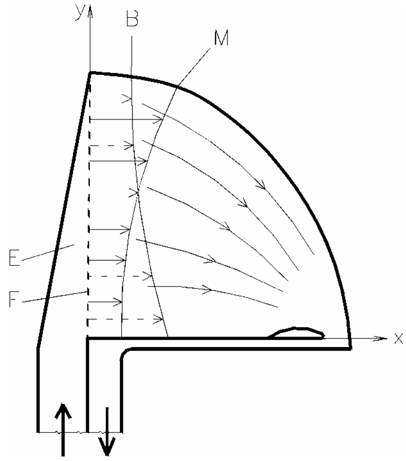
Anwendungen:

Anfahr- und Stoppwirbel (Wirbelbildung), Erstellung gleichmäßigeren Geschwindigkeitsverteilungen, Strömung in Wasserbehälter.







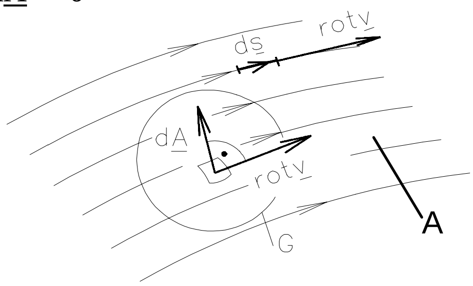


$$\Gamma = \oint_G \underline{v}d\underline{s} = \int_A \mathrm{rot}\,\underline{v}\,d\underline{A} \Rightarrow \frac{(\mathrm{rot}\,\underline{v})_2}{(\mathrm{rot}\,\underline{v})_1} = \frac{\Delta A_1}{\Delta A_2} = \frac{D_2}{D_1}\,.\,(\mathrm{rot}\,\underline{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}, \; \partial v_y/\partial x<0 \Rightarrow \partial v_x/\partial y<0.$$

I. Helmholtzscher Satz

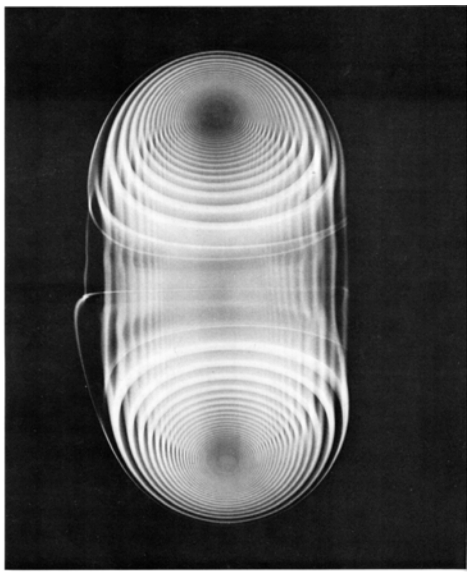
$\boxed{\mu = 0}$

Flüssige Wirbellinie: $\mathrm{rot}\,\underline{v} \times d\underline{s} = 0$,
Flüssige Wirbelfläche: $\mathrm{rot}\,\underline{v} \times d\underline{A} = 0$



Da $\frac{d}{dt}\oint_G \underline{v}d\underline{s} = 0$, eine flüssige Wirbelfläche bleibt Wirbelfläche.

Zwei Wirbelflächen schneiden einander entlang einer Wirbellinie.

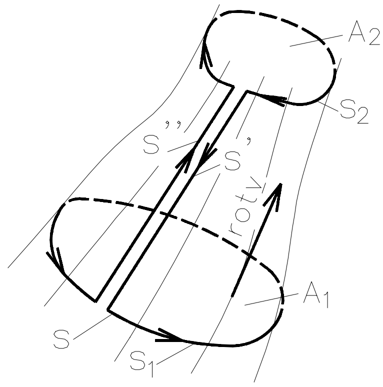


Eine Wirbellinie, die als Schnittlinie zweier Wirbellinien betrachtet werden kann, besteht aus dem gleichen Flüssigkeitsteilchen.

Konsequenz: Der Wirbel in einem Rauchring oder in einem Rauchfaden eines Schornsteines bewahrt den Rauch.

II. Helmholtzscher Satz

Flüssiges Wirbelrohr (Wirbelfaden)



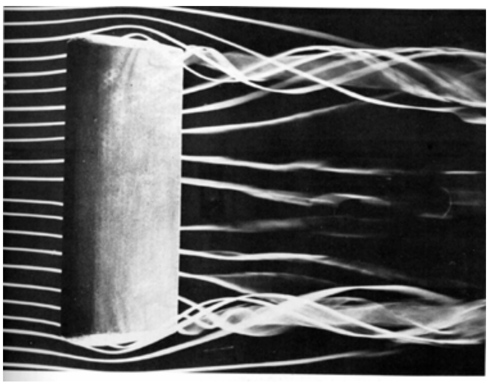
$$\oint_S \underline{v}d\underline{s} = \oint_{S_1} \underline{v}d\underline{s} + \oint_{S_2} \underline{v}d\underline{s} = 0$$

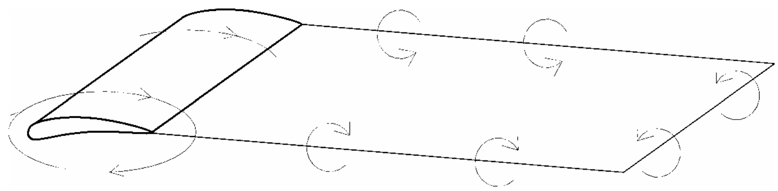
$$\oint_{S_1} \underline{v}d\underline{s} = \oint_{S_2} \underline{v}d\underline{s}\,,$$

$$\int_{A_1} rot\underline{v}d\underline{A} = \int_{A_2} rot\underline{v}d\underline{A}\,.$$

$\int_A rot\underline{v}d\underline{A}$ **ist konstant in allen Querschnitten entlang des Wirbelrohres und verändert sich nicht in der Zeit.**

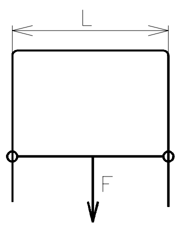
Konsequenz: Das Wirbelrohr ist entweder eine geschlossene Linie (ein Ring) oder es endet an der Grenze des Strömungsfeldes. Andernfalls A $\Rightarrow$ 0, rot$\underline{v} \Rightarrow \infty$.



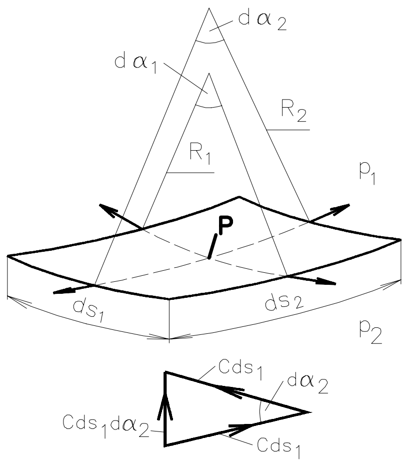


Induzierter Wirbel am Flügelende. Fliegen der Wildgänse in V-Formation.
Wirbelfaden nach Eröffnung des Ablaufes. Tornado.

8. Oberflächenspannung

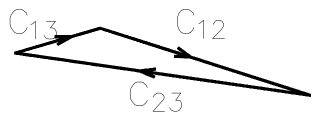


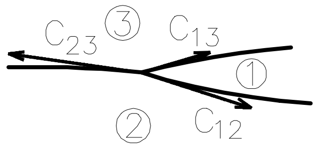
$F = 2LC$, wo C[N/m] Kapillarkonstante. For Wasser gegen Luft $C = 0.072\,[N/m]$.



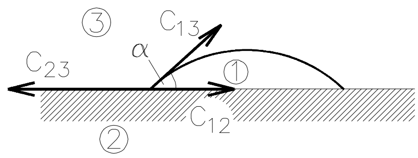
$(p_1 - p_2)ds_1 ds_2 = Cds_1 d\alpha_2 + Cds_2 d\alpha_1$. $\boxed{\Delta p = p_1 - p_2 = C\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$,

Für einen kugelförmigen Tropfen $R_1 = R_2 = R \Rightarrow \Delta p = 2C/R$,
für kugelförmige Blase: $\Delta p = 4C/R$



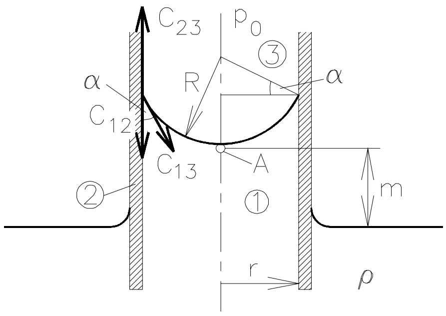


Wenn $|C_{23}| > |C_{12}| + |C_{13}|$, die Flüssigkeit 1 breitet sich auf der Oberfläche von Flüssigkeit 2 aus. (z.B. Öl über Wasser).



$C_{23} ds = C_{12} ds + C_{13} \cos\alpha ds$. $\cos\alpha = (C_{23} - C_{12})/C_{13}$. $C_{23} > C_{12} \Rightarrow \alpha < 90°$, $\alpha > 90°$ (Quecksilber) Wenn $|C_{23}| > |C_{12}| + |C_{13}|$, die Flüssigkeit breitet sich auf der Oberfläche Des Festkörpers aus. (z.B. Petroleum "kriecht" aus der geöffneten Flasche).

Kapillarerhebung



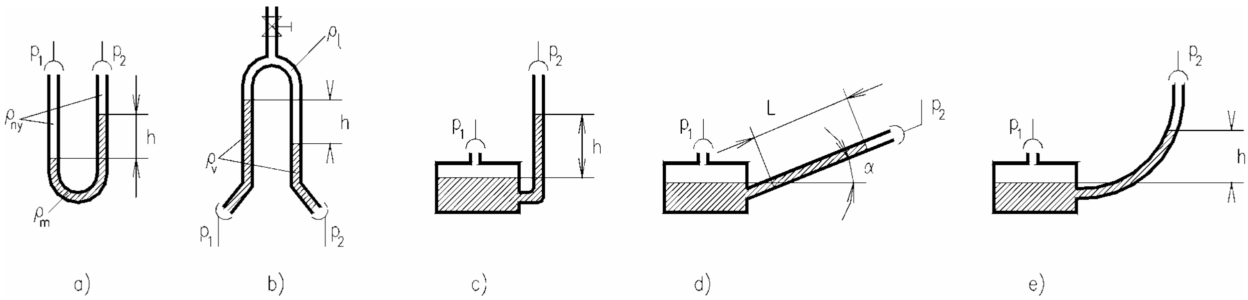
$p_0 - p_A = 2C_{13}/R = 2C_{13}\cos\alpha/r$, $p_0 - p_A = \rho g m$ $\boxed{m = \dfrac{2C_{13}}{\rho g r}\cos\alpha}$

Bei Quecksilber erfolgt Kapillarsenkung.

9. Messungen

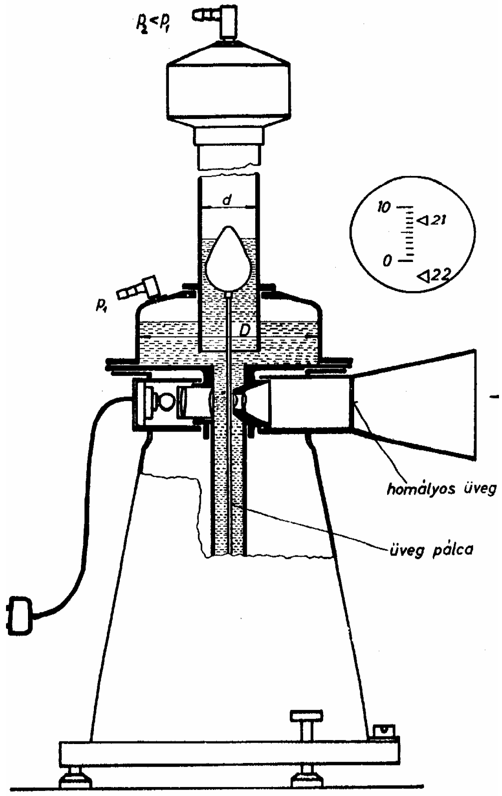
Manometer (für Messung des Druckunterschiedes), Mikromanometer

U-Rohr Manometer $p_1 - p_2 = (\rho_m - \rho_t)\,g\,h$, "umgekehrtes" U-Rohr Manometer $p_1 - p_2 = (\rho_w - \rho_a)\,g\,h$, Schrägrohrmanometer $L = H/\sin\alpha$, relativer Fehler: $e = \Delta s/L = (\Delta s/H)\sin\alpha$, Mikromanometer mit gekrümmten Rohr (e = const.):

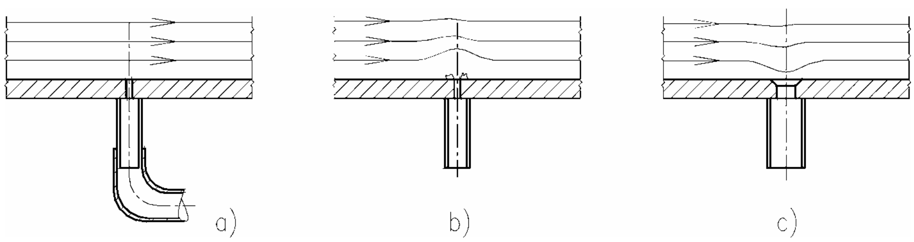


$$p_1 - p_2 = (\rho_m - \rho_t)gh.$$

Betz-Mikromanometer



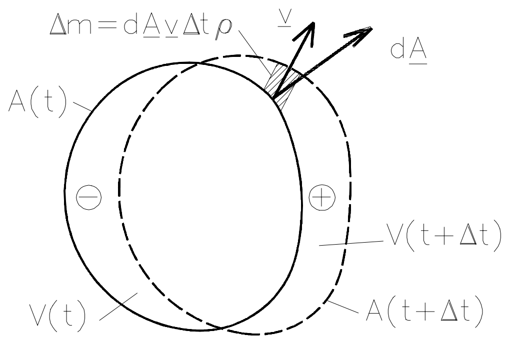
Druckbohrungen – (b, c falsch)



10. Der Impulssatz und seine Anwendung

Der Impulssatz

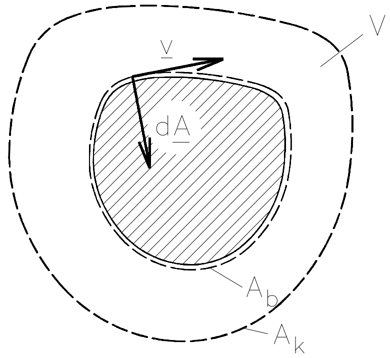
$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)}\rho\underline{v}dV=\int_{V(t)}\rho\underline{g}dV-\int_{A(t)}pd\underline{A} \qquad \boxed{\mu=0}$$



$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)}\rho\underline{v}dV=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{V(t+\Delta t)}(\rho\underline{v})_{t+\Delta t}dV-\int_{V(t)}(\rho\underline{v})_t dV\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V(\rho\underline{v})dV+\int_A\underline{v}\rho(\underline{v}d\underline{A})=\int_V\rho\underline{g}dV-\int_A pd\underline{A}$$ wo V der Kontrollbereich ist.

<u>Festkörper im Kontrollbereich</u>



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V(\rho\underline{v})dV+\int_{A_k}\underline{v}\rho(\underline{v}d\underline{A})+\int_{A_b}\underline{v}\rho(\underline{v}d\underline{A})=\int_V\rho\underline{g}dV-\int_{A_k}pd\underline{A}-\int_{A_b}pd\underline{A}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V(\rho\underline{v})dV+\int_A\underline{v}\rho(\underline{v}\,d\underline{A})=\int_V\rho\underline{g}dV-\int_A p\,d\underline{A}-\underline{R}$$

$\underline{R}[N]$ ist die Kraft die auf den im Kontrollbereich befindlichen Körper wirkt.

Bei stationärer Strömung:

$$\int_A\underline{v}\rho(\underline{v}d\underline{A})=\int_V\rho\underline{g}dV-\int_A pd\underline{A}-\underline{R}$$

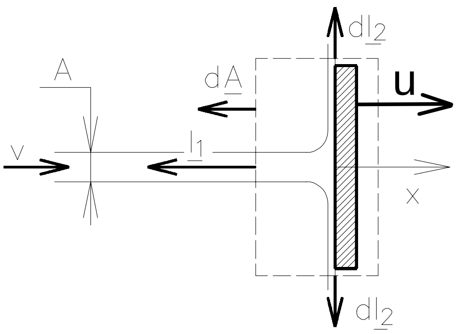
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_V(\rho\underline{v})dV+\int_A\underline{v}\rho(\underline{v}d\underline{A})=\int_V\rho\underline{g}dV-\int_A pd\underline{A}-\underline{R}+\underline{S}}$$ wo $\underline{S}$ die Reibungskraft ist.

Drallsatz

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_V\underline{r}\times(\rho\underline{v})dV+\int_A\underline{r}\times\underline{v}\rho(\underline{v}d\underline{A})=\int_V\underline{r}\times\rho\underline{g}dV-\int_A\underline{r}\times pd\underline{A}-\underline{M}+\underline{M}_s}$$

Anwendungen des Impulssatzes

Ruhende und sich bewegende ebene Platte



Schritte der Anwendung des Impulssatzes

1. Bestimmung des Kontrollbereiches: Festkörper im Kontrollbereich, die Fläche des Kontrollbereiches sind entweder ⊥ oder || zu den Geschwindigkeits-vektoren.

2. Vereinfachung der Gleichung

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V(\rho\underline{v})dV}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\int_A\underline{v}\rho(\underline{v}d\underline{A})}_{\mathrm{II}}=\underbrace{\int_V\rho\underline{g}dV}_{\mathrm{III}}-\underbrace{\int_A pd\underline{A}}_{\mathrm{IV}}-\underbrace{\underline{R}}_{\mathrm{V}}+\underbrace{\underline{S}}_{\mathrm{VI}}$$

$$\int_A\underline{v}\rho(\underline{v}d\underline{A})=-\underline{R}$$

3. Bestimmung der Integrale

$$\underline{I}_1=\int_{A_1}\underline{v}\rho(\underline{v}d\underline{A})=\rho v_1^2A_1\left(-\underline{v}_1/|\underline{v}|_1\right),$$

$$d\underline{I}_2=\rho v_2^2dA_2\frac{\underline{v}_2}{|\underline{v}|_2}$$

$$|\underline{I}|=\rho v^2A\,.$$

4. Kräftegleichgewicht in Koordinatenrichtungen

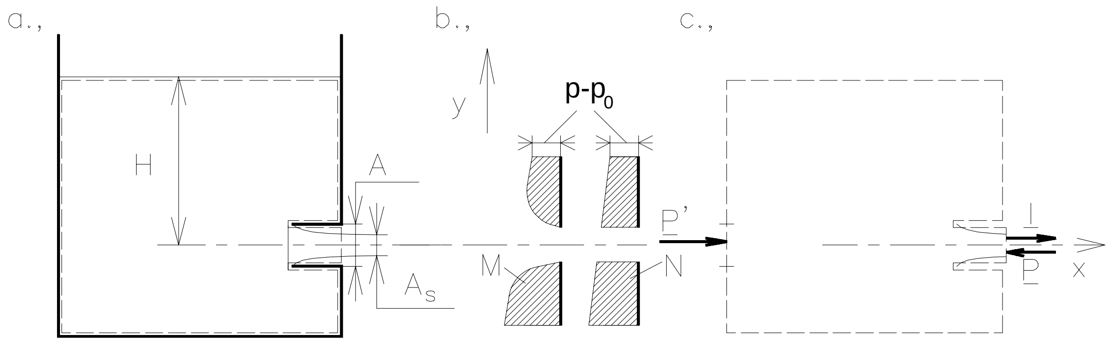
$$-I_1=-R_x\ \text{azaz}-\rho v_1^2A_1=-R_x=-R$$

$$R=\rho v_1^2A_1$$

Wenn die Platte sich bewegt: $\underline{u} > 0$

anstatt $\underline{v}_1$ $\underline{w}_1 = \underline{v}_1 - \underline{u} \Rightarrow R = \rho(v_1 - u)^2 A_1$.

Borda-Mündung, Kontraktion des Flüssigkeitstrahles



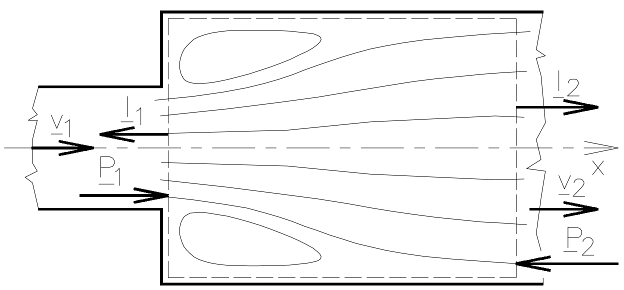
$$\alpha = A_S / A \quad v = \sqrt{2gH} \quad \alpha \text{ Kontraktionsziffer}$$

$$I = P' - P \Rightarrow \rho v^2 A_s = (p_0 + \rho g H)A - p_0 A$$

$$2\rho g H A_s = \rho g H A \Rightarrow \alpha = A_s / A = 0.5$$

Plötzliche Querschnittsänderung (Borda-Carnot-Übergang)

Druckveränderung in einem plötzlichen Borda-Carnot Übergang.



$$-I_1 + I_2 = P_1 - P_2, \quad -\rho v_1^2 A_1 + \rho v_2^2 A_2 = -p_2 A_2 + p_1 A_2 .$$

$$\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2, \quad (p_2 - p_1)_{BC} = \rho v_2 (v_1 - v_2), \quad (p_2 - p_1)_{id} = \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right)$$

$$\Delta p'_{BC} = (p_2 - p_1)_{id} - (p_2 - p_1)_{BC} = \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right) - \rho v_2 (v_1 - v_2)$$

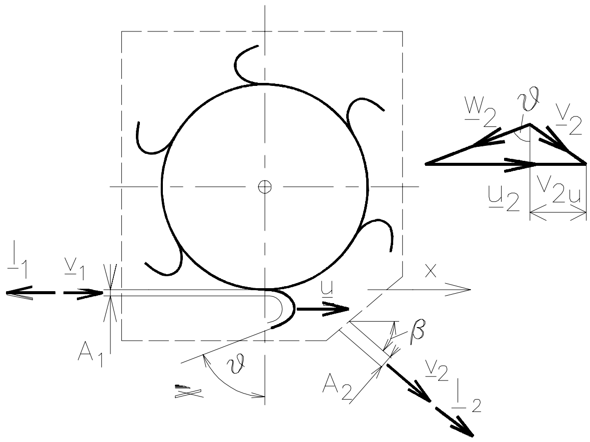
<u>Carnotsche Stoßverlust</u>

$$\Delta p'_{BC} = \frac{\rho}{2}(v_1 - v_2)^2$$

<u>Die auf Borda-Carnot Erweiterung wirkende Kraft</u>

$$\underline{R} = (p_0 - p_1)(A_2 - A_1) = \rho v_2 (v_1 - v_2)(A_2 - A_1)$$

Die Pelton-Turbine



$$-I_1 + I_{2u} = -R_u\,,\quad I_1 = \rho v_1^2 A_1, I_{2u} = \rho v_2^2 A_2 \cos\beta\,,\ \rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2$$

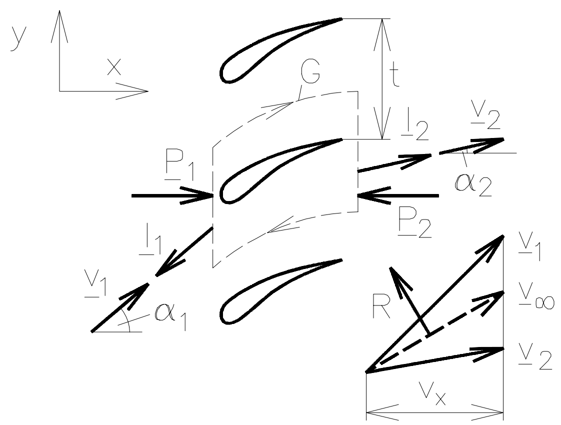
$$R_u = \rho v_1 A_1 (v_1 - v_{2u}),\ \text{wo}\ v_{2u} = v_2 \cos\beta$$

$$v_{2u} = u - w_2 \sin\vartheta\,,\ w_2 = w_1,\ w_1 = v_1 - u\,,\ R_u = \rho v_1 A_1 (v_1 - u)(1 + \sin\vartheta)$$

$$R_u = \rho v_1 A_1 (v_1 - u)(1 + \sin\vartheta)\ ,\ \ \vartheta = 90°\ \ \frac{\partial P}{\partial u} = 2\rho v_1 A_1 [(v_1 - u) - u] = 0\,,\ u = v_1 / 2$$

$$P_{max} = \rho v_1 A_1 v_1^2 / 2$$

Die auf ein Element des unendlichen Flügelgitters wirkende Kraft, Satz von Kutta und Joukovsky



$$-I_{1x} + I_{2x} = P_1 - P_2 - R_x\,,\quad -I_{1y} + I_{2y} = -R_y$$

$$I_1 = \rho v_x t v_1,\ I_2 = \rho v_x t v_2\,,\ P_1 = p_1 t \quad P_2 = p_2 t\,,$$

$$R_x = (p_1 - p_2)t + \rho v_x t(v_1 \cos\alpha_1 - v_2 \cos\alpha_2) \Rightarrow R_y = \rho v_x t(v_{1y} - v_{2y}).$$

$$v_{1x} = v_{2x} \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \frac{\rho}{2}\left(v_{2y}^2 - v_{1y}^2\right) \Rightarrow R_x = \frac{\rho}{2}\left(v_{2y} - v_{1y}\right)t\left(v_{2y} + v_{1y}\right)$$

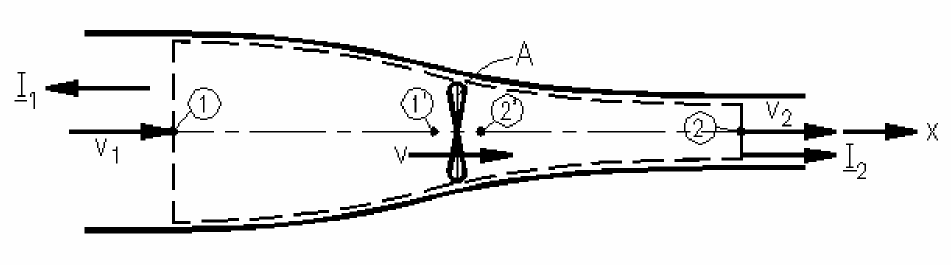
$$\Gamma = t\left(v_{1y} - v_{2y}\right) \Rightarrow R_x = -\rho\,\Gamma\frac{v_{1y} + v_{2y}}{2}, \quad R_y = \rho\,\Gamma\,v_x,$$

$$\left|\underline{R}\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \rho\Gamma\sqrt{v_x^2 + \left(\frac{v_{1y} + v_{2y}}{2}\right)^2} \Rightarrow \left|\underline{R}\right| = \rho\left|\underline{v}_\infty\right|\Gamma\ [N/m]$$

$$t \to \infty, \ v_{1y} - v_{2y} \to 0 \quad \Gamma = t\left(v_{1y} - v_{2y}\right) = \text{áll.} \quad \underline{v}_2 \to \underline{v}_1 \to \underline{v}_\infty$$

$\boxed{\left|\underline{R}\right| = \rho\left|\underline{v}_\infty\right|\Gamma\ [N/m]}$ Satz von Kutta und Joukovsky

Der Propeller



v_1 = u, Geschwindigkeit $v_1 \Rightarrow v_2$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\rho\underline{v}\right)dV + \int_A \underline{v}\rho\left(\underline{v}d\underline{A}\right) = \int_V \rho\underline{g}dV - \int_A pd\underline{A} - \underline{R} + \underline{S}$$

I II III IV V VI

$$-I_1 + I_2 = -R_x \Rightarrow R_x = \rho v_1^2 A_1 - \rho v_2^2 A_2$$

Mit Verwendung der Kontinuität: $R_x = \rho v A(v_1 - v_2)$

Bernoulli-Gleichung 1 - 1’ und 2’- 2

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_{1'}^2}{2} + \frac{p_{1'}}{\rho} \qquad \frac{v_{2'}^2}{2} + \frac{p_{2'}}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}.$$

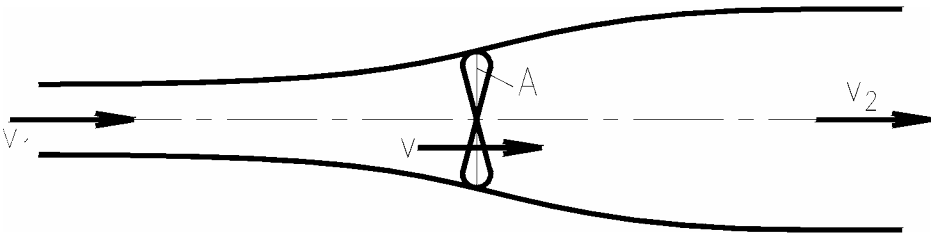
Da $p_1 = p_2$ und $v_{1'} = v_{2'} = v$ $\quad p_{1'} - p_{2'} = \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right)$.

$$R_x = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2)A = \rho v A(v_1 - v_2), v = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow R_x = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2)A$$

$P_u = v_1 R$ ist die Nutzleistung, $P_i = v\,R$ ist die eingeführte Leistung

$\eta_p = \frac{v_1 R}{vR} = \frac{v_1}{v} = \frac{2}{1 + v_2/v_1}$: der Propulsionswirkungsgrad.

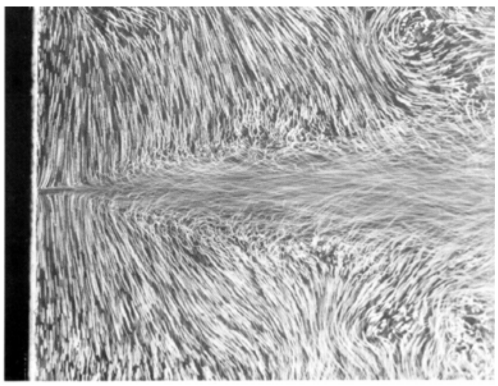
Windmotor, Windgenerator

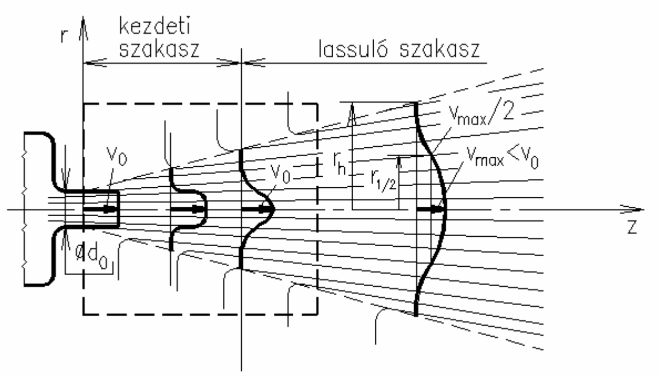


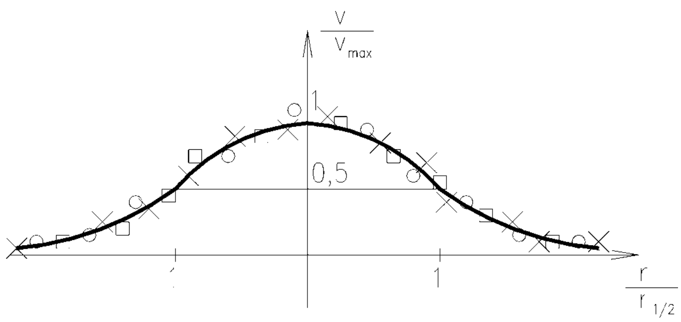
$$P=\rho A\frac{v_1+v_2}{2}(v_1^2-v_2^2)\Rightarrow \text{maximale Nutzeistung } \partial P/\partial v_2=0$$

$$\Rightarrow v_2=\frac{1}{3}v_1\Rightarrow\ P=\frac{16}{27}\rho A v_1^3$$

Strahlen





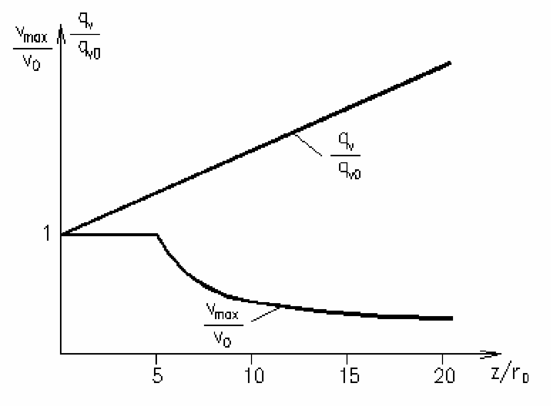


$r_h \sim z,\ \ r_{1/2}=k_1 z,$
$r_{1/2}/r_0 = k_1 z/r_0$

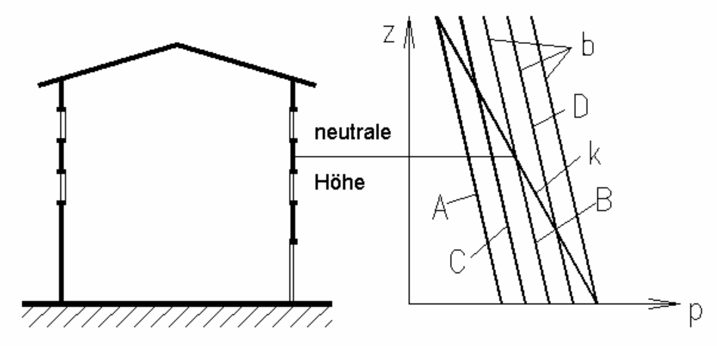
$$\int_A \underline{v}\rho\left(\underline{v}d\underline{A}\right)=0 \quad \Rightarrow \rho v_0^2 r_0^2\pi=\int_A \rho\, v^2\, 2\, r\,\pi\, dr \ \Rightarrow\ v_0^2 r_0^2 = v_{max}^2 r_{1/2}^2\, 2\int_0^{r_h/r_{1/2}} \frac{v^2}{v_{max}^2}\frac{r}{r_{1/2}}\, d\frac{r}{r_{1/2}}$$

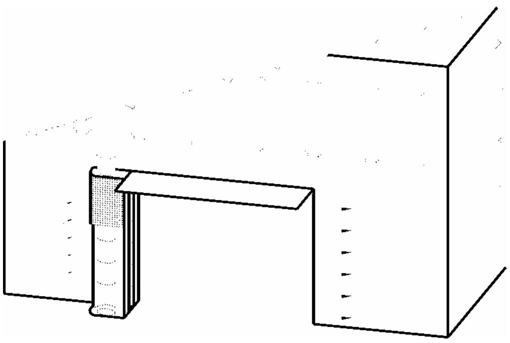
$$\frac{v_{max}}{v_0}=\frac{const}{\frac{r_{1/2}}{r_0}}\Rightarrow \frac{v_{max}}{v_0}=\frac{const'}{\frac{z}{r_0}}$$

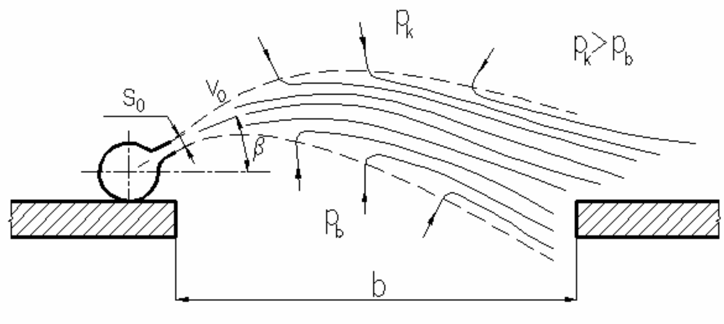
$$q_v=\int_0^{r_h} 2r\pi v\, dr = v_{max} r_{1/2}^2\, 2\pi\int_0^{r_h/r_{1/2}} \frac{v}{v_{max}}\frac{r}{r_{1/2}}\, d\frac{r}{r_{1/2}} \Rightarrow \frac{q_v}{q_{v0}}=const\frac{v_{max}}{v_0}\frac{r_{1/2}^2}{r_0^2}\ \ \Rightarrow \frac{q_v}{q_{v0}}=const'\frac{z}{r_0}$$

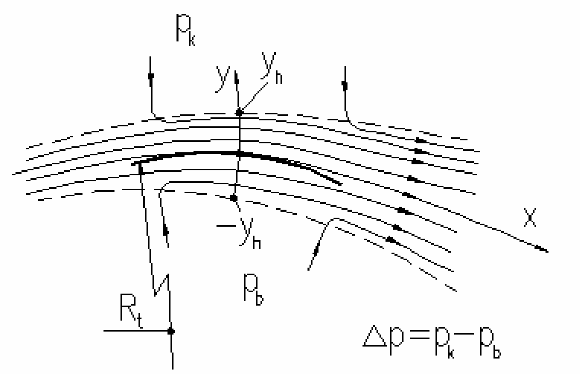


Luftschleier



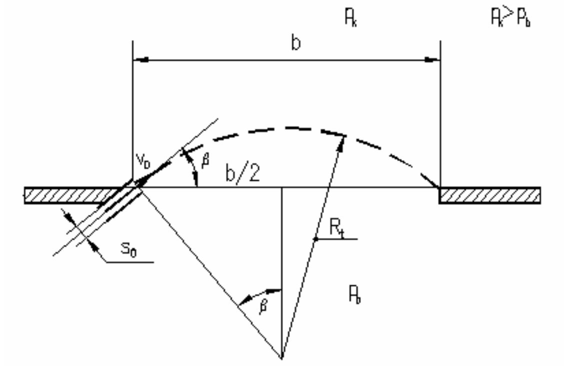






$$\frac{v^2}{R} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \Rightarrow \int_{p_b}^{p_k} dp = \int_{-y_h}^{y_h} \rho \frac{v^2}{R} dy \Rightarrow \Delta p = p_k - p_b = \frac{1}{R}\int_{-y_h}^{y_h} \rho v^2 dy \Rightarrow \rho v_0^2 s_0 = \int_{-y_h}^{y_h} \rho v^2 dy$$

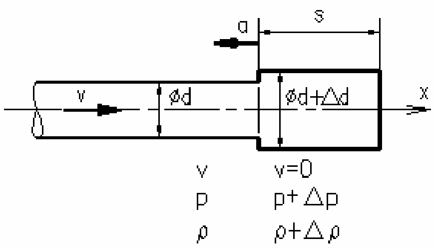
$$\Delta p = \frac{\rho v_0^2 s_0}{R} \Rightarrow R = \frac{\rho v_0^2 s_0}{\Delta p},$$

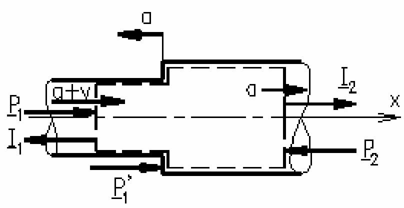


b=2 R_t sinβ. $b = 2\frac{\rho v_0^2 s_0}{\Delta p}\sin\beta$, $B = \frac{b}{s_0}$, $D = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} v_0^2}$, $B = \frac{K}{D}\sin\beta$

teorethisch: K=4, experimentell: K=1.71+0.0264 B ($25 \le \beta^0 \le 45$ and $10 \le B \le 40$)

Allievische Theorie





Rohrdurchmesser d ⇒ d+Δd

Verkürzung der Wassersäule: durch Zusammendrückung des Wassers: Δs_1 und durch Dehnung der Rohrwand: Δs_2 $\Rightarrow \Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2$

$\Delta s_1 = \frac{\Delta p}{E_v} s$, $E_v = 2.1\cdot 10^9$Pa, $\Delta s_2 \frac{d^2\pi}{4} = sd\pi\frac{\Delta d}{2}$ $\Delta\sigma = \frac{\Delta p\, d}{2\delta}$; $\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta\sigma}{E_a} = \frac{\Delta p\, d}{2\delta\, E_a}$

$E_{st} = 2\cdot 10^{11}\text{Pa} \Rightarrow \Delta s_2 = \frac{\Delta p\, d}{\delta\, E_a} s \Rightarrow \frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta s_1}{s} + \frac{\Delta s_2}{s} = \Delta p\left(\frac{1}{E_v} + \frac{d}{\delta\, E_a}\right) = \frac{\Delta p}{E_r}$

Impulssatz:

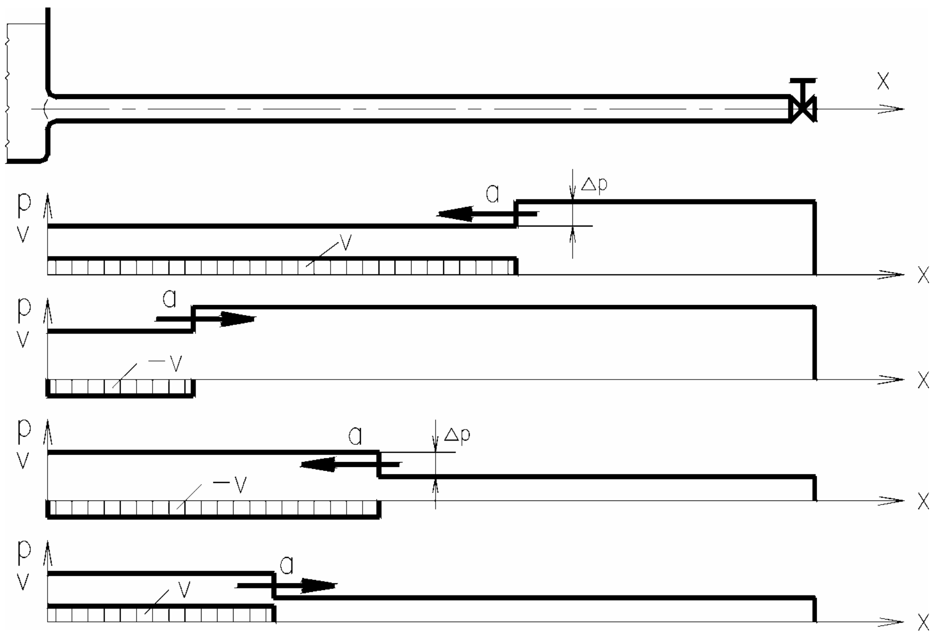
$-\rho(a+v)A(a+v) + (\rho+\Delta\rho)\, a\, (A+\Delta A)a =$

$= pA + (p+\Delta p)\Delta A - (p+\Delta p)(A+\Delta A),$

Kontinuität: $\rho(a+v)A = (\rho+\Delta\rho)a(A+\Delta A)$

$\Delta p = \rho v(a+v)$ v<<a $\Delta p = \rho v a$ $T_t \le \frac{2L}{a}$ die Zeit der Rückkehr der Druckwelle

$s = at \Rightarrow A\,\Delta s = A\frac{\Delta p}{E_r}s = A\frac{\Delta p}{E_r}at \Rightarrow \frac{\Delta p}{E_r}a = v$ $a = \sqrt{\frac{E_r}{\rho}}$.


X
p
v
a
Δp
v
X
p
v
a
−v
X
p
v
a
Δp
−v
X
p
v
a
v
X

11. Strömung von reibungsbehaftete (viskose) Fluiden

Rheologie (Fließkunde)

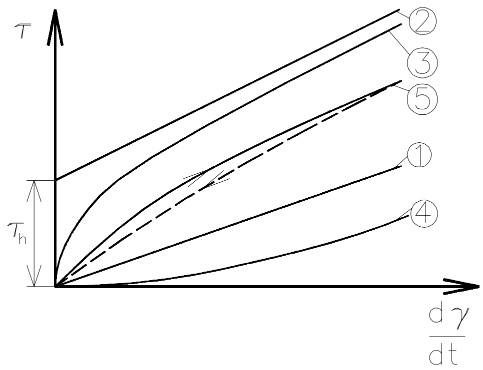
Der Zusammenhang zwischen Schubspannung und Deformationsgeschwindigkeit

Kurve 1: Newtonsche Flüssigkeiten: $\underline{\tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy}} = \mu \frac{d\gamma}{dt}$.

Nicht- Newtonsche Flüssigkeiten:

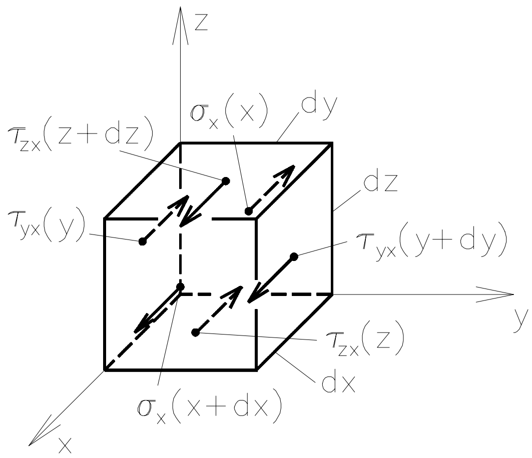
Kurve 2: $\tau = \tau_h + \mu_\infty \frac{d\gamma}{dt}$, plastische Flüssigkeit

Kurven 3 and 4: $\tau = k(d\gamma/dt)^n$.



Bewegungsgleichung

$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} + \underline{F}$, Bei reibungsfreien Flüssigkeiten: $\underline{F} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p$



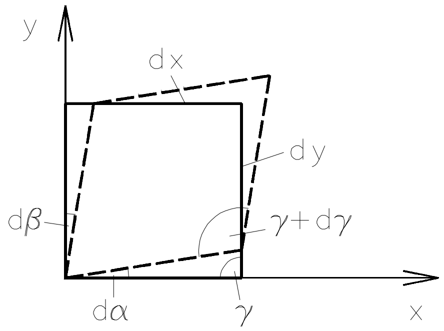
$$F_x = \frac{1}{\rho dx dy dz}\{[\sigma_x(x+dx) - \sigma_x(x)]dydz + [\tau_{yx}(y+dy) - \tau_{yx}(y)]dxdz$$
$$+ [\tau_{zx}(z+dz) - \tau_{zx}(z)]dxdy\}$$

Da $\sigma_x(x+dx) = \sigma_x(x) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx \Rightarrow F_x = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$

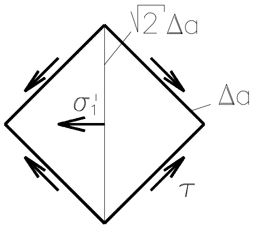
$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \underline{F} = \frac{1}{\rho}\underline{\Phi}\underline{\nabla} \quad \Rightarrow \quad \underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k} \quad \boxed{\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g} + \frac{1}{\rho}\underline{\Phi}\underline{\nabla}}$$

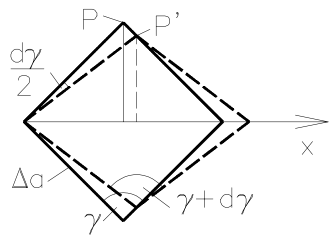
$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

<u>Zusammenhang zwischen Spannungen und Deformationen</u>



$$d\gamma = d\alpha + d\beta = \frac{\partial v_y}{\partial x}dt + \frac{\partial v_x}{\partial y}dt\,. \quad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \tau_{yx}\,. \quad p = -\frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right).$$





$$\sigma'_{1x} = \mu\frac{d\gamma}{dt} = 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\sigma_x = -p + 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\underline{v}\,.$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\underline{v}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\right]\right\}.$$

Navier-Stokes-Gleichung

$\mu = \text{const.}$ and $\rho = \text{const.}$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=g_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=g_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=g_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

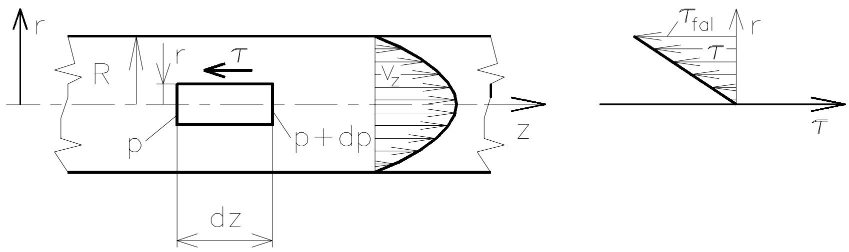
$$\boxed{\frac{d\underline{v}}{dt}=\frac{\partial\underline{v}}{\partial t}+\mathrm{grad}\frac{v^2}{2}-\underline{v}\times\mathrm{rot}\underline{v}=\underline{g}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p+\nu\Delta\underline{v}}$$ Navier-Stokes-Gleichung

$\Delta\underline{v}=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\underline{v}-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\underline{v}$.

Da $\mathrm{div}\underline{v}=0$ $\boxed{\frac{d\underline{v}}{dt}=\underline{g}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p-\nu\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\underline{v}}$ wenn $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\underline{v}=0$, (z.B. weil $\mathrm{rot}\underline{v}=0$ ist) spielt die Viskosität keine Rolle.

Ausgebildete laminare Rohrströmung (Hagen-Poiseuille Strömung)

Rotationssymmetrische, ausgebildete Rohrströmung: $v_r=0$, $\frac{\partial(\ )}{\partial z}=0$ (2D Strömung)



$$r^2\pi p-r^2\pi(p+dp)+2r\pi dz\tau=0.\Rightarrow\ 2\tau dz=r dp\ \Rightarrow\ \tau=\frac{1}{2}r\frac{dp}{dz}=\mu\frac{dv_z}{dr}$$

dp/dz= const.

$$\int dv_z=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dz}\int r dr\Rightarrow v_z=\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}r^2+\text{áll.}$$

Wenn r=R $\Rightarrow$ $v_z=0$ $v_z=-\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}\left[R^2-r^2\right]\Rightarrow v_z>0$ if $\frac{dp}{dz}<0$

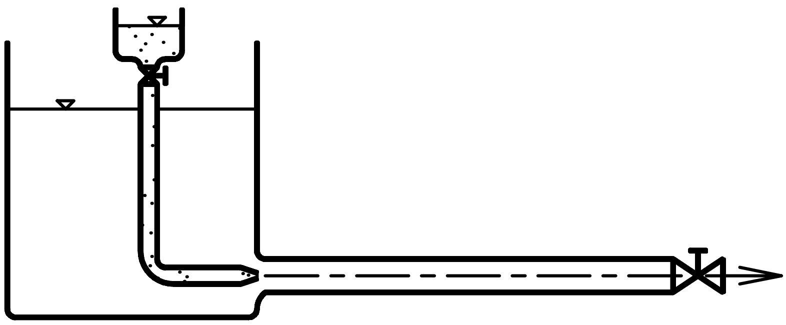
Reibungsverlust über l: $\Delta p'[Pa]\Rightarrow\frac{dp}{dz}=-\frac{\Delta p'}{l}\ \Rightarrow\ v_z=\frac{\Delta p'}{4\mu l}\left[R^2-r^2\right]\Rightarrow\ \tau=-\frac{\Delta p'}{2l}r$

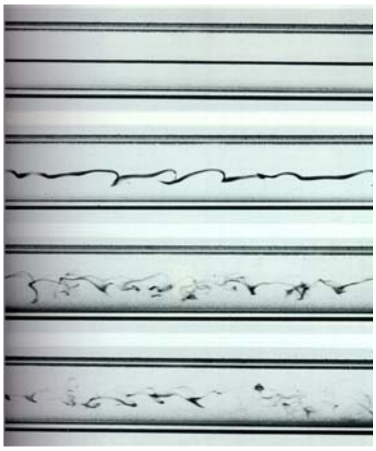
$$v_{zmax}=\frac{\Delta p' R^2}{4\mu l}\ \Rightarrow\ \bar{v}=\frac{v_{zmax}}{2}\ \Rightarrow\ \bar{v}=\frac{1}{8}\frac{\Delta p'}{\mu l}R^2$$

$$\boxed{\Delta p' = \frac{8\mu \bar{v} l}{R^2}}.\ \text{Wandschubspannung: } \tau_0 = -\frac{\Delta p' R}{2l} \qquad 2R\pi l \tau_0 = R^2 \pi \Delta p'$$

Laminare und turbulente Strömungen

Eigenschaften der turbulenten Strömungen





Der laminar-turbulente Übergang (Umschlag) hängt von der Größe der Reynoldszahl ab: $Re = \frac{v d \rho}{\mu} \Rightarrow$ Umschlag bei $Re \cong 2300$

zeitgemittelte Geschwindigkeit: , $\underline{\bar{v}} = \frac{1}{T}\int_0^T \underline{v} dt$ Schwankungsgeschwindigkeiten: $\underline{v}'$

$(\overline{\underline{v}'} = \frac{1}{T}\int_0^T \underline{v}' dt = 0)$

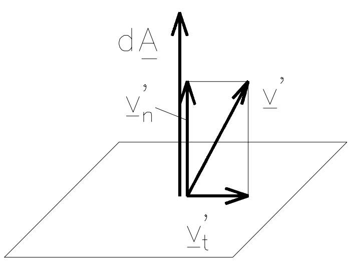
$\underline{v} = \underline{\bar{v}} + \underline{v}'.\quad p = \bar{p} + p'.$

$$\text{Turbulenzgrad: } Tu = \frac{\sqrt{\overline{(\underline{v}')^2}}}{|\underline{\bar{v}}|} = \frac{\sqrt{\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}}}{|\underline{\bar{v}}|}$$

Scheinbare Spannungen

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial\left(\bar{v}_x^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\bar{v}_x \bar{v}_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\bar{v}_x \bar{v}_z\right)}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2}\right) -$$

$$- \frac{\partial\left(\overline{v'^2_x}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\overline{v'_x v'_y}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\overline{v'_x v'_z}\right)}{\partial z}.$$



$$\int_A \underline{\bar{v}} \rho \underline{\bar{v}} d\underline{A} = -\int_A \bar{p} d\underline{A} + \int_V \rho \underline{g} dV - \int_A \overline{\underline{v}' \rho \underline{v}'} d\underline{A}$$

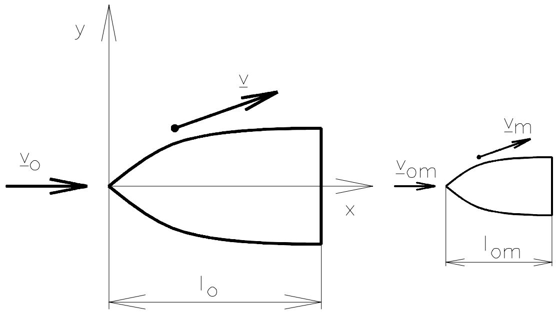
$$-\int_A \overline{\underline{v}'\rho\underline{v}'}\,d\underline{A} = -\int_A \overline{\underline{v}'_n\rho v'_n}\,dA - \int_A \overline{\underline{v}'_t\rho v'_n}\,dA$$

$$\int_A \underline{\bar{v}}\rho\underline{\bar{v}}\,d\underline{A} = -\int_A \left[\bar{p} + \rho\left(\overline{v'^2_n}\right)\right] d\underline{A} + \int_V \rho\underline{g}\,dV - \int_A \rho\left(\overline{\underline{v}'_t\, v'_n}\right) d\underline{A}$$

$p_\ell = \rho\left(\overline{v'^2_n}\right)$: scheinbare Druckerhöhung, $\tau_\ell = -\rho\left(\overline{v'_t\, v'_n}\right)$: scheinbare Schubspannung

$$-\frac{\partial\left(\overline{v'^2_x}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\overline{v'_x\, v'_y}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\overline{v'_x\, v'_z}\right)}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\sigma_{xt}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yxt}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zxt}}{\partial z}\right)$$

Ähnlichkeit der Strömungen



Charakteristische Geschwindigkeit, Länge, Zeit bei Großausführung und Modell:

v_0 and v_{0m}, l_0 and l_{0m}, $t_0 = \dfrac{\ell_0}{v_0}$ and $t_{0m} = \dfrac{\ell_{0m}}{v_{0m}}$.

Die Strömungen sind ähnlich wenn sie durch die gleichen dimensionslosen Funktionen beschrieben werden können.

$$\frac{\underline{v}}{v_0} = f\left(\frac{x}{\ell_0}, \frac{y}{\ell_0}, \frac{z}{\ell_0}, \frac{t}{t_0}\right) \text{ and } \frac{p}{\rho v_0^2} = F\left(\frac{x}{\ell_0}, \frac{y}{\ell_0}, \frac{z}{\ell_0}, \frac{t}{t_0}\right).$$

Die Bedingungen der Ähnlichkeit:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) \quad \text{multipliziert mit}$$

$$\frac{\ell_0}{v_0^2}\,,\quad \frac{\partial\left(\frac{v_x}{v_0}\right)}{\partial\left(\frac{t}{\ell_0/v_0}\right)} + \frac{v_x}{v_0}\frac{\partial\left(\frac{v_x}{v_0}\right)}{\partial\left(\frac{x}{\ell_0}\right)} + .. = \frac{g_x\ell_0}{v_0^2} - \frac{\partial\left(\frac{p-p_0}{\rho v_0^2}\right)}{\partial\left(\frac{x}{\ell_0}\right)} + \frac{\nu}{v_0\ell_0}\left(\frac{\partial^2\left(\frac{v_x}{v_0}\right)}{\partial\left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2} + ..\right)$$

dimensionslose N-S Komponentengleichung

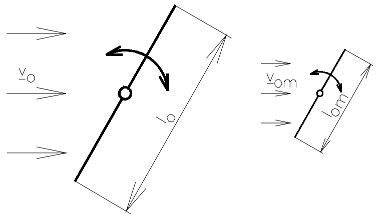
Zwei Strömungen sind ähnlich, wenn

a) beide durch die gleiche dimensionslose Differentialgleichung beschrieben werden können, z.B.

$$\frac{g_x \ell_0}{v_0^2} = \frac{g_{xm} \ell_{0m}}{v_{0m}^2} \Rightarrow Fr = \frac{v_0}{\sqrt{g\ell_0}} \text{ Froude Zahl,} \quad \frac{\nu}{v_0 \ell_0} = \frac{\nu_m}{v_{0m} \ell_{0m}} \Rightarrow Re = \frac{v_0 \ell_0}{\nu} \text{ Reynolds Zahl,}$$

$$Re_m = Re \quad Fr_m = Fr$$

b) gleiche dimensionslose Anfangs- und Randbedingungen vorherrschen (z.B. geometrische Ähnlichkeit des Modells und der Großausführung).



$t_0 = l_0/v_0$, $\quad \frac{t_{pm}}{t_{0m}} = \frac{t_p}{t_0}$ i.e. $\frac{t_{pm} v_{0m}}{\ell_{0m}} = \frac{t_p v_0}{\ell_0}$.

$t_p = \frac{1}{f}$, wo f[1/s] die Frequenz $Str = \frac{f\ell_0}{v_0}$ Strouhal Zahl

<u>Die dimensionslose Parameter als Quotienten der Kräfte, die auf 1 kg Fluid wirken</u>

Trägheitskraft: $F_T \sim \frac{v_0^2}{\ell_0}$

Kraftfeld: $F_G \sim g$

Druckkraft $F_P \sim \frac{(p - p_0)\ell_0^2}{\rho \ell_0^3} = \frac{(p - p_0)}{\rho \ell_0}$

Reibungskraft: $F_S \sim \rho \nu \frac{v_0}{\ell_0} \frac{\ell_0^2}{\rho \ell_0^3} = \nu \frac{v_0}{\ell_0^2}$

Oberflächenspannungskraft: $F_F \sim \frac{C}{\ell_0} \frac{\ell_0^2}{\rho \ell_0^3} = \frac{C}{\rho \ell_0^2}$

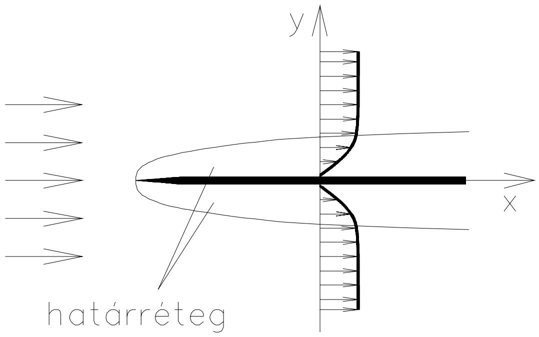
Reynolds-Zahl: $Re \sim \frac{F_T}{F_S} \sim \frac{v_0^2 / \ell_0}{\nu v_0 / \ell_0^2} = \frac{v_0 \ell_0}{\nu}$

Froude-Zahl: $Fr \sim \sqrt{\frac{F_T}{F_G}} = \sqrt{\frac{v_0^2 / \ell_0}{g}} = \frac{v_0}{\sqrt{g \ell_0}}$

Euler-Zahl: $Eu \sim \frac{F_P}{F_T} \sim \frac{(p - p_0)/\rho / \ell_0}{v_0^2 / \ell_0} = \frac{p - p_0}{\rho v_0^2}$

Weber-Zahl: $We \sim \frac{F_F}{F_T} \sim \frac{C / \ell_0^2 / \rho}{v_0^2 / \ell_0} = \frac{C}{\rho v_0^2 \ell_0}$

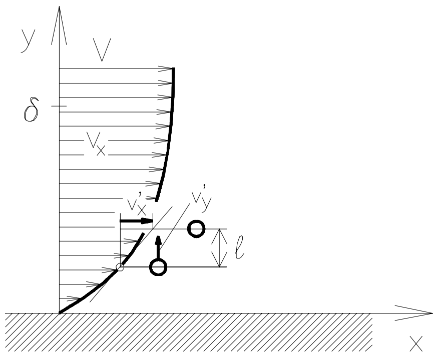
12. Grenzschichten



$$v_z = 0, \frac{\partial(\;)}{\partial z} = 0, \quad v_y \ll v_x \qquad \frac{\partial(\;)}{\partial x} \ll \frac{\partial(\;)}{\partial y}$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = V \frac{dV}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$



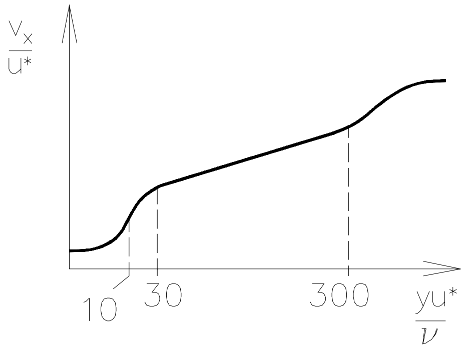
$$\tau = \tau_{yx\ell} = \rho \ell^2 \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right| \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu_t \frac{\partial v_x}{\partial y},$$ l [m] Mischungsweg

$$\mu_t = \rho \ell^2 \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|$$ Wirbelviskosität

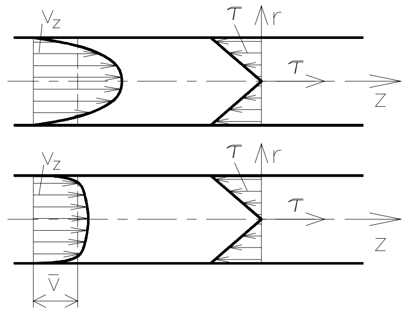
$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$ [m/s] Bezugs-(Reibungs)geschwindigkeit

$$\boxed{\frac{v_x}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y u^*}{\nu} + K}$$ wo $\kappa = 0.4$, $K = 5$

in zäher Unterschicht $\tau = \tau_0 = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$, $\boxed{\frac{v_x}{u^*} = \frac{y u^*}{\nu}}$

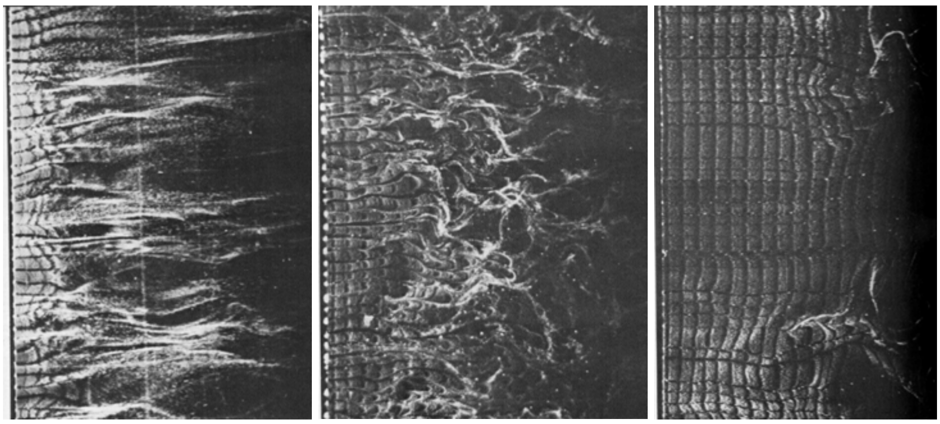


<u>Geschwindigkeits- und Schubspannungsverteilung</u> in einem Rohr bei laminarer und turbulenter Strömung



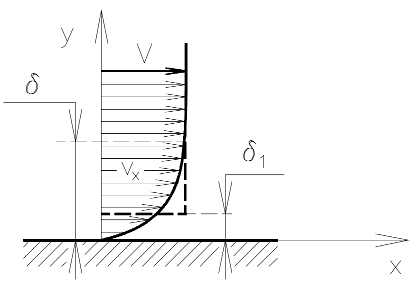
Eigenschaften der Strömung im Grenzschicht

$$y^+ = \frac{yu^*}{\nu}$$



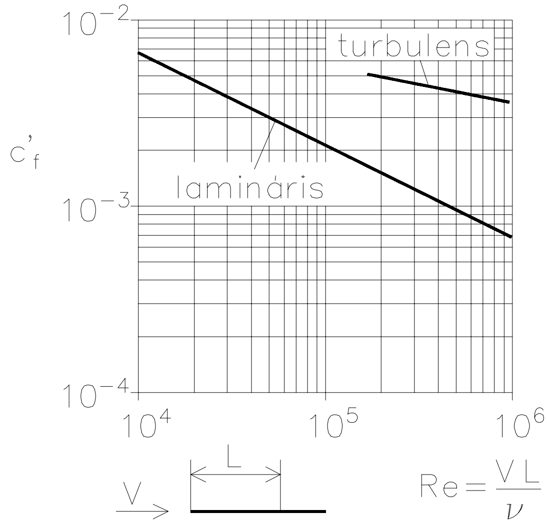
$y^+=2{,}7$ $y^+=101$ $y^+=407$

<u>Verdrängungsdicke</u>

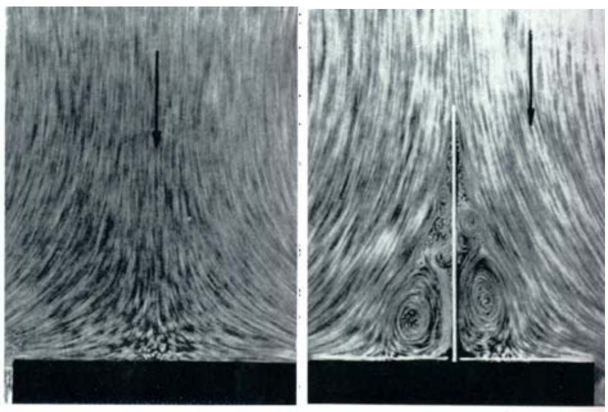


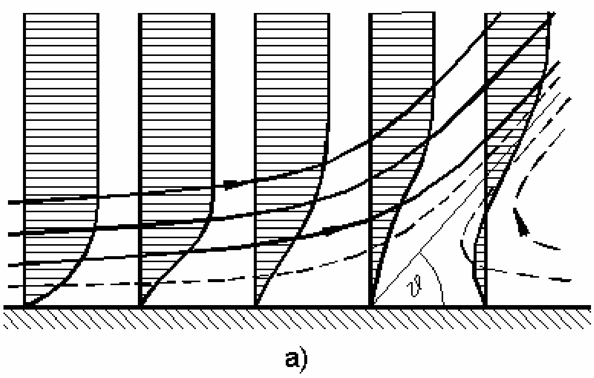
$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v_x}{V}\right) dy \, .$$

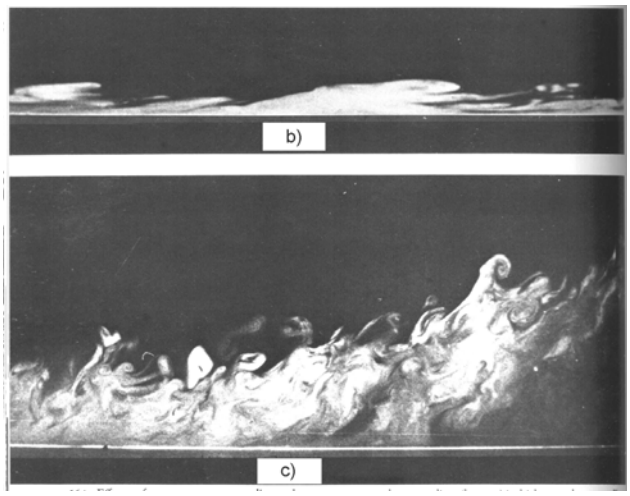
<u>Reibungsbeiwert</u> $c'_f = \dfrac{\tau_0}{\dfrac{\rho}{2} V^2}$



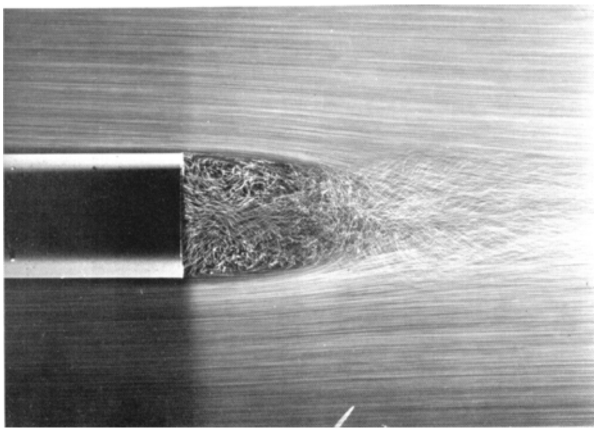
Grenzschichtablösung



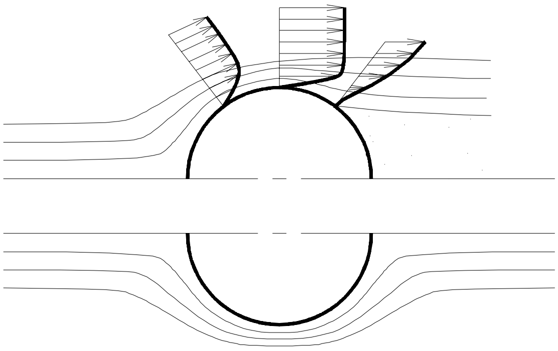


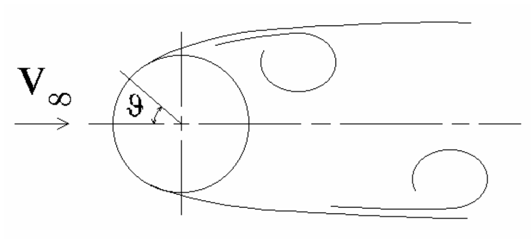


Ablöseblase

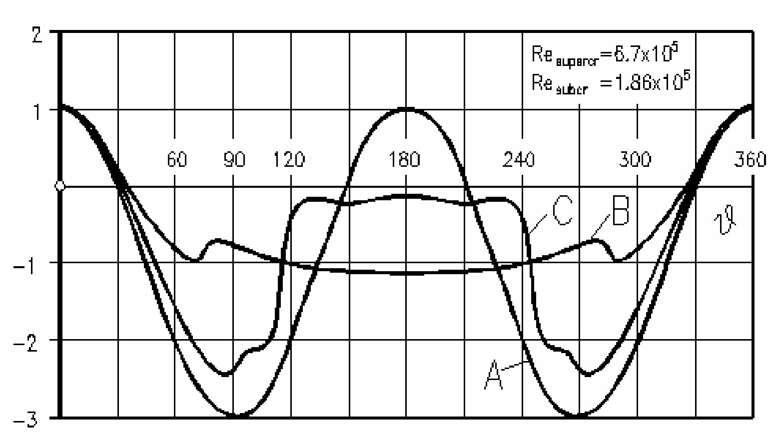


Umströmung eines Zylinders

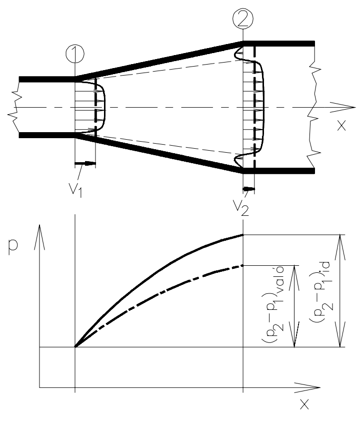


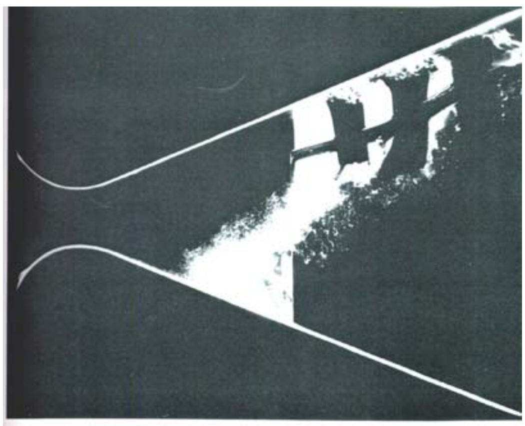


$$c_p = \frac{p - p_0}{\frac{\rho}{2} V^2}$$ Druckkoeffizient

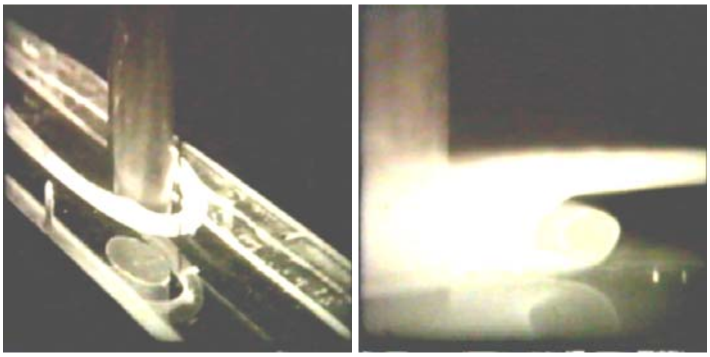


Strömung in einem Diffusor

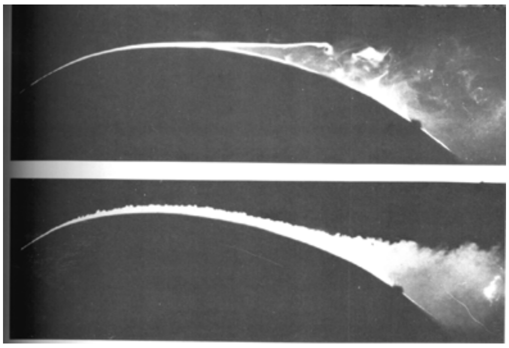




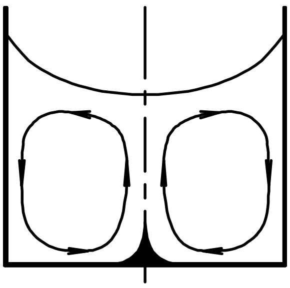
Hufeisen-Wirbel



Ablösung der laminaren und turbulenten Grenzschicht

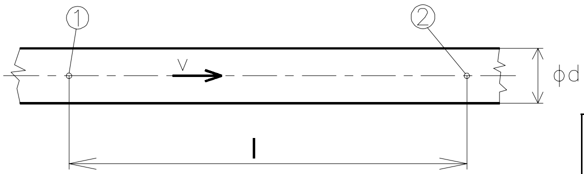


Sekundärströmung



13. Hydraulik

Erweiterung der Bernoulli Gleichung an reibungsbehafteten Strömungen



$$\boxed{\rho\,\frac{v_1^2}{2} + p_1 + \rho U_1 = \rho\,\frac{v_2^2}{2} + p_2 + \rho U_2 + \Delta p'}$$

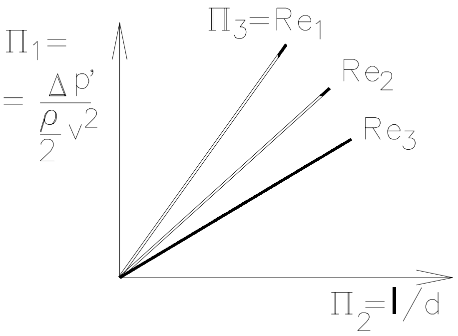
<u>Dimensionsanalyse</u>

$$\Delta p' = f\left(\ell, \mu, \rho, d, v\right)$$

$[Q] = kg^{\alpha} m^{\beta} s^{\gamma} \Rightarrow Q_1, Q_2, \ldots\ldots, Q_n . \Rightarrow F(Q_1, Q_2, \ldots\ldots, Q_n) = 0 \Rightarrow \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots\ldots \Pi_{n-r}$, dimensionslose Größen $\Rightarrow F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots\ldots \Pi_{n-r},) = 0$

$$\Pi = \Delta p'^{k_1} \ell^{k_2} \mu^{k_3} \rho^{k_4} d^{k_5} v^{k_6} .$$

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p'}{\frac{\rho}{2} v^2}, \ \Pi_2 = \ell / d, \ \Pi_3 = Re = \frac{vd}{\nu} . \qquad F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0$$



$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3)$$

$$\frac{\Delta p'}{\frac{\rho}{2} v^2} = \lambda(Re) \frac{\ell}{d} \Rightarrow \boxed{\Delta p' = \frac{\rho}{2} v^2 \frac{\ell}{d} \lambda(Re)}$$ wo λ der Reibungsbeiwert ist.

Bei laminarer Rohrströmungen $\Delta p' = \frac{8\mu\ell}{R^2} v$, wo $R = \frac{d}{2} \Rightarrow \Delta p' = \frac{\rho}{2} v^2 \frac{\ell}{d} \frac{64\nu}{vd}$,

Da $\frac{vd}{\nu} = Re \Rightarrow \Delta p' = \frac{\rho}{2} v^2 \frac{\ell}{d} \lambda_{lam}$ $\boxed{\lambda_{lam} = \frac{64}{Re}}$

<u>Wandrauhigkeit</u>

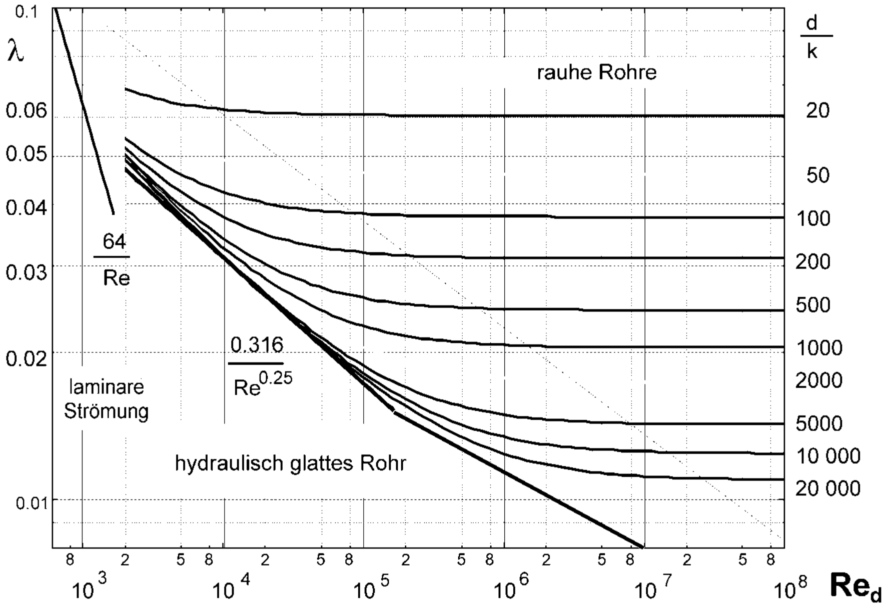
$k[m]$ Durchmesser der Sandkörner, relative Wandrauhigkeit $\Pi_4 = \frac{r}{k}$, wo r=d/2 Rohrradius.

$Re > 2300$ $Re \le Re_h$ $\quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_{turb}}} = 1.95 lg\left(Re \sqrt{\lambda_{turb}}\right) - 0.55$

$4000 \le Re \le 10^5$ Blasius Formel $\boxed{\lambda_{turb} = \frac{0.316}{\sqrt[4]{Re}}}$

Moody-Diagramm

für Bestimmung des Reibungsbeiwertes von Rohre



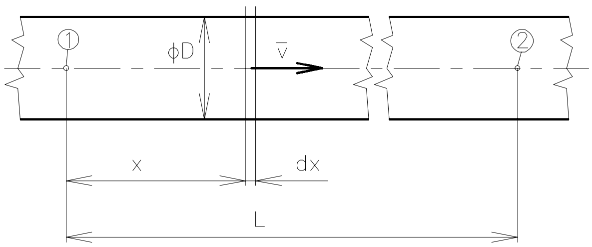
<u>Wandschubspannung</u>

$$\Delta p'\frac{d^2\pi}{4}=\frac{\rho}{2}v^2\frac{\ell}{d}\lambda\frac{d^2\pi}{4}=\tau_0 d\pi\ell \;\Rightarrow\; \tau_0=\frac{\rho}{2}v^2\frac{\lambda}{4}$$

<u>Nichtzylindrische Röhre</u>: $d_e=\frac{4A}{K}$, wo $A[m^2]$ Querschnitt, $K[m]$ benetzter Umfang

$$\Delta p'=\frac{\rho}{2}v^2\frac{\ell}{d_e}\lambda(\mathrm{Re})\text{ , wo }\mathrm{Re}=\frac{vd_e}{\nu}$$

Kompressible Rohrströmung

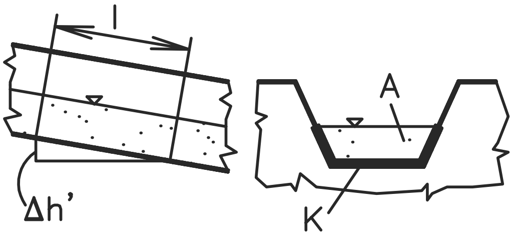


$$-dp=\frac{\rho}{2}v^2\frac{dx}{D}\lambda,\;\bar{v}=\frac{q_m}{\rho A},\;\rho=\frac{p}{RT}\;\Rightarrow\;-dp=\frac{q_m^2 RT}{2pA^2}\frac{\lambda}{D}dx\;\Rightarrow\;-\int_{p_1}^{p_2}p\,dp=\int_0^L\frac{q_m^2 RT\lambda}{2A^2 D}dx$$

Da $\mathrm{Re}=\frac{\bar{v}D}{\nu}=\frac{q_m D}{\rho A\nu}=\frac{q_m D}{A\mu}$, $\mu = f(T)$ und $T \cong$ const. Reibungsbeiwert $\lambda \cong$ const.

$$\frac{p_1^2-p_2^2}{2}=\frac{q_m^2 RT\lambda L}{2A^2 D}\frac{\rho_1^2}{\rho_1^2}\;\Rightarrow\;\frac{p_1^2-p_2^2}{2}=p_1\frac{\rho_1}{2}\bar{v}_1^2\frac{L}{D}\lambda\;\Rightarrow\;\boxed{\frac{p_1^2-p_2^2}{2}=p_1\Delta p'_{ink}}$$

Strömung in Kanälen mit freiem Wasserspiegel



$$\Delta h' = \frac{\bar{v}^2}{2g}\frac{\ell}{d_e}\lambda$$, wo $d_e = \frac{4A}{K}$, mit der Einführung von $i = \frac{\Delta h'}{\ell}$, der Neigung des Kanalbodens.

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2gd_e}{\lambda}i} = C\sqrt{d_e i},\ \text{wo}\ C = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}}$$ Chézy Gleichung, mit $\lambda = 0.02 \sim 0.03$

Chézy-Koeffizient $C \cong 28$.

Reibungsverlust in Durchströmteilen

Verlust bei Ausbildung der Rohrströmung

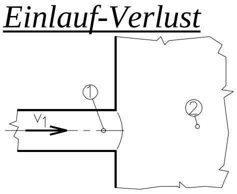
$$\Delta p'_{dev} = \frac{\rho}{2} v^2 \zeta_{dev}$$

Laminare Strömung: Widerstandsbeiwert $\zeta_{dev,lam} \cong 1.2$, turbulente Strömung: $\zeta_{dev,torb} \cong 0.05$

Verlust in Borda-Carnot Erweiterungen (Carnotscher Stoßverlust):

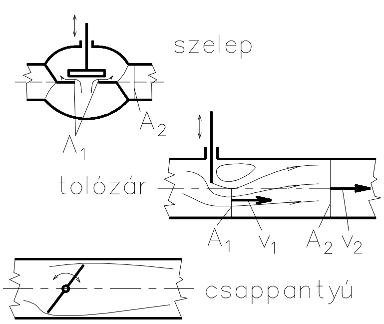
$$\Delta p'_{BC} = \frac{\rho}{2}(v_1 - v_2)^2$$

Einlauf-Verlust

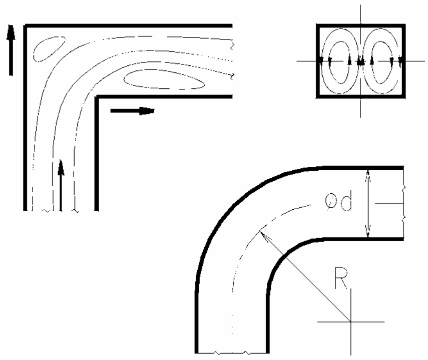


$$\Delta p'_{in} = \frac{\rho}{2}(v_1 - 0)^2 = \frac{\rho}{2}v_1^2 .$$

Verlust in Ventile, Schieber und Drosselklappe



$$\Delta p'_v \cong \frac{\rho}{2} v_2^2 \left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)^2, \zeta_v \cong \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2$$



Diffusorverlust

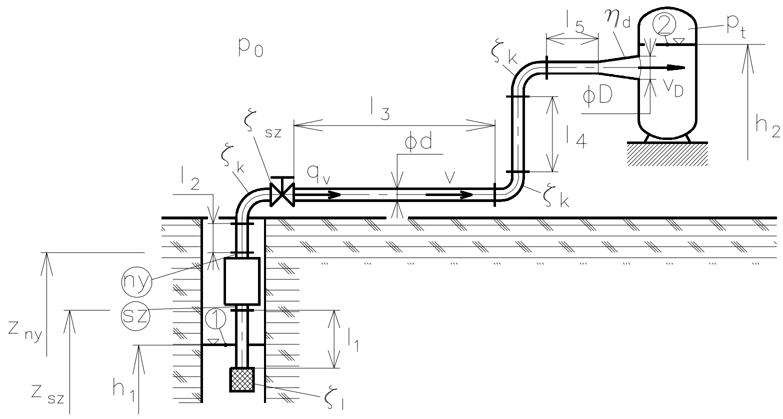
$\Delta p'_{diff} = (p_2 - p_1)_{id} - (p_2 - p_1)_{val} = (1-\eta_d)\frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right)$ mit dem Diffusor-Wirkungsgrad η_d

Verlust in Krümmern

$$\Delta p'_b = \frac{\rho}{2} v^2 \zeta_b$$

Anwendungen

Wasserversorgungsanlage



Bekannte Parameter: d ℓ_1, ℓ_2 h_1, h_2 D $q_v\left[\frac{m^3}{s}\right]$, aus der Literatur: $\zeta_1, \zeta_{sz}, \zeta_k$ η_d.

Berechnung der Förderhöhe und der Nutzleistung der Pumpe $H = \frac{\Delta p_{š}}{\rho g} + \left(z_{ny} - z_{sz}\right)$ $P_h = q_v \rho g H$

Zwei Bernoulli-Gleichungen:

1) $\rho\frac{v_1^2}{2} + p_1 + \rho U_1 = \rho\frac{v_{sz}^2}{2} + p_{sz} + \rho U_{sz} + \Sigma\Delta p'_{sz}$ wo $\sum \Delta p'_{sz} = \frac{\rho}{2} v^2\left(\zeta_1 + \frac{\ell_1}{d}\lambda_1\right)$

2) $\rho\frac{v_{ny}^2}{2} + p_{ny} + \rho U_{ny} = \rho\frac{v_2^2}{2} + p_2 + \rho U_2 + \Sigma\Delta p'_{ny}$, wo

$$\sum \Delta p'_{ny} = \frac{\rho}{2} v^2\left(\frac{\ell_2}{d}\lambda_2 + \zeta_k + \zeta_{sz} + \frac{\ell_3}{d}\lambda_3 + \zeta_k + \frac{\ell_4}{d}\lambda_4 + \zeta_k + \frac{\ell_5}{d}\lambda_5\right) +$$

$$+ (1-\eta_d)\frac{\rho}{2}\left(v^2 - v_D^2\right) + \frac{\rho}{2} v_D^2 .$$

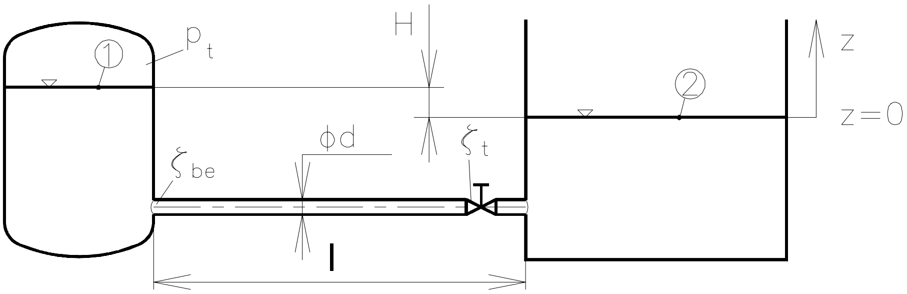
Da $v_1 = v_2 = 0$, $U_{ny} - U_{sz} = g\left(z_{ny} - z_{sz}\right)$, $U_2 - U_1 = g\left(h_2 - h_1\right)$, $p_1 = p_0$, $p_2 = p_t$
$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda$.

$$\Delta p_š = p_{nyš} - p_{szš} = p_t - p_0 + \rho g(h_2 - h_1) - \rho g(z_{ny} - z_{sz}) +$$
$$+\frac{\rho}{2}v^2\left(\zeta_1 + \zeta_{sz} + 3\zeta_k + \frac{\Sigma\ell_i}{d}\lambda\right) + (1-\eta_d)\frac{\rho}{2}(v^2 - v_D^2) + \frac{\rho}{2}v_D^2.$$

Kontinutätsgleichung: $vd^2 = v_D D^2$. $\mathrm{Re} = \dfrac{vd}{\nu} \Rightarrow \lambda$

Strömung in einem Rohr, das zwei Wasserbehälter verbindet

Bekannte Parameter: d ℓ ζ_t. Berechnung von $q_v\left[\dfrac{m^3}{s}\right]$



$$\rho\frac{v_1^2}{2} + p_1 + \rho U_1 = \rho\frac{v_2^2}{2} + p_2 + \rho U_2 + \Sigma\Delta p'$$

Da $p_1 = p_t$ und $p_2 = p_0$, $U = gz$ und $z_2 = 0$, $z_1 = H$, $v_1 = v_2 = 0$

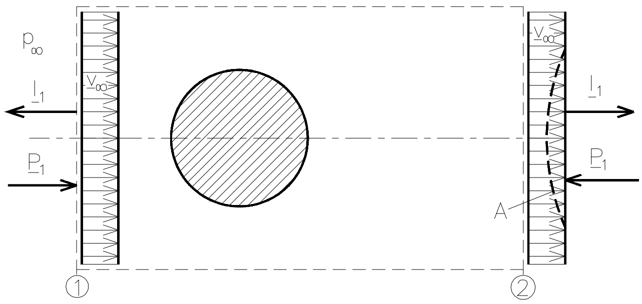
$$\Sigma\Delta p'_{sz} = \frac{\rho}{2}v^2\left(\zeta_{be} + \zeta_t + \frac{\ell}{d}\lambda + 1\right) \Rightarrow p_t - p_0 + \rho g H = \frac{\rho}{2}v^2\left(\zeta_{be} + \zeta_t + \frac{\ell}{d}\lambda + 1\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}\frac{p_t - p_0 + \rho g H}{(\zeta_{be} + \zeta_t + 1) + \frac{\ell}{d}\lambda}}$$

$$v = \sqrt{\frac{A}{B + C\lambda}}$$

Annahme für $\lambda' \Rightarrow v' \Rightarrow \mathrm{Re}' = \dfrac{v'd}{\nu} \Rightarrow \lambda''$–t …. $q_v = v\dfrac{d^2\pi}{4}$.

14. Aerodynamische Kräfte und Momente



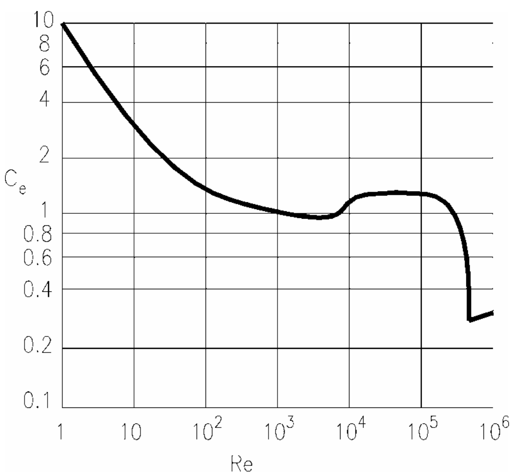
Reibungsbehaftetes Fluid: $\left|\underline{p}_2\right| = \left|\underline{p}_1\right|$ Da $p_2 = p_1 = p_\infty$, $v_2 = v_1$, $\Rightarrow$ $\left|\underline{I}_2\right| = \left|\underline{I}_1\right|$. $-I_1 + I_2 = P_1 - P_2 - R_x$,
$\Rightarrow$ $R_x = 0$

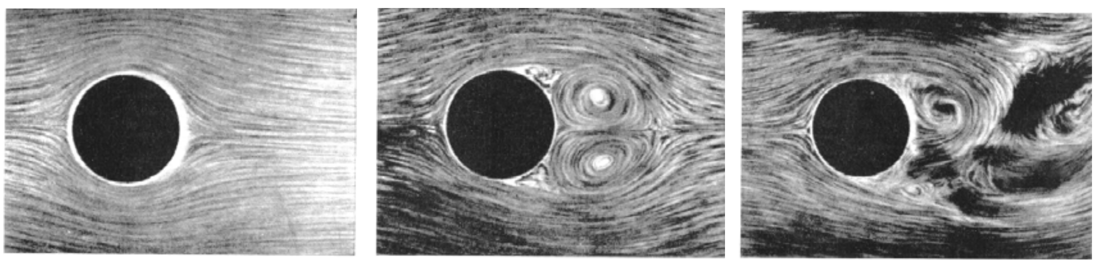
Die auf ein Zylinder wirkende aerodynamische Kraft

$f\left(F_d, v_\infty, \rho, \mu, d, \ell\right) = 0$ Dimensionslose Größen: $\Pi_1 = c_d = \dfrac{F_d}{\dfrac{\rho}{2} v_\infty^2 \ell d}$ Widerstandsbeiwert,

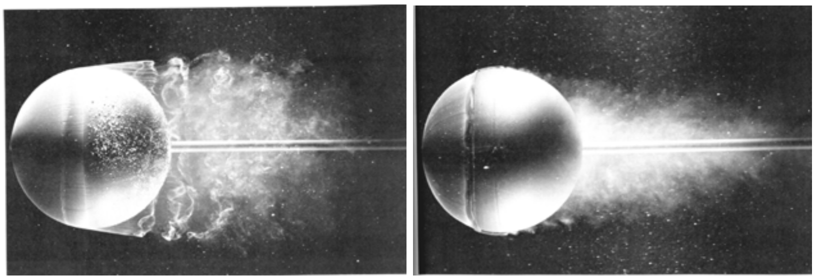
$\Pi_2 = \mathrm{Re} = \dfrac{v_\infty d}{\nu}$ Reynolds Zahl, $\Pi_3 = \dfrac{\ell}{d}$ relative Länge

$\Pi_3 = \dfrac{\ell}{d} = \infty$ 2D Strömung $\Rightarrow$ $\Pi_1 = f\left(\Pi_2\right)$, $c_d = f\left(\mathrm{Re}\right)$

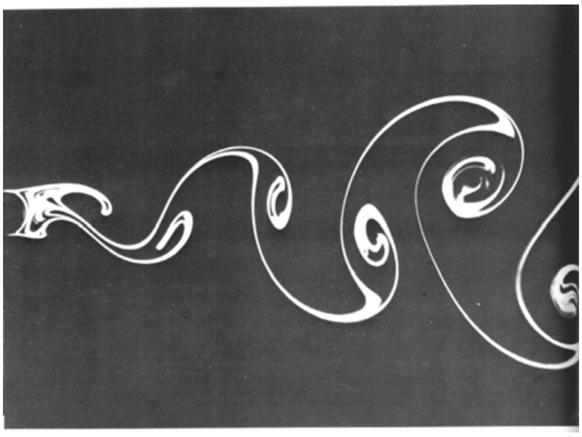


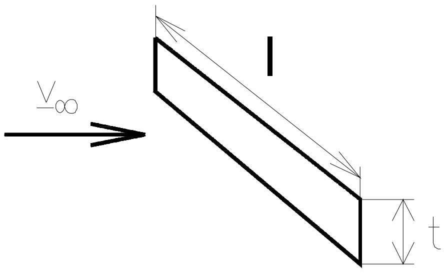


Wenn Re klein ist: $F_d \sim \mu v_\infty$, im Falle größer Re: $F_d \sim v_\infty^2$
Die Wirkung des laminar-turbulenten Überganges.



Karmansche Wirbelstrasse





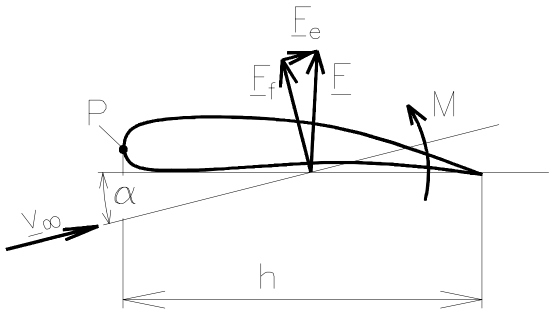
2D Strömung, $\frac{\ell}{t} \Rightarrow \infty$ $c_d = 2$. $F_d = (\bar{p}_f - \bar{p}_b)\ell t \Rightarrow c_d = \frac{\bar{p}_f - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2} - \frac{\bar{p}_b - p_\infty}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2} = \bar{c}_{pf} - \bar{c}_{pb}$

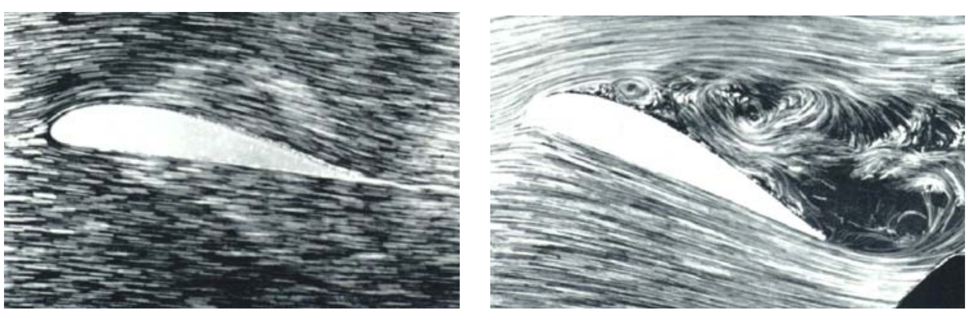
$c_{p\,max} = 1$ $\bar{c}_{pf} \cong 0.7 \Rightarrow \bar{c}_{pb} \cong -1.3$

3D Effekt: $\frac{\ell}{d} = \infty, 10, 1$ $c_d = 2$, 1.3, 1.1.

Im Falle von Kreiszylinder $c_d = 1.2$, 0.82 und 0.63 ($Re = 10^5$).

Auftrieb und Widerstand von Tragflügeln

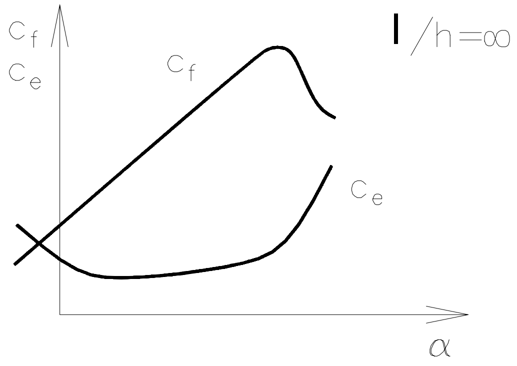




$|\underline{R}| = \rho v_\infty \Gamma \left[\frac{N}{m}\right]$ $c_l = \dfrac{F_l}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2 A}$ Auftriebsbeiwert, $c_d = \dfrac{F_d}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2 A}$ Widerstandsbeiwert

$c_{Mp} = \dfrac{M_p}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2 Ah}$ Nickmomentenbeiwert

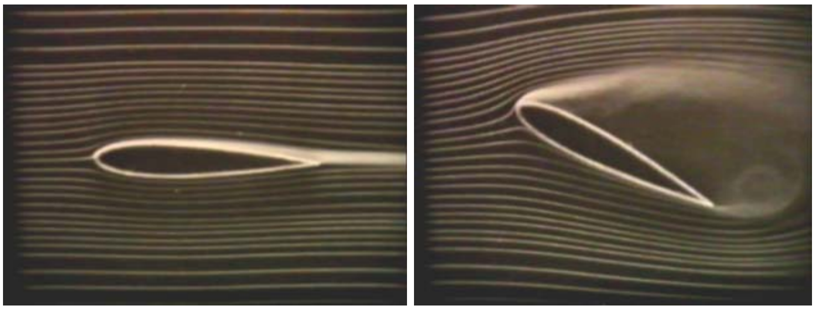
Auftriebs- und Widerstandskoeffizient als Funktion des Anströmwinkels



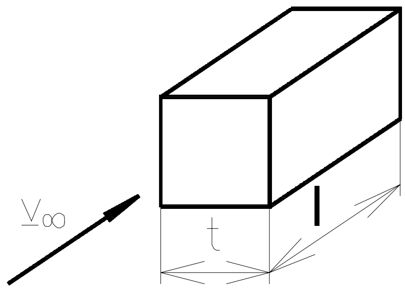
$c_e - c_D$, $c_f - c_L$

$c_{L\,max} \cong 1.2 \sim 1.8$, $dc_L/d\alpha = 2\pi$[rad],

Die Druckzunahme in Strömungsrichtung (Abnahme der Geschwindigkeit) kann zur Grenzschichtablösung führen.

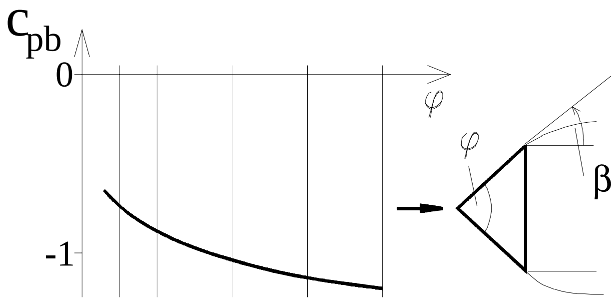


Die auf ein Prisma (stumpfen Körper) wirkende Widerstandskraft

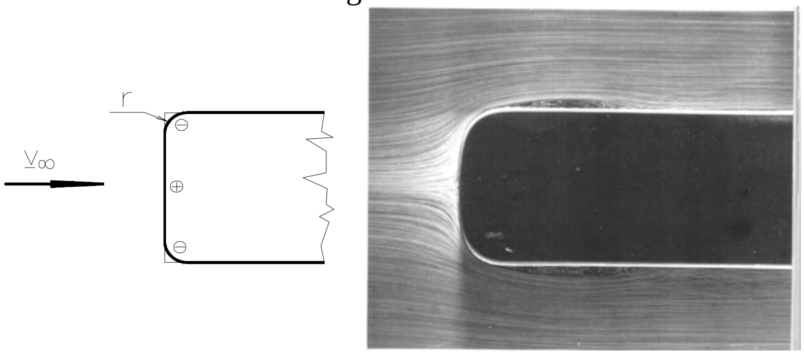


$c_D = \overline{c}_{pf} - \overline{c}_{pb} + 4\frac{\ell}{t}\overline{c}'_f$. Widerstand = Bugwiderstand + Heckwiderstand +Seitenwandwiderstand
$\ell/t = 0$ und $\ell/t = 5$: c_e = 1.1 and 0.8.

Druckbeiwert am Heck als Funktion des Winkels zwischen der Anströmrichtung und Tangente der Scherschicht bei der Ablöselinie.



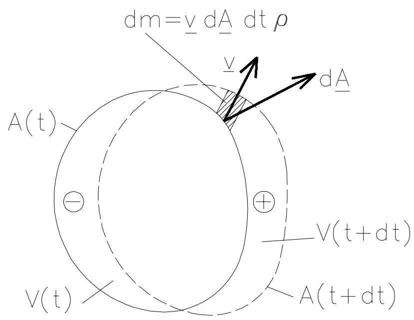
Reduzierung des Bugwiderstandes mit Abrundung der Eintrittskanten:



$r/t = 0 \Rightarrow 0.2 \quad c_D = 0.8 \Rightarrow 0.2$

15. Gasdynamik

Energiesatz



reibungsfreies Gas, stationäre Strömung, kein Kraftfeld, keine Wärmeübertragung

$\frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{v^2}{2}+c_v T\right)\rho dV = -\int_A \underline{v}\rho d\underline{A}$, wo $c_v\left[\frac{J}{kgK}\right]$ spezifische Wärme bei unveränderlichem Volumen

$c_v T + \frac{p}{\rho} = h = c_p T$, mit h [J/kg]: Enthalpie, c_p [J/kg/K]: spezifische Wärme bei konstantem Druck.

$\boxed{\frac{v^2}{2} + c_p T = \mathrm{const}}$ entlang der Stromlinie

Statische, dynamische und Gesamttemperatur

$$T + \frac{v^2}{2c_p} = T_t = \mathrm{const}$$

mit T (orT_{st})[K] statische Temperatur, $T_d = \frac{v^2}{2c_p}[K]$ dynamische Temperatur,

$T_t[K]$ Gesamttemperatur.

Energiesatz ⇒ Gesamttemperatur ist konstant entlang der Stromlinie (bei stationäre Strömung von reibungsfreien Gasen)

Bernoulli-Gleichung für kompressible Gase

Kein Reibungseinfluss und Wärmeübertragung ⇒ isentrope Zustandsänderung:

$\frac{p}{\rho^\kappa} = \mathrm{const.} = \frac{p_1}{\rho_1^\kappa}$, $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ Isentropenexponent

Bernoulli Gleichung: $\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho(p)} \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1}\frac{p_1}{\rho_1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right].$

Geschwindigkeit entlang der Stromlinie: $\boxed{v_2 = \sqrt{v_1^{\,2} + \frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}}$ *

$\frac{p_1}{\rho_1^\kappa} = \text{const.} = \frac{p_2}{\rho_2^\kappa}$ und $\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} \Rightarrow \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2^\kappa}{\rho_1^\kappa} = \frac{p_2^\kappa T_1^\kappa R^\kappa}{R^\kappa T_2^\kappa p_1^\kappa} \Rightarrow \boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$

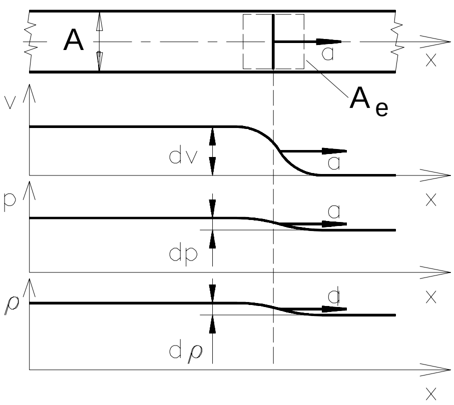
$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}}$, $\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}}$. Nach Einsetzen $\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$ in Gleichung * bekommt man:

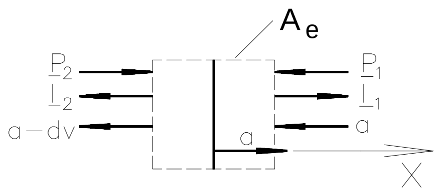
$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_1 \left[1 - \frac{T_2}{T_1}\right]$. $\frac{2\kappa R}{\kappa-1} = 2c_p$, $\kappa = \frac{c_p}{c_v} \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + 2c_p(T_1 - T_2)$

und so den Energiesatz: $c_p T_1 + \frac{v_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{v_2^2}{2}$.

Ausströmung aus einem Behälter: $v = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_t \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$

Die Schallgeschwindigkeit





Impulssatz $\rho a^2 A - (\rho + d\rho)(a - dv)^2 A = (p + dp)A - pA \quad 2a\rho dv - a^2 d\rho = dp$,

Kontinuität: $(a - dv)(\rho + d\rho) = a\rho \Rightarrow \rho dv = a d\rho$.

Geschwindigkeit der Druckwellen (Schallgeschwindigkeit): $\boxed{a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}}$

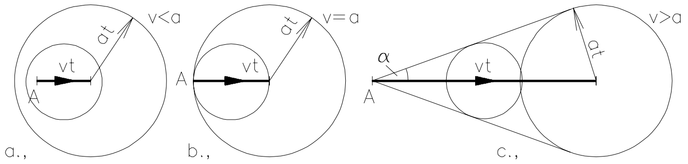
Im Falle von isentroper Zustandsänderung: $p = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \rho^\kappa, \frac{dp}{d\rho} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \kappa \rho^{\kappa-1}$

So ergibt sich die Schallgeschwindigkeit: $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \boxed{a = \sqrt{\kappa R T}}$

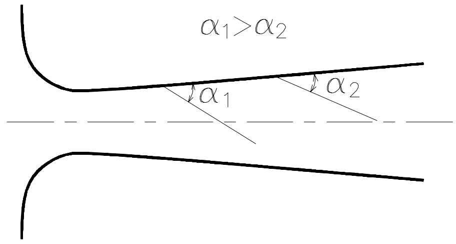
Zusätzliche Bedingungen der Ähnlichkeit für Strömungen von kompressiblen Medien:

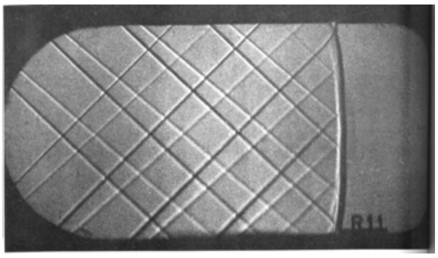
$\kappa = \kappa_m$ und Mach Zahl: $Ma = \frac{v_0}{a_0} = Ma_m = \frac{v_{0m}}{a_{0m}}$

Verbreitung von Druckwellen



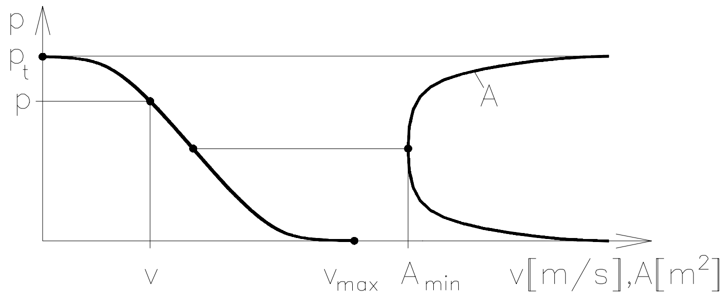
Machscher Kegel, Machsche Linie und Machscher Winkel: $\sin\alpha = \frac{at}{vt} = \frac{a}{v} = \frac{1}{Ma}$





Ausströmung eines Gases aus einem Druckbehälter

$$v = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_t \left[1 - \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}.$$



$v_{max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_t}$ die Tangente der Kurve: $v\frac{\partial v}{\partial e} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial e} + g_e \Rightarrow \frac{dp}{dv} = -\rho v$.

max $-\frac{dp}{dv} \Rightarrow \frac{d(\rho v)}{dv} = v\frac{d\rho}{dv} + \rho = 0 \Rightarrow \rho\left[1 - \frac{v^2}{dp/d\rho}\right] = \rho\left[1 - \frac{v^2}{a^2}\right] = 0$

im Inflexionspunkt v = a, d.h. $Ma = 1$

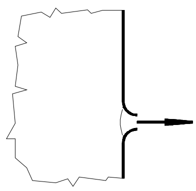
Da $q_m = \rho v A = -\frac{dp}{dv} A = \text{const.}$ bei $\frac{dp}{dv} = 0$ (bei $v = 0$ und $p = 0$) $A \to \infty$.

Für $-\frac{dp}{dv}$ = max ist der Querschnitt A hier der engste: Lavaldüse.

$$T_t = T^* + \frac{a^{*2}}{2c_p} = T^* + \frac{\kappa R T^*}{2c_p} = T^*\left[1 + \frac{c_p / c_v (c_p - c_v)}{2c_p}\right] = \frac{\kappa+1}{2} T^*$$

$$\frac{T^*}{T_t} = \frac{2}{\kappa+1}\ (= 0.833),\ \frac{p^*}{p_t} = \left(\frac{T^*}{T_t}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}\ (= 0.53)\ \frac{\rho^*}{\rho_t} = \left(\frac{T^*}{T_t}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}\ (= 0.63).$$

Einfache Düse



$p_e < p_t$

wenn $p_e / p_t > 0.95$ $\rho \cong \text{const.} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_t - p_e)}$

wenn $p_e / p_t < 0.95$ $\rho \neq \text{const.} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} R T_t \left[1 - \left(\frac{p}{p_t} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]}$

wenn $p_e/p_t = 0.53$ (in Falle $\kappa = 1.4$), $v^* = a^* = \sqrt{\kappa R T^*}$ wo $T^* = 0.833 T_t$.
wenn $p_e/p_t < 0.53$ der Vorgang ist wie im Falle $p_e/p_t = 0.53$. ($p^* = 0.53\, p_t$.)

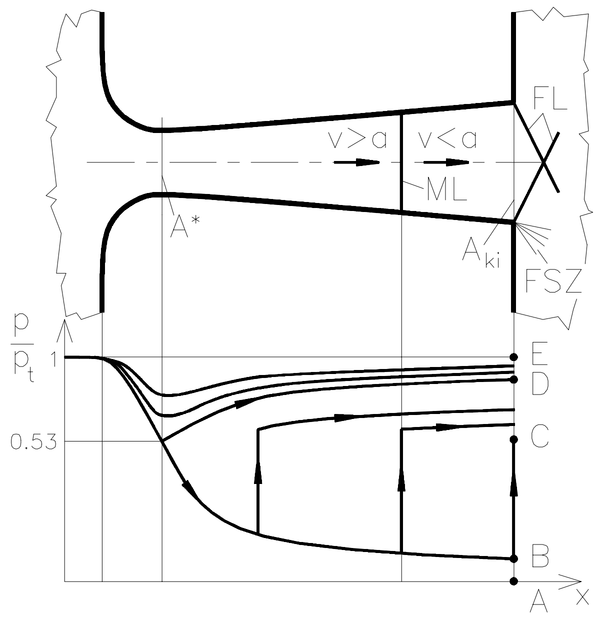
Strömung in einer Lavaldüse

$$v\frac{\partial v}{\partial e} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial e} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial e} = -\frac{1}{\rho}a^2\frac{\partial \rho}{\partial e}.$$

$$d\rho vA + \rho dvA + \rho vdA = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0 \Rightarrow vdv = -a^2\frac{d\rho}{\rho}. \qquad vdv = -a^2\frac{d\rho}{\rho} = a^2\left(\frac{dv}{v} + \frac{dA}{A}\right).$$

$$\frac{v^2}{a^2}\frac{dv}{v} = \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} \quad \Rightarrow \boxed{\left(Ma^2 - 1\right)\frac{dv}{v} = \frac{dA}{A}}$$

α/ wenn $Ma < 1$, im Falle von $dv/v > 0 \Rightarrow dA/A < 0$. Bei $dv/v < 0 \Rightarrow dA/A > 0$
β/ wenn $Ma > 1$, im Falle $dv/v > 0 \Rightarrow dA/A > 0$
γ/ wenn $dA/A = 0$ und $dv/v > 0$ $Ma = 1$.
δ/ wenn $dA/A = 0$ und $Ma \neq 1 \Rightarrow$ Geschwindigkeitsextremwert.



Kontinuität $q_m = \rho^* v^* A^* = \rho_{ki} v_{ki} A_{ki}$

$$0.63\rho_t\sqrt{\kappa R 0.83 T_t}\, A^* = A_{ki}\rho_t\left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_t\left[1-\left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$

Zwei isentropische Lösungen: Punkt B und D.